

Физико-
Математическая
Библиотека
Инженера

А. К. МИТРОПОЛЬСКИЙ

ТЕХНИКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

517.8
М 67
УДК 519.240

Техника статистических вычислений. Митропольский А. К. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971.

В книге излагаются основные методы математической статистики с приложениями к конкретным примерам. В конце книги приложен набор таблиц, необходимых при статистических расчетах.

В настоящее издание внесен ряд дополнений: дано изложение основных теорем статистического исчисления, более полно исследованы распределения случайных величин и т. д.

Переработаны некоторые вопросы техники вычислений: выяснена связь между обыкновенными и факториальными моментами, дано подробное изложение способа сумм, разработаны схемы вычисления выравнивающих частот кривых Пирсона, введены уточнения при вычислении корреляционных уравнений по способу Чебышева и по способу сумм.

Аристарх Константинович Митропольский

ТЕХНИКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

(Серия «Физико-математическая библиотека инженера»)

М., 1971 г., 576 стр. с илл.

Редактор А. С. Чистопольский

Техн. редактор К. Ф. Брудно

Корректор Л. С. Сомова

Сдано в набор 2/IX 1970 г. Подписано к печати 2/II 1971 г.
Бумага 60×90^{1/16}. Физ. печ. л. 36. Условн. печ. л. 36. Уч.-изд. л. 39,12.
Тираж 19 500 экз. Т-02157. Цена книги 2 р. 70 к. Заказ 767.

Издательство «Наука»

Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР, Измайловский проспект, 29.

2-2-3

141-70

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|------------|
| Предисловие к первому изданию | 8 |
| Предисловие ко второму изданию | 8 |
| Глава I. Общие понятия | 9 |
| § 1. Наблюдение | 9 |
| 1. Случайные величины и совокупности (9). 2. Число наблюдений (12). 3. Признаки, отмечаемые при наблюдении (14). 4. Производство наблюдения (17). | |
| § 2. Ряды и таблицы распределения | 20 |
| 1. Сводка данных (20). 2. Ряды распределения (27). 3. Таблицы распределения (35). 4. Кривые и поверхности распределения (41). | |
| § 3. Свойства рядов и таблиц распределения | 44 |
| 1. Свойства распределения (44). 2. Свойства связи (54). | |
| Глава II. Моменты | 60 |
| § 1. Моменты в случае одномерной частичной совокупности | 60 |
| 1. Обыкновенные моменты (60). 2. Факториальные моменты (63). 3. Вычисление моментов по способу произведений (67). 4. Вычисление моментов по способу сумм (70). 5. Центральные и основные моменты (77). 6. Моменты ряда натуральных чисел (85). | |
| § 2. Моменты в случае двумерной частичной совокупности | 86 |
| 1. Смешанные моменты (86). 2. Вычисление смешанных моментов по способу произведений (88). 3. Вычисление смешанных моментов по способу сумм (91). 4. Вычисление моментов при малом числе наблюдений (101). 5. Условные моменты (102). | |
| Глава III. Статистики | 108 |
| § 1. Статистики распределения | 108 |
| 1. Среднее значение (108). 2. Основное отклонение (117). 3. Мера кривости (125). 4. Мера крутости (130). | |
| § 2. Статистики связи | 133 |
| 1. Коэффициент корреляции (133). 2. Корреляционное отношение (138). 3. Показатель корреляции рангов (141). 4. Статистики множественной корреляции (144). | |
| Глава IV. Основные теоремы | 148 |
| § 1. Вероятности | 148 |
| 1. Вероятности (148). 2. Общие положения о вероятностях (150). 3. Теорема сложения вероятностей (151). 4. Теорема умножения вероятностей (152). | |
| § 2. Случайные величины | 154 |
| 1. Прерывные случайные величины (154). 2. Независимые и связанные случайные величины (157). 3. Непрерывные случайные | |

| | |
|--|------------|
| величины (159). 4. Дифференциальная функция распределения (160). 5. Интегральная функция распределения (161). 6. Интеграл Стильтеса (164). 7. Производящая функция вероятностей (166). | |
| § 3. Математические ожидания | 166 |
| 1. Математическое ожидание случайной величины (166). 2. Теоремы о математических ожиданиях (170). 3. Дисперсия и коэффициент корреляции (173). 4. Математическое ожидание и дисперсия среднего значения (175). 5. Производящие функции моментов (176). | |
| § 4. Характеристические функции | 178 |
| 1. Характеристические функции (178). 2. Свойства характеристических функций (179). 3. Определение моментов при помощи характеристических функций (181). 4. Полуинварианты (181). 5. Формула обращения Фурье (183). | |
| § 5. Закон больших чисел | 184 |
| 1. Лемма Маркова (184). 2. Неравенство Чебышева (187). 3. Теорема Маркова (189). 4. Теорема Чебышева (191). 5. Теорема Пуассона (192). 6. Теорема Бернулли (194). 7. Значение закона больших чисел (195). | |
| Глава V. Кривые распределения | 197 |
| § 1. Биномиальное распределение Бернулли | 197 |
| 1. Биномиальное распределение (197). 2. Моменты биномиального распределения (198). 3. Вычисление членов биномиального распределения (200). 4. Применение биномиального распределения (203). 5. Теорема Муавра — Лапласа (204). | |
| § 2. Нормальное распределение Лапласа — Гаусса | 209 |
| 1. Нормальное распределение (209). 2. Интеграл вероятностей (213). 3. Теорема Бернулли — доказательство Лапласа — Маркова (216). 4. Таблица значений интеграла вероятностей (217). 5. Моменты нормального распределения (221). 6. Характеристические функции нормального распределения (224). 7. Теорема Ляпунова (229). 8. Объяснение нормального распределения (232). 9. Основные ошибки (234). 10. Вычисление выравнивающих частот (238). | |
| § 3. Распределение Пуассона | 242 |
| 1. Распределение Пуассона (242). 2. Моменты распределения Пуассона (243). 3. Применение распределения Пуассона (245). 4. Вычисление выравнивающих частот (246). | |
| § 4. Гамма- и бета-распределение | 247 |
| 1. Гамма-функция (247). 2. Бета-функция (250). 3. Значения и логарифмы гамма-функции (252). 4. Гамма-распределение (255). 5. Бета-распределение (257). | |
| § 5. Распределения типа <i>A</i> и <i>B</i> (Кривые Грама — Шарлье) | 259 |
| 1. Распределение типа <i>A</i> (259). 2. Вычисление выравнивающих частот распределения типа <i>A</i> (265). 3. Распределение типа <i>B</i> (268). 4. Вычисление выравнивающих частот распределения типа <i>B</i> (270). | |
| § 6. Распределения типа I—VII (Кривые Пирсона) | 273 |
| 1. Распределение Маркова и дифференциальное уравнение кривых распределения Пирсона (273). 2. Критерий кривых распределения (274). 3. Тип I (277). 4. Тип II (283). 5. Тип III (286). 6. Тип IV (290). 7. Тип V (293). 8. Тип VI (297). 9. Тип VII (299). 10. Область применения кривых распределения типа I—VII (302). | |

| | |
|---|-----|
| Глава VI. Методы оценки | 304 |
| § 1. Критерии значимости | 304 |
| 1. Критерии значимости (304). 2. Гипотезы (305). 3. Уровни значимости (306). 4. Доверительные границы (308). 5. Проверка гипотез (309). | |
| § 2. Оценки параметров | 311 |
| 1. Смысл оценки (311). 2. Состоятельные оценки (311). 3. Несмещенные оценки (312). 4. Оценка Маркова (314). 5. Дисперсия и вес наблюдений (316). 6. Способ наименьших квадратов (318). | |
| § 3. Распределение статистик | 323 |
| 1. χ^2 -распределение Пирсона (323). 2. t -распределение Стьюдента (328). 3. F -распределение Фишера (331). | |
| § 4. Критерии согласия | 333 |
| 1. Критерий согласия Колмогорова $K(\lambda)$ (333). 2. Критерий согласия Пирсона $P(\chi^2)$ (337). 3. Значение подбора кривых распределения (341). | |
| § 5. Критерий независимости | 342 |
| 1. Критерий независимости (342). 2. Коэффициент взаимной сопряженности (346). 3. Коэффициент сходства (348). | |
| § 6. Оценка среднего значения | 350 |
| 1. Выяснение значимости среднего значения (350). 2. Доверительные границы для среднего значения в общей совокупности (352). 3. Оценка расхождения между средними значениями (354). | |
| § 7. Оценка дисперсии | 356 |
| 1. Критерий F Фишера (356). 2. Критерий R Романовского (358). | |
| § 8. Оценка коэффициента корреляции | 359 |
| 1. Преобразование Фишера (359). 2. Проверка наличия корреляции в общей совокупности (362). 3. Сравнение коэффициентов корреляции в независимых частичных совокупностях (363). 4. Комбинированная оценка коэффициента корреляции в общей совокупности (364). | |
| § 9. Дисперсионный анализ | 366 |
| 1. Задача дисперсионного анализа (366). 2. Простая группировка (367). 3. Неравное число наблюдений по факторам (370). 4. Равное число наблюдений по факторам (372). 5. Оценка влияния отдельных факторов (375). 6. Двойная группировка (375). | |
| § 10. Последовательный анализ | 379 |
| 1. Последовательный анализ (379). 2. Оценка вероятности появления события (381). 3. Оценка среднего значения (383). | |
| § 11. Критерии случайности | 386 |
| 1. Критерий случайности Романовского (386). 2. Проверка случайности при помощи критерия согласия Пирсона (390). | |
| Глава VII. Корреляционные уравнения | 393 |
| § 1. Обыкновенные корреляционные уравнения | 393 |
| 1. Установление корреляционных уравнений по способу наименьших квадратов (393). 2. Способ Чебышева (395). 3. Корреляционные уравнения первого порядка (400). 4. Корреляционные уравнения второго порядка (402). 5. Корреляционные уравнения третьего порядка (404). 6. Корреляционные уравнения четвертого порядка (410). | |

| | |
|---|-----|
| § 2. Вычисление корреляционных уравнений при малом числе испытаний | 413 |
| 1. Вычисление корреляционных уравнений первого порядка (413). | |
| 2. Вычисление корреляционных уравнений второго порядка (416). | |
| 3. Вычисление корреляционных уравнений третьего порядка (420). | |
| § 3. Вычисление корреляционных уравнений при помощи чисел Чебышева | 427 |
| 1. Числа Чебышева (427). 2. Вычисление корреляционных уравнений (430). | |
| § 4. Вычисление корреляционных уравнений по способу сумм | 437 |
| 1. Способ сумм (437). 2. Вычисление корреляционных уравнений в случае нечетного числа разрядов значений (441). 3. Вычисление корреляционных уравнений в случае четного числа разрядов значений (443). | |
| § 5. Вычисление корреляционных уравнений непараболического типа | 447 |
| 1. Вычисление коэффициентов корреляционного уравнения (447). | |
| 2. Корреляционные уравнения степенного типа (449). 3. Корреляционные уравнения показательного типа (451). 4. Корреляционные уравнения логарифмического типа (453). 5. Корреляционные уравнения периодического типа (455). | |
| § 6. Множественные корреляционные уравнения | 460 |
| 1. Установление множественных корреляционных уравнений по способу Чебышева (460). 2. Вычисление множественных корреляционных уравнений (465). | |
| § 7. Поверхности распределения | 470 |
| I. Нормальная поверхность распределения | 470 |
| 1. Уравнение нормальной поверхности распределения (470). 2. Моменты нормальной поверхности распределения (471). 3. Вертикальные сечения нормальной поверхности распределения. Корреляционные прямые (472). 4. Горизонтальные сечения нормальной поверхности распределения. Корреляционные эллипсы (474). 5. Вычисление выравнивающих частот нормальной таблицы распределения (475). | |
| II. Поверхность распределения типа A | 480 |
| 1. Уравнение поверхности распределения типа A (480). 2. Вычисление выравнивающих частот таблицы распределения типа A (481). | |
| Приложение I. Механические свойства материалов | 485 |
| Приложение II. Математико-статистические таблицы | 490 |
| I. Таблица достаточно больших чисел | 490 |
| II. Номограмма достаточно больших чисел при величине вероятности $P = 0,95$ | 491 |
| III. Таблица случайных чисел | 492 |
| IV. Значения четвертых моментов разрядных частот ($x^4 n_I$) | 494 |
| V. Логарифмы факториалов ($\lg n!$) | 498 |
| VI. Значения функции $f(x)$ | 502 |
| VII. Значения функции $f^*(x)$ | 503 |
| VIII. Значения функции $\Phi(x)$ | 504 |
| IX. Значения функции $F(x)$ | 505 |
| X. Значения функции p_m | 506 |
| XI. Логарифмы гамма-функции $[\lg \Gamma(x)]$ от $x = 1$ до $x = 2$ | 512 |
| XII. Логарифмы гамма-функции $[\lg \Gamma(x)]$ от $x = 1,00$ до $x = 50,99$ | 514 |

| | |
|--|-----|
| XIII. Значения интегральной функции распределения $F(x)$, дифференциальной функции распределения $f(x)$ и ее первых шести производных | 524 |
| XIV. Логарифмы функции $F(r, v)$ | 532 |
| XV. Уровни значимости и соответствующие им отклонения x при одностороннем (Q) и двустороннем ($2Q$) критериях в случае нормального распределения | 537 |
| XVI. Значения χ^2 , соответствующие значениям $P(\chi^2)$ и числам степеней свободы v | 537 |
| XVII. Значения t при разных уровнях значимости и данном числе степеней свободы v | 538 |
| XVIII. Значения F при $P=0,05$ | 539 |
| XIX. Значения F при $P=0,025$ | 540 |
| XX. Значения F при $P=0,01$ | 541 |
| XXI. Значения F при $P=0,005$ | 542 |
| XXII. Критерий согласия Колмогорова. Значения $1 - K(\lambda)$ | 543 |
| XXIII. Значения величины r для значений z от 0,00 до 2,99 | 544 |
| XXIV. Значения величины z для значений r от 0,00 до 0,99 | 544 |
| XXV. Степени натуральных чисел | 545 |
| XXVI. Числа Чебышева от $n=3$ до $n=50$ | 547 |
| XXVII. Суммы степеней отклонений от среднего значения и определители распределения ряда натуральных чисел | 558 |
| XXVIII. Множители M | 559 |
| XXIX. Суммы степеней натуральных чисел | 560 |
| XXX. Суммы логарифмов натуральных чисел | 562 |
| XXXI. Множители L | 563 |

Литература по статистическому исчислению 534

- I. Вводные статьи (564). II. Руководства и труды общего характера (564). III. Кривые распределения (555). IV. Методы оценки (566). V. Корреляционные уравнения (537). VI. Вычислительные таблицы (569). VII. Применение методов статистического исчисления (569). VIII. Журналы и библиография (576).

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В этой книге дается краткое изложение методов статистического исчисления. Основная задача книги — служить пособием при математической обработке данных наблюдения. Поэтому главное внимание направлено на технику математико-статистических вычислений и, в особенности, на применение таблиц, облегчающих вычислительную работу.

Все вопросы статистического исчисления, излагаемые в книге, прорабатываются на конкретных примерах, взятых главным образом из области анализа механических свойств стали, древесины и других материалов.

В конце книги приложены необходимые при вычислениях математико-статистические таблицы.

Приношу глубокую благодарность академику АН УССР Б. В. Гнеденко и научному сотруднику Ленинградского отделения Математического института АН СССР О. В. Шалаевскому за ряд весьма ценных указаний.

А. К. Митропольский

Ленинград,
1961

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Для обоснования методов статистического исчисления внесены ряд дополнений: дано изложение основных теорем статистического исчисления (гл. IV), более полно исследованы распределения случайных величин (гл. V), рассмотрены распределения статистик χ^2 , t и F и критерии случайности (гл. VI), расширено исследование поверхностей распределения (гл. VII).

Переработаны также некоторые вопросы техники вычислений: выяснена связь между обыкновенными и факториальными моментами, дано подробное изложение способа сумм (гл. II), разработаны схемы вычисления выравнивающих частот кривых Пирсона (гл. V), введены уточнения при вычислении корреляционных уравнений по способу Чебышева и по способу сумм (гл. VII).

А. К. Митропольский

Ленинград,
1971

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Наблюдение

1. Случайные величины и совокупности. Опытной основой научного исследования является *наблюдение*. Можно различать два типа наблюдений. При наблюдениях первого типа производятся единичные измерения исследуемого свойства у каждого из n *однородных* предметов (рис. 1.1); при наблюдениях же второго типа

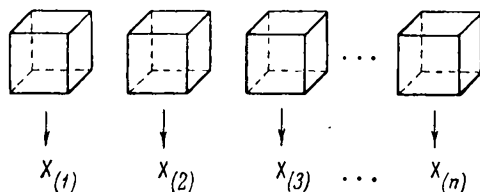


Рис. 1.1. Первый тип наблюдений: единичное измерение исследуемого признака у каждого из n предметов.

производится n измерений исследуемого свойства у *одного* предмета (рис. 1.2).

Исследуемое свойство представляет некоторую величину X .

Предположим, что принимаются все меры к тому, чтобы условия, в которых протекают наблюдения, оставались неизменными от наблюдения к наблюдению. В силу целого ряда причин, главным образом оттого, что невозможно полностью учесть ничтожные изменения большого числа разнообразных возмущающих факторов, результаты n наблюдений не будут одинаковыми; от наблюдения к наблюдению они будут испытывать неправильные колебания.

Но в этих неправильностях все же может быть замечена особого рода закономерность. Она носит название *статистической устойчивости* и заключается в следующем.

Пусть в результате наблюдений или измерений величины X , проводившихся в одинаковых условиях, получен ряд значений этой величины

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}. \quad (1.1)$$

Подсчитаем число случаев, при которых наблюдалось некоторое отдельное значение величины X , и возьмем отношение этого числа

к числу всех наблюдений n . Это отношение называется *частотой* появления данного значения в последовательности произведенных n наблюдений.

Будем увеличивать n . Если наблюдения будут проводиться в одинаковых условиях, то можно убедиться, что частоты значений исследуемой величины обладают устойчивостью, колеблясь в очень узких пределах. Для каждого значения величины X можно указать такое постоянное число, что при большом n частота этого значения будет приближенно равна указанному постоянному числу, причем степень приближения будет тем выше, чем больше число наблюдений n . Указанное постоянное число, являющееся абстрактным выражением устойчивой частоты, называется *вероятностью* данного значения изучаемой величины. Величины, принимающие разные значения с определенными вероятностями, называются *случайными величинами*. Исследование случайных величин является предметом *статистического исчисления*.

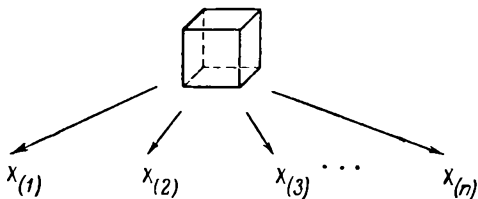


Рис. 1.2. Второй тип наблюдений: n измерений исследуемого признака у одного предмета.

Замечательный факт статистической устойчивости был известен многим исследователям. Но лишь в конце XVII века Яков Бернулли поставил и решил задачу дать доказательство, «извлекаемое из научных оснований», теоремы: при достаточно большом числе наблюдений можно с практически полной уверенностью ожидать, что частота события будет как угодно мало отличаться от его вероятности *). Теорема Бернулли представляет простейший вид основного закона статистического исчисления — закона больших чисел.

Между двумя типами наблюдений нет принципиальной разницы. Например, нетрудно сообразить, что второй тип наблюдений может быть сведен к первому, если мы станем при каждом наблюдении рассматривать измеряемый предмет как некоторый новый предмет, вполне однородный с данным. Тогда можно предположить, что имеется некоторая неограниченная (во всяком случае очень большая) *общая совокупность* почти однородных (полную однородность обеспечить невозможно) предметов. Наудачу мы из-

*) Я. Бернулли (1713), русск. перев., 1913, стр. 23, 27—40 (II). (Цифра в скобках означает номер раздела в списке литературы)

влекать из этой совокупности один предмет и производим измерение интересующего нас свойства. Слово «наудачу» означает, что для каждой единицы данного рода обеспечивается одинаковая возможность быть взятой из общей совокупности.

Так как мы интересуемся не предметами общей совокупности, а лишь значениями свойства, то допустимо заменить каждый предмет связанным с ним значением свойства и говорить не об общей совокупности отдельных предметов, а об общей совокупности значений случайной величины X и о наблюдении значений этой случайной величины.

Может случиться, что после измерения предмет уже нельзя будет вернуть в общую совокупность (например, при большом усилии стальная нить разорвется), т. е. повторение эксперимента произойдет при изменившихся условиях (изменилась общая совокупность). Но если необходимо сделать всего n наблюдений и n значительно меньше числа однородных предметов в общей совокупности, то изменением условий можно пренебречь.

Наблюденные в последовательности n экспериментов значения (1.1) образуют *частичную совокупность* значений случайной величины X . Подчеркнем еще раз, что каждое значение получено в результате измерения свойства у некоторого предмета, взятого из общей совокупности (в которую могут быть и не возвращены предметы, измеренные в предыдущих испытаниях; число наблюдений мало по сравнению с числом предметов в общей совокупности).

Целью исследования является изучение выделенных свойств единиц общей совокупности. Эта задача была бы полностью решена, если бы удалось обследовать все единицы общей совокупности. Однако в распоряжении исследователя имеются только данные о свойствах, выраженных частичными совокупностями. На основании этих данных и требуется делать заключения.

В самом деле, исчерпывающий анализ всех единиц, при помощи которого могла бы быть составлена общая совокупность значений случайной величины, или оказывается вообще невозможным и лишенным смысла, когда эти единицы подвергаются порче или полному разрушению при испытании, или же является исключительно сложным и дорогостоящим, если бы было необходимо производить наблюдение чрезмерно большого числа этих единиц.

Чтобы вполне отчетливо представить указанное выше положение, рассмотрим обычную обстановку научно-исследовательской работы. Пусть, например, изучается продолжительность всего срока горения электрических ламп. При этом, конечно, было бы неразумно подвергать испытанию всю партию ламп, изготовленных заводом, и дожидаться момента, когда все лампы перегорят. Точно так же немыслимо для определения процента патологических форм кровяных шариков выпустить всю кровь больного.

Но даже и в тех случаях, когда было бы возможно произвести испытание над всеми без исключения единицами данного рода, это оказывается не только очень трудным и дорогим, но и ненужным так как необходимые для выводов данные получаются гораздо проще, точнее и надежнее, если будет взята только сравнительно небольшая часть.

Анализ условий, при которых выполняется научно-исследовательская работа, показывает, что — при надлежащей постановке этой работы — к исследованию полученных данных могут быть применены методы статистического исчисления, в рамках которого возможно решить главную задачу научного исследования — сделать надежные выводы об объективных свойствах явления, выражаемых полно лишь общей совокупностью значений случайной величины, на основании свойств этого явления, выражаемых частичными совокупностями, полученными при наблюдении.

2. Число наблюдений. Для обеспечения надежности этих выводов необходимо при производстве наблюдения главное внимание сосредоточить на том, чтобы частичные совокупности значений случайной величины действительно могли служить *пробами*, по которым можно было бы судить о свойствах изучаемого явления, выражаемых общей совокупностью. Для этого надо решить *два основных вопроса*:

1) какое число единиц частичной совокупности достаточно велико для того, чтобы по ней можно было делать надежные выводы об изучаемом явлении;

2) из каких именно единиц надо составить частичную совокупность, чтобы можно было рассматривать ее в качестве представительного образца изучаемой общей совокупности.

Мы укажем один важный случай, когда ответ на первый вопрос может быть дан при помощи так называемой таблицы достаточно больших чисел. (При решении второго вопроса применяется таблица случайных чисел.)

Предположим, что необходимо составить представление о доле данного значения изучаемого свойства в общей совокупности на основании доли этого значения (частости) в частичной совокупности. Каков должен быть объем этой частичной совокупности, чтобы с той или иной «степенью уверенности» можно было бы считать, что отклонение неизвестной доли от частости не превышает некоторой допустимой ошибки?

Таблица достаточно больших чисел составлена на основании формулы*), которая показывает, как достаточно большое число наблюдений, объем частичной совокупности, зависит от «степени уверенности», величины допустимой ошибки и самой неизвестной доли. Но зависимость от неизвестной доли удастся исключить,

*) Сама формула возникает при доказательстве теоремы Бернулли.

выбрав для нее наихудшее значение (так что достаточно большое число получается завышенным).

Кроме того, выясняется, что на число наблюдений не влияет то, из какого именно числа единиц состоит общая совокупность. Заметим только, что установление достаточно большого числа сделано в предположении, что частичная совокупность составляет небольшую часть общей совокупности, как это обычно и имеет место в научных исследованиях.

«Степень уверенности» или «мера риска» определяется величиной вероятности, с которой делается соответствующее заключение; о том, что такое вероятность, мы кратко упоминали (см. также гл. IV, § 1).

Относительно выбора *величины вероятности* P нет какого-либо общего решения, одинакового при всех исследованиях. «Теория может только предлагать те или другие меры риска, но она не может установить, какую степень риска должно признавать допустимой»). Чем ближе к единице будет величина рассматриваемой вероятности, тем надежнее будет заключение. В практике научных исследований обычно принимается $P = 0,95$ или $P = 0,99$.

Допустимая ошибка ϵ при исследованиях устанавливается в зависимости от природы изучаемого явления. В большинстве случаев допустимая ошибка принимается равной 0,05.

Таблица достаточно больших чисел приведена в конце книги (табл. I **). Чтобы по этой таблице найти достаточно большое число наблюдений, надо задать величину вероятности P , выражающую степень надежности выводов, и назначить допустимую ошибку ϵ . Например, если величина вероятности принята равной 0,95, а допустимая ошибка равна 0,05, то достаточно большое число наблюдений будет равно 384.

Теперь рассмотрим, для определенности, наблюдения второго типа. Пусть они повторяются в неизменных условиях; целью их каждый раз является измерение некоторого постоянного свойства, скажем, величины μ , которую будем называть «истинным значением свойства». Результаты наблюдений всегда будут несколько отличаться от μ , рассеиваться, сосредоточиваться около μ . Ниже мы познакомимся с понятием «степени рассеяния» значений изучаемого свойства около истинного значения и с понятием «меры изменчивости», через которую иногда выражают «степень рассеяния».

Спрашивается, каков должен быть объем частичной совокупности, чтобы с той или иной «степенью уверенности» можно было бы считать, что отклонение от единицы отношения среднего

*) А. А. Марков, 1924, стр. 155 (II).

**) Здесь и в дальнейшем изложении римскими цифрами обозначаются номера таблиц, приложенных в конце книги.

арифметического наблюдаемых значений к истинному значению μ изучаемого свойства не превышает некоторой допустимой ошибки?

Если известна мера изменчивости v , то достаточно большое число — при той же самой величине вероятности P и допустимой ошибке ϵ — может быть найдено при помощи номограммы достаточно больших чисел.

В конце книги приведена номограмма достаточно больших чисел при величине вероятности $P = 0,95$, обычно принимаемой при научных исследованиях (табл. II).

Если мера изменчивости $v \leq 10\%$, то достаточно большое число находится по номограмме непосредственно. Например, если $v = 8\%$ и $\epsilon = 0,03$, то, натянув нить (или наложив прозрачную линейку с нанесенной на ней прямой линией) через точку 8 левой шкалы и точку 3 правой шкалы, найдем на пересечении этой нити со средней шкалой искомое достаточно большое число наблюдений $n = 27$. Если же $v > 10\%$, то число на средней шкале номограммы надо умножить на 100. Например, если $v = 16\%$ и $\epsilon = 0,05$, то, натянув нить через точку 1,6 левой шкалы и точку 5 правой шкалы, найдем на средней шкале точку 0,39. Следовательно, достаточно большое число будет равно $n = 0,39 \cdot 100 = 39$.

Обратим внимание на то, что номограмма достаточно больших чисел дает числа значительно меньшие, чем приведено в таблице достаточно больших чисел. Не уменьшая степени надежности наших заключений и не увеличивая допустимой ошибки, мы можем при малой изменчивости изучаемых свойств свести достаточно большое число до нескольких единиц. Благодаря этому открывается широкое поле для применения методов статистического исчисления при дорогостоящих и трудоемких испытаниях разного рода материалов в научно-исследовательских институтах, заводских лабораториях и т. д.

3. Признаки, отмечаемые при наблюдении. При употреблении таблицы и номограммы достаточно больших чисел является существенно необходимым, чтобы наблюдения производились в обстановке, отвечающей условиям правильного применения методов статистического исчисления.

Переходя к рассмотрению этих условий, мы должны остановиться на выяснении единицы наблюдения и тех признаков, которые отмечаются при наблюдении.

Единицей наблюдения называется тот предмет, лицо или явление, относительно которого собираются данные при наблюдении. При разных постановках задач научного исследования оказываются различными и единицы наблюдения.

Например, при исследовании механических свойств стали в качестве единицы наблюдения берутся образцы определенной формы, меняющейся в зависимости от характера испытаний: при изучении

сопротивления стали растяжению берутся образцы круглого или прямоугольного сечения; при определении сопротивления сжатию образцы имеют форму куба или цилиндра с высотой, немного превышающей диаметр; при изучении ударной вязкости применяются цилиндрические или плоские образцы определенного размера с надрезом определенного вида. В последнем случае в СССР приняты стандартные образцы $10 \times 10 \times 55$ мм. При испытании древесины на сжатие вдоль волокон за единицу наблюдения берутся образцы данной породы дерева в форме прямоугольной призмы с основанием 20×20 мм и высотой 30 мм. Для чугуна берутся кубики с ребром 3 см; цементный раствор испытывается в кубических образцах с ребром 7 см и т. д.

Кроме единицы наблюдения необходимо, приступая к наблюдению, определить те свойства явления или признаки, сведения о которых должны быть собраны при наблюдении. Признаки, отмечаемые при наблюдении, можно разделить на два вида: во-первых, *общие признаки*, отметка которых производится только с целью установления однородности изучаемых единиц наблюдения; во-вторых, *основные признаки*, отметка которых составляет главную цепь наблюдения.

Для того чтобы единицы наблюдения были *однородными*, необходимо, чтобы они обладали значительным числом общих признаков.

Например, при исследовании механических свойств стали для обеспечения однородности необходимо подвергать испытанию образцы стали одного и того же сорта, одинакового химического состава, одинаковых условий плавки и закалки, поддерживая при испытании одинаковую температуру. При анализе механических свойств древесины надо брать образцы одной породы дерева, одного возраста, одной местности с одинаковыми условиями произрастания. Образцы должны быть вырезаны из определенного места ствола на данной высоте и данном расстоянии и направлении от сердцевины. При испытании должна быть обеспечена одинаковая влажность образцов, соблюдена одинаковая температура и учтено направление волокон и положение годичных колец.

Чем большим числом таких общих признаков, одинаковых для всех единиц наблюдения, эти единицы будут обладать, тем однороднее они будут. В дальнейшем предполагается, что каждая частичная совокупность является однородной, г. е. взятой наудачу из одной и той же общей совокупности. В производственной технике понятию однородности соответствует понятие статистически контролируемого производственного процесса, при котором обеспечиваются существенно одинаковые условия производства.

Достижение полной однородности единиц наблюдения является неосуществимым; как бы далеко мы ни продвинулись в этом

отношении, всегда мы встречаемся с элементами неоднородности. Более того, благодаря именно наличию элементов неоднородности, приводящему к изменчивости свойств изучаемого явления, появляется самый предмет статистического исчисления — случайные величины. Признаки, которые характеризуются элементами неоднородности, являются основными признаками, представляющими примеры случайных величин.

Основные признаки, отмечаемые при наблюдении, устанавливаются в зависимости от предмета и целей исследования. Например, при исследовании стали, древесины и других материалов основными признаками могут служить разные механические свойства этих материалов: предел прочности при растяжении или сжатии, ударная вязкость, модуль упругости и т. д. (см. Приложение I).

Ввиду крайнего многообразия признаков, каждый из которых представляет интерес в том или ином отношении, но отметка которых была бы очень трудна из их многочисленности, приходится при наблюдении ограничиваться только немногими признаками, наиболее существенными для поставленной цели исследования. При исследовании часто бывает достаточным остановиться одновременно на двух, трех, редко четырех основных признаках.

Одновременное изучение большого числа основных признаков оказывается не только довольно сложным, но и не достигающим цели, так как разного рода статистические характеристики, вполне ясные и имеющие реальное значение при одновременном изучении немногих признаков, утрачивают ясность и смысл при числе признаков более трех.

Признаки, отмечаемые при наблюдении, как общие, так и основные, могут быть *качественными* и *количественными*. Качественные признаки не поддаются измерению, тогда как количественные признаки могут быть измерены, т. е. выражены при помощи чисел.

Под *измерением* понимается сравнение одной величины с некоторой качественно однородной величиной, принятой за меру, или единицу измерения.

Подсчитав, сколько раз в измеряемой величине содержится принятая единица измерения, получают число, представляющее *значение* измеряемой величины.

Числа, получаемые непосредственно в результате измерения, называются *абсолютными числами*. Кроме абсолютных чисел, при исследовании применяются также относительные числа. *Относительным числом* называется число, взятое в отношении к другому числу, принятому за основание. Относительные числа особенно удобно выражать в процентах ($1\% = 0,01$) или в промилле ($1\text{‰} = 0,001$).

4. Производство наблюдения. После того как было определено число наблюдений по таблице или номограмме достаточно больших чисел и установлены единица наблюдения и признаки, отмечаемые при наблюдении, остается решить вопрос, какие именно единицы общей совокупности должны быть подвергнуты наблюдению. Для того чтобы составленная на основании наблюдения частичная совокупность правильно отражала свойства общей совокупности, необходимо каждую единицу брать *наудачу*, т. е. без какого бы то ни было подбора, совершенно случайно (см. п. I)*).

Случайность состава частичной совокупности является необходимым условием для применения методов статистического исчисления.

Наиболее надежным способом обеспечения случайности при производстве наблюдения является применение таблицы случайных чисел.

Краткая *таблица случайных чисел* приведена в конце книги (табл. III)**).

Применение таблицы случайных чисел при наблюдении состоит в следующем. Положим, что из очень большого числа, скажем, в пять тысяч единиц, требуется подвергнуть наблюдению, скажем, четыреста единиц. Для того чтобы эти четыреста единиц были взяты наудачу, составим список всех пяти тысяч единиц и перенумеруем их; затем выпишем из таблицы случайных чисел четыреста чисел, начиная с какого-либо столбца таблицы, причем если случайное число окажется больше пяти тысяч, то будем выписывать разность между этим числом и пятью тысячами. Получив таким образом четыреста случайных чисел, возьмем затем из составленного списка четыреста единиц, соответствующих полученным номерам. При такой обстановке наблюдения требуемая случайность будет вполне обеспечена, так как и цифры таблицы случайных чисел расположены совершенно случайно, и, конечно, между этой таблицей и нумерацией рассматриваемого списка нет никакой связи.

Работа при наблюдении или испытании заключается в измерении, счете или отметке присутствия или отсутствия некоторых признаков.

Способы наблюдения, а также применяемые при испытаниях приборы и машины оказываются различными в разных областях знания, в зависимости от природы изучаемых явлений. Подобным же образом и точность измерений бывает различной при разных

*) Здесь и далее при ссылках на пункт данного параграфа номер параграфа не указывается. Аналогично при ссылках на параграф данной главы номер главы также не указывается.

**) При составлении таблицы случайных чисел были использованы 16—19-е знаки двадцатизначной таблицы логарифмов чисел от 90 000 до 100 000.

исследованиях. Для целей статистического исчисления *точность измерений* оказывается вполне достаточной, если значения изучаемых величин отмечаются при испытаниях до третьей изменяющейся цифры.

При каждом испытании или наблюдении получаются некоторые данные, которые записываются на приготовленных для этого отдельных карточках или же в тетрадах, лабораторных журналах и т. д.

При математико-статистическом исследовании, так же как и при всякой иной научной работе, следует производить разного рода записи на отдельных небольших *листочках*, например, в 1/8 долю писчего листа (размер почтовой карточки), располагая эти записи на *одной* стороне листка. Благодаря этому выполнение научной работы в значительной мере облегчается.

Результаты испытаний и вообще всякого рода сведения, получаемые при наблюдении, называются *данными наблюдения*.

Примером данных наблюдения относительно одной случайной величины могут служить результаты испытаний ударной вязкости a_k (кгм/см²) 100 цилиндрических образцов из малоуглеродистой стали, приведенные в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Результаты испытаний ударной вязкости a_k малоуглеродистой стали

| a_k , кгм/см ² | | | | | | | | | |
|-----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 11,4 | 11,7 | 11,7 | 11,5 | 11,3 | 11,8 | 12,2 | 11,5 | 11,3 | 11,2 |
| 11,0 | 10,4 | 11,2 | 11,2 | 11,5 | 11,2 | 11,4 | 11,4 | 11,7 | 11,6 |
| 12,1 | 11,6 | 11,5 | 11,7 | 11,5 | 10,9 | 11,8 | 11,5 | 11,5 | 11,4 |
| 11,4 | 11,8 | 12,0 | 11,5 | 11,6 | 11,7 | 11,6 | 10,8 | 11,4 | 11,3 |
| 11,3 | 11,2 | 11,6 | 11,1 | 11,4 | 11,2 | 11,4 | 11,5 | 11,3 | 11,1 |
| 10,9 | 10,8 | 11,5 | 12,1 | 11,5 | 11,9 | 11,3 | 11,4 | 11,3 | 11,4 |
| 11,4 | 11,6 | 11,4 | 11,5 | 12,2 | 11,7 | 11,6 | 11,6 | 10,8 | 11,2 |
| 11,6 | 10,7 | 11,4 | 11,2 | 11,0 | 11,5 | 12,1 | 11,4 | 11,5 | 11,3 |
| 11,7 | 11,8 | 11,9 | 11,0 | 11,4 | 10,6 | 11,9 | 11,5 | 11,3 | 11,8 |
| 11,6 | 11,5 | 11,3 | 11,5 | 12,5 | 11,4 | 11,7 | 11,3 | 11,4 | 11,5 |

В качестве примера данных наблюдения относительно двух случайных величин приведем данные относительно объемного веса γ (г/см³) при влажности 10% и модуля упругости E (кг/см²) при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели (табл. 1.2).

В этой таблице для краткости взято $\gamma \cdot 10^3$ и $E \cdot 10^{-3}$, т. е. значения объемного веса умножены на 1000, а значения модуля упругости разделены на 1000. Например, числа первого номера 480 и 153,3 означают, что при испытании этого образца получено $\gamma = 0,480$ г/см³ и $E = 153\,300$ кг/см².

Таблица 1.2

Данные наблюдения относительно объемного веса γ (г/см³) при влажности 10% и модуля упругости E (кг/см²) при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели

| γ | E | γ | E | γ | E | γ | E | γ | E | γ | E | γ | E | γ | E | γ | E |
|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-----|
| 480 | 153,3 | 510 | 129,4 | 426 | 119,0 | 482 | 139,9 | 393 | 103,2 | 510 | 162,3 | 403 | 123,9 | 506 | 158,4 | | |
| 393 | 122,8 | 442 | 115,4 | 411 | 112,9 | 514 | 153,6 | 525 | 156,5 | 543 | 155,4 | 412 | 116,3 | 449 | 124,5 | | |
| 482 | 136,4 | 569 | 157,4 | 484 | 147,5 | 472 | 134,2 | 453 | 124,2 | 422 | 117,9 | 320 | 64,5 | 547 | 164,4 | | |
| 403 | 110,0 | 331 | 74,1 | 467 | 113,0 | 543 | 145,3 | 396 | 83,8 | 351 | 102,9 | 503 | 148,5 | 402 | 120,8 | | |
| 542 | 146,1 | 437 | 124,3 | 453 | 119,5 | 386 | 105,8 | 434 | 122,3 | 418 | 118,4 | 391 | 107,5 | 399 | 100,0 | | |
| 486 | 139,4 | 421 | 124,2 | 496 | 143,1 | 463 | 121,2 | 508 | 159,0 | 419 | 105,8 | 434 | 108,7 | 440 | 126,7 | | |
| 405 | 103,6 | 484 | 140,4 | 344 | 86,8 | 415 | 119,7 | 463 | 136,7 | 475 | 143,6 | 468 | 144,9 | 392 | 82,7 | | |
| 452 | 140,5 | 501 | 143,8 | 443 | 122,9 | 461 | 138,6 | 340 | 85,1 | 438 | 134,9 | 523 | 148,7 | 416 | 120,5 | | |
| 483 | 143,4 | 440 | 128,5 | 423 | 131,1 | 386 | 95,5 | 321 | 86,1 | 433 | 131,5 | 351 | 89,0 | 481 | 148,3 | | |
| 465 | 127,7 | 390 | 108,1 | 463 | 129,2 | 468 | 128,9 | 488 | 134,1 | 443 | 137,4 | 505 | 155,8 | 395 | 109,1 | | |
| 474 | 132,5 | 490 | 139,9 | 396 | 90,1 | 362 | 97,9 | 566 | 175,7 | 418 | 109,8 | 502 | 132,5 | 500 | 155,5 | | |
| 359 | 71,9 | 443 | 135,7 | 421 | 118,0 | 433 | 128,2 | 514 | 174,6 | 320 | 72,6 | 406 | 113,8 | 465 | 140,9 | | |
| 487 | 146,0 | 532 | 158,7 | 330 | 71,1 | 433 | 134,1 | 593 | 187,4 | 445 | 124,7 | 518 | 154,0 | 496 | 141,7 | | |
| 473 | 136,4 | 522 | 154,5 | 547 | 154,7 | 560 | 169,8 | 412 | 127,8 | 444 | 130,0 | 437 | 121,8 | 462 | 138,8 | | |
| 438 | 122,2 | 406 | 110,1 | 413 | 106,7 | 458 | 121,7 | 408 | 117,0 | 480 | 153,9 | 573 | 156,5 | 518 | 144,4 | | |
| 394 | 112,1 | 440 | 105,7 | 443 | 121,9 | 452 | 131,0 | 452 | 116,1 | 541 | 146,8 | 446 | 130,3 | 510 | 140,6 | | |
| 429 | 120,9 | 440 | 126,7 | 441 | 140,8 | 422 | 108,6 | 397 | 106,8 | 424 | 119,0 | 437 | 129,2 | 397 | 108,6 | | |
| 483 | 147,0 | 428 | 131,6 | 442 | 156,2 | 426 | 129,1 | 458 | 128,0 | 463 | 125,0 | 418 | 118,6 | 407 | 118,5 | | |
| 499 | 144,5 | 422 | 122,9 | 399 | 95,8 | 436 | 114,3 | 468 | 128,6 | 503 | 149,9 | 421 | 115,1 | 515 | 155,8 | | |
| 512 | 169,9 | 473 | 137,9 | 518 | 151,3 | 576 | 166,4 | 448 | 125,9 | 521 | 154,9 | 471 | 143,9 | 398 | 109,0 | | |
| 446 | 144,0 | 400 | 114,6 | 457 | 126,4 | 446 | 128,4 | 440 | 133,1 | 497 | 147,3 | 513 | 159,3 | 480 | 117,7 | | |
| 457 | 103,6 | 458 | 133,5 | 514 | 161,8 | 472 | 146,3 | 372 | 81,7 | 536 | 181,0 | 498 | 144,5 | 376 | 112,8 | | |
| 470 | 124,0 | 377 | 97,8 | 427 | 120,1 | 382 | 98,8 | 371 | 91,9 | 466 | 130,3 | 471 | 119,7 | 439 | 119,2 | | |
| 362 | 111,7 | 480 | 114,0 | 469 | 131,5 | 410 | 110,5 | 438 | 120,7 | 498 | 145,5 | 429 | 112,9 | 623 | 195,7 | | |
| 422 | 115,7 | 448 | 125,6 | 448 | 121,9 | 481 | 135,2 | 568 | 168,5 | 376 | 103,1 | 418 | 125,7 | 498 | 164,0 | | |
| 576 | 170,1 | 507 | 142,4 | 437 | 145,1 | 462 | 135,7 | 414 | 113,5 | 431 | 125,0 | 424 | 94,3 | 513 | 163,6 | | |
| 428 | 130,3 | 541 | 162,3 | 423 | 130,8 | 516 | 132,6 | 460 | 140,7 | 458 | 139,7 | 481 | 137,3 | 544 | 169,6 | | |
| 391 | 98,2 | 440 | 113,0 | 441 | 126,1 | 522 | 143,8 | 448 | 137,7 | 366 | 93,6 | 383 | 109,7 | 502 | 122,6 | | |
| 430 | 104,3 | 382 | 98,1 | 490 | 134,4 | 345 | 95,9 | 525 | 148,3 | 451 | 124,3 | 430 | 95,3 | 477 | 139,7 | | |
| 511 | 149,5 | 474 | 122,6 | 432 | 123,0 | 434 | 118,6 | 523 | 152,6 | 421 | 126,9 | 467 | 140,5 | 369 | 84,3 | | |
| 464 | 131,3 | 477 | 135,8 | 462 | 125,2 | 525 | 165,9 | 478 | 126,6 | 591 | 178,5 | 447 | 117,5 | 470 | 146,7 | | |
| 562 | 175,9 | 475 | 155,7 | 434 | 110,5 | 523 | 156,8 | 482 | 150,1 | 436 | 117,9 | 540 | 156,7 | 435 | 116,7 | | |
| 392 | 106,6 | 495 | 150,9 | 394 | 117,7 | 441 | 122,8 | 447 | 106,2 | 521 | 139,6 | 426 | 128,2 | 496 | 155,3 | | |
| 401 | 100,1 | 501 | 130,4 | 353 | 62,6 | 468 | 141,2 | 525 | 162,1 | 493 | 154,5 | 352 | 84,9 | 481 | 132,7 | | |
| 411 | 120,7 | 493 | 129,7 | 378 | 103,8 | 377 | 96,1 | 433 | 130,0 | 400 | 106,3 | 503 | 134,7 | 510 | 153,9 | | |
| 353 | 98,0 | 504 | 145,3 | 477 | 146,0 | 421 | 107,9 | 452 | 128,2 | 382 | 113,9 | 448 | 137,3 | 503 | 146,6 | | |
| 417 | 124,3 | 528 | 163,4 | 475 | 132,0 | 483 | 130,3 | 452 | 119,7 | 525 | 145,3 | 523 | 172,8 | 408 | 109,0 | | |
| 547 | 179,0 | 404 | 112,0 | 437 | 115,1 | 502 | 137,2 | 340 | 93,5 | 572 | 180,9 | 443 | 141,6 | 409 | 116,7 | | |
| 459 | 136,7 | 437 | 118,4 | 492 | 137,5 | 442 | 123,4 | 331 | 84,6 | 506 | 153,5 | 388 | 105,6 | 352 | 87,7 | | |
| 421 | 117,8 | 438 | 122,2 | 465 | 140,7 | 517 | 151,1 | 478 | 136,6 | 428 | 106,5 | 379 | 94,6 | 482 | 141,2 | | |
| 453 | 131,2 | 466 | 137,9 | 548 | 162,3 | 409 | 121,0 | 407 | 110,5 | 453 | 126,4 | 383 | 107,4 | 448 | 123,3 | | |
| 428 | 113,7 | 423 | 113,9 | 438 | 131,4 | 435 | 131,6 | 480 | 146,1 | 413 | 110,8 | 468 | 142,0 | 453 | 138,2 | | |
| 482 | 148,2 | 399 | 73,4 | 371 | 89,2 | 500 | 136,6 | 451 | 128,6 | 532 | 160,6 | 438 | 127,0 | 412 | 117,9 | | |
| 423 | 104,1 | 458 | 104,7 | 427 | 125,8 | 460 | 136,8 | 364 | 100,1 | 470 | 143,9 | 437 | 129,4 | 510 | 124,1 | | |
| 538 | 165,0 | 467 | 135,1 | 485 | 138,6 | 461 | 134,9 | 405 | 107,5 | 460 | 122,4 | 498 | 144,3 | 406 | 112,4 | | |
| 493 | 151,2 | 471 | 147,1 | 424 | 117,1 | 458 | 124,4 | 426 | 121,1 | 460 | 124,5 | 438 | 126,7 | 358 | 98,3 | | |
| 415 | 107,1 | 550 | 147,9 | 479 | 138,7 | 362 | 84,3 | 489 | 149,8 | 377 | 96,0 | 459 | 145,4 | 457 | 127,7 | | |
| 437 | 133,7 | 472 | 135,6 | 472 | 122,6 | 418 | 131,4 | 465 | 114,8 | 498 | 139,3 | 585 | 177,7 | 407 | 118,0 | | |
| 505 | 137,5 | 390 | 91,4 | 557 | 151,9 | 591 | 156,9 | 450 | 122,3 | 546 | 177,0 | 454 | 131,1 | 553 | 159,1 | | |
| 544 | 166,7 | 463 | 129,1 | 411 | 115,2 | 464 | 143,2 | 444 | 121,4 | 493 | 149,7 | 476 | 143,0 | 448 | 125,0 | | |

§ 2. Ряды и таблицы распределения

1. Сводка данных. Данные в том виде, как они получены непосредственно при наблюдении, представляют обычно очень большое число самых разнообразных отметок, в расположении которых трудно заметить какую-либо правильность. Чтобы создать возможность для научного исследования этих данных, необходимо, прежде всего, не изменяя самого существа данных, ввести в них некоторый порядок и придать им вид, удобный для обозрения. Такое упорядочивание наблюдаемых данных и приведение их к легко обозримому виду достигается при помощи действия, называемого сводкой данных.

Сводка является первым шагом при исследовании наблюдаемых данных. В результате сводки получаются ряды и таблицы распределения, дающие в кратком виде достаточно ясное представление об основных свойствах изучаемого явления.

При сводке данных наблюдаемые значения случайных величин или признаков, отмечавшихся при наблюдении, объединяются в *разряды* и подсчитывается, сколько раз встречались значения в каждом разряде. Вследствие этого вместо многочисленных отдельных записей получается некоторый порядок статистических *чисел*.

Каждый разряд определяется своими пределами, низшим и высшим.

Установление разрядов сводится к решению вопросов о числе, величине и положении их. При решении этих вопросов руководствуются требованием, чтобы при этом возможно ясней выступали характерные особенности, связанные с природой изучаемых случайных величин.

Число разрядов k обычно принимается равным 12

$$k = 12, \quad (1.2)$$

причем допускаются отклонения от этого числа на 2—3 единицы в ту или другую сторону.

Для определения *величины разряда* c надо путем непосредственного просмотра данных наблюдения найти наибольшее X_{\max} и наименьшее X_{\min} из наблюдаемых значений изучаемой величины и разность между этими значениями разделить на указанное число разрядов:

$$c \approx \frac{X_{\max} - X_{\min}}{12}. \quad (1.3)$$

За величину разряда принимается некоторое удобное число, ближайшее к полученному частному. Например, просматривая данные относительно ударной вязкости малоуглеродистой стали (табл. 1.1), находим $X_{\max} = 12,5 \text{ кгм/см}^2$, а $X_{\min} = 10,4 \text{ кгм/см}^2$. Разделив разность между этими значениями на 12, получим $0,18 \text{ кгм/см}^2$; следовательно величину разряда можно принять равной $0,2 \text{ кгм/см}^2$.

Положение разрядов выбирается так, чтобы среднее из наблюдаемых значений изучаемой величины лежало по возможности ближе к середине соответствующего разряда. В этом случае ряд распределения примет вид, вполне отвечающий природе исследуемого явления. Так как, кроме того, основные статистические характеристики приурочиваются именно к среднему значению, то благодаря указанному правильному выбору положения разрядов все вычисления становятся наиболее простыми.

Среднее значение находится путем деления суммы наблюдаемых значений на их число. Оно может быть найдено приближенно при помощи таблицы случайных чисел.

Найдем, например, приближенное среднее значение ударной вязкости малоуглеродистой стали на основании данных таблицы 1.1. Для этого возьмем какой-нибудь столбец таблицы случайных чисел (табл. III), например, столбец (1). Так как в рассматриваемом примере имеется 100 значений, то при выписывании случайных чисел будем брать последние две цифры каждого числа табл. III. Найдя таким образом 10 двузначных случайных чисел, будем рассматривать их в качестве номеров и по этим номерам выпишем из рассматриваемых данных соответствующие значения ударной вязкости (табл. 1.3). Сложив все 10 значений и разделив полученную сумму на число значений, найдем приближенно среднее значение $11,48 \text{ кгм/см}^2$ или с точностью, принятой при наблюдении, $11,5 \text{ кгм/см}^2$.

Таблица 1.3

Вычисление среднего значения при помощи таблицы случайных чисел
(на основании данных таблицы 1.1)

| Случайные числа | 34 | 28 | 47 | 06 | 15 | 82 | 13 | 10 | 74 | 02 | Сумма |
|--|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| Значения a_k | 11,5 | 11,5 | 11,4 | 11,8 | 11,5 | 11,8 | 11,2 | 11,2 | 11,2 | 11,7 | 114,8 |
| Среднее значение = $\frac{114,8}{10} = 11,48 \text{ кгм/см}^2$. | | | | | | | | | | | |

Поместив найденное среднее значение в середину соответствующего разряда, мы видим, что при установленной выше величине разряда, равной $0,2 \text{ кгм/см}^2$, исходное значение рассматриваемого разряда будет равно $11,4 \text{ кгм/см}^2$. Положение прочих разрядов устанавливается последовательным прибавлением величины разряда к найденному исходному значению или вычитанием из него. Таким образом, исходное значение первого разряда должно быть принято равным $10,4 \text{ кгм/см}^2$, так как в этот разряд войдет наименьшее из наблюдаемых значений, а исходное значение последнего

разряда будет $12,4 \text{ кгм/см}^2$, так как в этот разряд войдет наибольшее из наблюдаемых значений.

Разряды обозначаются или указанием *исходного* значения каждого разряда, или же указанием его *среднего* значения, равного полусумме крайних значений каждого разряда. В первом случае после каждого исходного значения проводится горизон-

тальная черточка, во втором случае черточка не проводится.

Таблица 1.4
Рабочая таблица для одной случайной величины
(Пример — результаты испытаний ударной вязкости малоуглеродистой стали)

| Значения (ударная вязкость) | Сводка | Частоты (число испытаний) |
|-----------------------------------|--------|---------------------------------|
| 10,4— | | 1 |
| 10,6— | | 3 |
| 10,8— | | 5 |
| 11,0— | | 5 |
| 11,2— | | 19 |
| 11,4— | | 35 |
| 11,6— | | 17 |
| 11,8— | | 8 |
| 12,0— | | 4 |
| 12,2— | | 2 |
| 12,4— | | 1 |
| | Σ | 100 |

Установив число, величину и положение разрядов и условившись относительно их обозначения, мы можем перейти к составлению рядов и таблиц распределения.

Составим, например, ряд распределения ударной вязкости малоуглеродистой стали на основании данных табл. 1.1. Для этого построим рабочую таблицу для одной случайной величины (табл. 1.4). Эта таблица состоит из трех столбцов. В левом — узком — столбце таблицы выписываются в возрастающем порядке разряды значений изучаемой величины. В среднем — широком — столбце производится

подсчет данных при помощи черточек. В правом — узком — столбце помещаются числа, полученные путем подсчета черточек в каждой строке таблицы.

Работа при *составлении ряда распределения* заключается в следующем. Данные, полученные при наблюдении, прочитываются *последовательно*, начиная с первого и до последнего, и для каждого значения делается в соответствующей строке среднего столбца рабочей таблицы отметка в виде вертикальной черточки. Например, значение ударной вязкости $11,4 \text{ кгм/см}^2$ для № 1 рассматриваемых данных отмечается черточкой в строке с заголовком 11,4—;

значение $11,7 \text{ кгм/см}^2$ для № 2 отмечается черточкой в строке с заголовком $11,6—$; и так далее. Вообще говоря, черточка ставится против данного или ближайшего меньшего значения.

Для облегчения дальнейшего подсчета черточек следует при переносе в рабочую таблицу каждой пятой записи значения того или иного разряда перечеркивать предыдущие четыре черточки и после каждого из образованных таким способом пятков оставлять пробелы.

По окончании переноса данных в рабочую таблицу производится подсчет черточек, отдельно для каждого разряда значений. Полученные числа записываются в правом столбце рабочей таблицы. Эти числа называются *разрядными частотами* и обозначаются через n_i ; они показывают, как часто при наблюдении встречались значения, сведенные в данные разряды. Наконец, все частоты складываются между собой, и полученная сумма записывается внизу этого столбца под чертой против знака суммы Σ .

Сумма частот должна быть равна числу отдельных наблюдений, на основании которых заполнялась рабочая таблица. В рассматриваемом примере эта сумма равна 100.

Для проверки правильности сводки необходимо, в случае работы отдельного лица, произвести сводку вторично. Совпадение чисел второй сводки с числами, полученными при первой сводке, может рассматриваться как указание на правильность произведенной сводки. При совместной работе нескольких лиц правильность сводки выражается в полном совпадении частот, полученных каждым из этих лиц.

В результате сводки данных относительно одной случайной величины получается ряд распределения по разрядам наблюдаемых значений этой величины. В нашем примере мы можем числа заполненной рабочей таблицы расположить в следующий ряд (табл. 1.5), в котором для обозначения разрядов вместо исходных значений взяты средние значения разрядов.

Подобным же образом, произведя сводку данных наблюдения сначала относительно объемного веса γ , а затем относительно модуля упругости E резонансовой ели — для первых 100 испытаний (табл. 1.2), получим ряды распределения, приведенные в табл. 1.6, 1.7.

При составлении таблицы распределения приготавливается рабочая таблица для двух случайных величин, представляющая сетку из линий, пересекающихся под прямым углом. С левой стороны этой таблицы, для заголовков горизонтальных полос, или строк, выписываются разряды значений первой величины, а сверху таблицы, для заголовков вертикальных полос, или столбцов, выписываются разряды значений второй величины.

Составим, например, таблицу распределения объемного веса γ при влажности 10% и модуля упругости E при сжатии вдоль

Таблица 1.5

Ряд распределения
удачной вязкости
малоуглеродистой
стали

| a_k , кгм/см ² | n_j |
|-----------------------------|-------|
| 10,5 | 1 |
| 10,7 | 3 |
| 10,9 | 5 |
| 11,1 | 5 |
| 11,3 | 19 |
| 11,5 | 35 |
| 11,7 | 17 |
| 11,9 | 8 |
| 12,1 | 4 |
| 12,3 | 2 |
| 12,5 | 1 |
| Σ | 100 |

Таблица 1.6

Ряд распределения
объемного веса резонансовой ели — первые
100 испытаний

| $\gamma \cdot 10^3$, г/см ³ | n_j |
|---|-------|
| 325 | 1 |
| 355 | 3 |
| 385 | 9 |
| 415 | 19 |
| 445 | 20 |
| 475 | 23 |
| 505 | 13 |
| 535 | 8 |
| 565 | 4 |
| 595 | — |
| 625 | — |
| Σ | 100 |

Таблица 1.7

Ряд распределения
модуля упругости резонансовой ели — первые
100 испытаний

| $E \cdot 10^{-3}$, кг/см ² | n_j |
|--|-------|
| 60 | — |
| 74 | 3 |
| 88 | 1 |
| 102 | 14 |
| 116 | 21 |
| 130 | 26 |
| 141 | 21 |
| 158 | 8 |
| 172 | 5 |
| 186 | 1 |
| 200 | — |
| Σ | 100 |

волокон древесины резонансовой ели, взяв значения первых 100 испытаний, помещенные в табл. 1.2 (табл. 1.8).

Работа при составлении таблицы распределения заключается в том, что прочитываются последовательно, от начала до конца данные, полученные при наблюдении, и для каждой пары совместно наблюденных значений изучаемых величин делается в соответствующей клетке рабочей таблицы отметка в виде одной вертикальной черточки. Для облегчения последующего подсчета черточек образуют пятки.

После того как все рассматриваемые пары значений будут при помощи черточек перенесены в рабочую таблицу, делается подсчет числа черточек в каждой клетке таблицы. Полученные числа представляют частоты совместного появления значений, попавших в разряды, указанные в левом и верхнем заголовках таблицы. Эти частоты записываются в соответствующих клетках. Затем частоты каждой строки и каждого столбца складываются между собой, и полученные суммы выписываются в соответствующих клетках правого — итогового — столбца и нижней — итоговой — строки. Суммы итоговых столбца и строки должны не только совпадать между собой, но и равняться числу отдельных пар значений величин, на основании которых делалась сводка. Это число выписывается в правой нижней клетке таблицы.

В результате проделанной работы получим таблицу распределения по разрядам наблюденных значений двух случайных величин.

Таблица 1.8

Рабочая таблица для двух случайных величин
(Пример—объемный вес γ при влажности 10% и модуль упругости E
при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели)

| $\gamma \cdot 10^3, \text{ г/см}^3$ | $E \cdot 10^{-3}, \text{ кг/см}^2$ | | | | | | | | | Σ |
|-------------------------------------|------------------------------------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | 67— | 81— | 95— | 109— | 123— | 137— | 151— | 165— | 179— | |
| 310— | 1 | | | | | | | | | 1 |
| 340— | 1 | | 1 | 1 | | | | | | 3 |
| 370— | 1 | 1 | 5 | 2 | | | | | | 9 |
| 400— | | | 4 | 11 | 4 | | | | | 19 |
| 430— | | | 4 | 5 | 9 | 2 | | | | 20 |
| 460— | | | | 2 | 10 | 9 | 2 | | | 23 |
| 490— | | | | | 3 | 8 | 1 | 1 | | 13 |
| 520— | | | | | | 1 | 4 | 2 | 1 | 8 |
| 550— | | | | | | 1 | 1 | 2 | | 4 |
| Σ | 3 | 1 | 14 | 21 | 26 | 21 | 8 | 5 | 1 | 100 |

Нетрудно заметить, что числа итогового (правого) столбца таблицы распределения представляют частоты ряда распределения по разрядам наблюдаемых значений первой величины — объемного веса, а числа итоговой (нижней) строки представляют частоты ряда распределения по разрядам наблюдаемых значений второй величины — модуля упругости. Если, составив таблицу распределения, получим итоговый столбец и итоговую строку совпадающими с образованными ранее двумя соответствующими рядами распределения (ср. табл. 1.6 и 1.7), то можно быть уверенным в правильности составления этой таблицы.

Описанный здесь способ сводки данных наблюдения называется способом черточек. Он применяется в случае сравнительно небольшого числа наблюдений. Недостаток способа черточек состоит в том, что в этом случае очень трудно производить проверку сводки. Поэтому при большом числе наблюдений прибегают к способу карточек. Для этого данные наблюдения переносятся на небольшие счетные карточки, отдельные для каждой единицы наблюдения. При сводке эти карточки раскладываются в пачки по каждому разряду значений. Подсчет карточек в каждой пачке дает частоту соответствующего разряда значений. Работа проверяется путем просмотра каждой пачки с целью убедиться в том, что не было карточек, разложенных неправильно.

Сводка данных наблюдения представляет очень трудоемкую работу, требующую большого внимания. Поэтому при значительном объеме данных наблюдения составление таблиц производится

Т а б л и ц а 1.9

**Ряды распределения модуля упругости при сжатии
вдоль волокон древесины резонансовой ели**

| $E \cdot 10^{-3}, \text{ кг/см}^2$ | (1) $n = 10$ | (2) $n = 25$ | (3) $n = 100$ | (4) $n = 400$ |
|------------------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| 60 | | 1 | 3 | 2 |
| 74 | | — | 1 | 5 |
| 88 | | 2 | 14 | 20 |
| 102 | 1 | 7 | 21 | 44 |
| 116 | 2 | 5 | 26 | 87 |
| 130 | 2 | 8 | 21 | 100 |
| 144 | 4 | 1 | 8 | 79 |
| 158 | 1 | 1 | 5 | 42 |
| 172 | | | 1 | 16 |
| 186 | | | | 4 |
| 200 | | | | 1 |
| Σ | 10 | 25 | 100 | 400 |

на счетно-аналитических машинах. Благодаря полной механизации работы на этих машинах достигается большая быстрота сводки и устраняется возможность ошибок.

В процессе сводки данных можно отчетливо наблюдать проявление статистической устойчивости, о которой говорилось в § 1, п. 1. Пока подсчитано небольшое число единиц, картина распределения по разрядам наблюдаемых значений случайной величины остается совершенно неясной. По мере же увеличения числа единиц соответствующие им черточки располагаются все более и более правильно, выявляя определенную закономерность.

Так, например, при сводке значений модуля упругости E при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели (табл. 1.2) для первых 10 испытаний, первых 25 испытаний, первых 100 испытаний и, наконец, всех 400 испытаний находим, что с увеличением числа испытаний все отчетливее выступает закономерный характер распределения по разрядам наблюдаемых значений изучаемой величины (табл. 1.9), и тем самым проясняется ее природа.

2. Ряды распределения. Ряд распределения представляет или величины $X_{(j)}$, принятые для обозначения разрядов, и частоты наблюдаемых значений, попавших в эти разряды, или же просто наблюдаемые значения $X_{(j)}$ случайной величины X , выписанные вместе с соответствующими частотами:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} X_{(1)}, & X_{(2)}, & \dots, & X_{(j)}, & \dots, & X_{(k)} \\ n_1, & n_2, & \dots, & n_j, & \dots, & n_k \end{array} \right\}. \quad (1.4)$$

В первой строке этого ряда указываются или значения разрядов, или наблюдаемые значения случайной величины, а во второй — соответствующие этим значениям частоты. Таким образом, ясно, как распределяется общее число наблюдений, или по разрядам, или по возможным значениям случайной величины X .

Примерами рядов распределения могут служить ряд распределения предела прочности σ_B при разрыве осевой стали (табл. 1.10) и ряд распределения ударной вязкости a_k осевой стали (табл. 1.11).

Совокупность значений одной случайной величины, выражаемая рядом распределения, называется *одномерной* совокупностью.

В то время как значения $X_{(j)}$ могут быть как положительными, так и отрицательными, частоты n_j всегда числа положительные; они показывают, сколько раз встречалось при наблюдениях то или иное значение случайной величины

$$n_j > 0. \quad (1.5)$$

Сумма всех частот ряда распределения называется *объемом ряда* и обозначается через n .

Для краткости сумму членов какого-либо ряда

$$a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_k$$

Таблица 1.10

Ряд распределения
предела прочности
при разрыве осевой стали

| $\sigma_B, \text{кг/см}^2$ | n_j |
|----------------------------|-------|
| 48 | 3 |
| 50 | 17 |
| 52 | 75 |
| 54 | 194 |
| 56 | 228 |
| 58 | 155 |
| 60 | 91 |
| 62 | 23 |
| 64 | 5 |
| Σ | 791 |

Таблица 1.11

Ряд распределения
ударной вязкости
осевой стали

| $a_k, \text{кгм/см}^2$ | n_j |
|------------------------|-------|
| 4,5 | 2 |
| 5,5 | 10 |
| 6,5 | 92 |
| 7,5 | 169 |
| 8,5 | 214 |
| 9,5 | 132 |
| 10,5 | 103 |
| 11,5 | 53 |
| 12,5 | 16 |
| Σ | 791 |

записывают в виде

$$\sum_{j=1}^k a_j, \quad (1.6)$$

где под знаком суммы выписывается общий член a_j рассматриваемого ряда, а внизу и сверху знака суммы указывается низшее и высшее значение подписного значка j . Для указания того, что j принимает разные значения от 1 до k , т. е. $j = 1, 2, \dots, k$, будем писать сокращенно

$$j = \overline{1, k}. \quad (1.7)$$

Пользуясь обозначением (1.6), мы можем объем ряда распределения представить в виде

$$n = \sum_{j=1}^k n_j. \quad (1.8)$$

Для целей исследования строка значений ряда распределения заменяется строкой отклонений, а строка частот — строкой частостей.

Отклонением $x_{(j)}$ называется разность между каждым значением $X_{(j)}$ разряда и некоторым начальным значением $X_{(a)}$, деленная на величину разряда c :

$$x_{(j)} = \frac{X_{(j)} - X_{(a)}}{c}. \quad (1.9)$$

При этом для удобства вычислений начальное значение $X_{(a)}$ берется возможно ближе к середине ряда распределения. Для

определения начального значения надо сложить частоты, начиная с первой, до того разряда, когда полученная сумма будет превышать половину итога частот. Значение, стоящее против последней частоты, входящей в эту сумму, и будет начальным значением. В рядах, близких к симметрическому, начальное значение расположено против наибольшей частоты.

Отклонения $x_{(j)}$, вычисленные согласно указанному выше определению, представляют однозначные целые числа, что в значительной степени упрощает вычисления. Например, для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.10) начальное значение равно 56 кг/мм^2 , величина разряда равна 2 кг/мм^2 , а отклонения будут равны

$$\frac{48-56}{2} = -4, \quad \frac{50-56}{2} = -3, \quad \dots, \quad \frac{62-56}{2} = +3, \quad \frac{64-56}{2} = +4.$$

Отношение частоты n_j , соответствующей значению $X_{(j)}$, к сумме всех частот n называется *частотью* этого значения и обозначается через p'_j :

$$p'_j = \frac{n_j}{n}. \quad (1.10)$$

Принимая во внимание (1.8), имеем

$$\sum_{j=1}^k p'_j = 1. \quad (1.11)$$

Найдя отклонения и частоты, мы можем представить ряд распределения в преобразованном виде:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_{(1)}, & x_{(2)}, & \dots, & x_{(j)}, & \dots, & x_{(k)} \\ p'_1, & p'_2, & \dots, & p'_j, & \dots, & p'_k \end{array} \right\}. \quad (1.12)$$

При этом, для краткости письма и большей наглядности, вместо правильных положительных дробей, какими являются частоты, употребляются обычно промилле (см. § 1, п. 3).

Например, ряд распределения предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.10) может быть представлен в следующем виде (табл. 1.12).

Таблица 1.12

Преобразованный ряд распределения предела прочности при разрыве осевой стали (в ‰)

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 | +3 | +4 | Σ |
|----------------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|----|----|----------|
| $p', \text{‰}$ | 4 | 22 | 95 | 245 | 288 | 196 | 115 | 29 | 7 | 1000 |

Представление рядов распределения в преобразованном виде является необходимым условием при сравнении этих рядов между собой.

Ряд распределения (1.4) выражает общее и наиболее характерное свойство явлений, носящее название *изменчивости* или *вариации* явления и состоящее в том, что различные значения случайной величины наблюдаются с определенными частотами. Поэтому ряды распределения называются также *вариационными рядами*.

Кроме рядов распределения, большое значение при исследовании случайных величин имеют *ряды из накопленных частот*. На-

Таблица 1.13

Схема составления ряда из накопленных частот (на основании ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали)

| σ _в , кг/мм ² (верхняя граница разряда) | Частоты | Накопленные частоты |
|--|---------|---------------------|
| 49 | 3 | 3 |
| 51 | 17 | 20 |
| 53 | 75 | 95 |
| 55 | 194 | 289 |
| 57 | 228 | 517 |
| 59 | 155 | 672 |
| 61 | 91 | 763 |
| 63 | 23 | 786 |
| 65 | 5 | 791 |
| Σ | 791 | — |

копленной частотой N_j некоторого разряда называется сумма частот, начиная с частоты первого разряда и кончая частотой данного разряда:

$$N_j = n_1 + n_2 + \dots + n_j. \quad (1.13)$$

В то время как частота n_j отвечает отклонению $x_{(j)}$, являющемуся представителем разряда, т. е. находящемуся в середине разряда, — накопленная частота N_j соответствует верхней границе разряда, т. е. $x_{(j)} + 0,5$.

Отношение накопленной частоты к сумме всех частот называется *накопленной частотой*, или *наблюденной функцией распределения*:

$$F_n(x_{(j)}) = \frac{N_j}{n}. \quad (1.14)$$

Составим, например, ряд из накопленных частот на основании ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.13).

Для получения какой-либо накопленной частоты надо к частоте ряда распределения, стоящей слева от образуемой, прибавить накопленную частоту, стоящую непосредственно над образуемой. Проверкой составления ряда из накопленных частот служит то, что последняя накопленная частота должна быть равной объему ряда распределения.

Исследование рядов распределения в значительной степени облегчается благодаря применению *графического метода*. При изображении рядов распределения на горизонтальной оси откладываются значения разрядов или наблюдаемые значения случайной величины $X_{(j)}$, а на вертикальной оси — частоты n_j . В качестве руководства при выборе соотношения между масштабами горизонтальной и вертикальной оси принимается *правило золотого сече-*

ния. Согласно этому правилу, весь чертеж должен быть расположен внутри прямоугольника, в котором высота h должна относиться к основанию a приблизительно как 5 к 8:

$$h \approx \frac{5}{8} a. \quad (1.15)$$

Существует несколько способов изображения рядов распределения. Среди этих способов наиболее ценными при исследовании являются способ точек, способ прямоугольников и способ прямых.

При помощи *способа точек* изображаются данные наблюдения. Построим, например, график для изображения результатов испытаний ударной вязкости малоуглеродистой стали (табл. 1.1). Принимая во внимание, что наименьшее из наблюдаемых значений

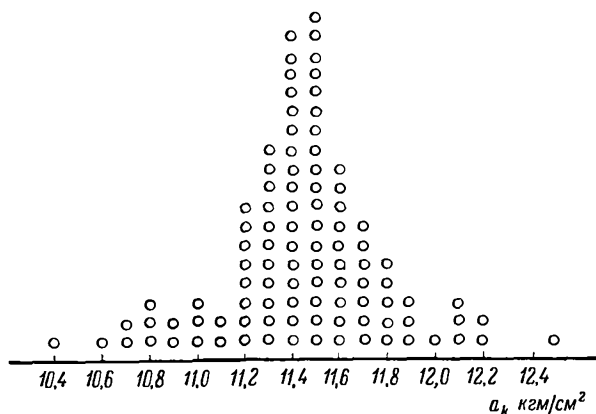


Рис. 1.3. Распределение ударной вязкости малоуглеродистой стали (точечная диаграмма).

ударной вязкости оказалось равным $10,4 \text{ кгм/см}^2$, а наибольшее $12,5 \text{ кгм/см}^2$ и что значения ударной вязкости получены с точностью до $0,1 \text{ кгм/см}^2$, мы имеем 22 разных значения. Поэтому, проведя горизонтальную прямую в основании чертежа, разобьем ее на 22 равных отрезка, по числу встречавшихся значений (рис. 1.3). Внизу этой прямой в середине каждого отрезка выпишем в возрастающем порядке все наблюдавшиеся значения: $10,4, 10,5, \dots, 12,5$. Затем, просматривая данные табл. 1.1 последовательно от первого номера до последнего, будем для каждого значения ставить над горизонтальной прямой точку (кружок) против середины соответствующего отрезка. Каждая следующая для данного значения точка помещается над предыдущей на определенном расстоянии. Полученный график называется *точечной диаграммой для одной случайной величины*.

Если значения случайной величины сведены в разряды, то применяется способ прямоугольников или способ прямых.

При выполнении чертежа по *способу прямоугольников* горизонтальная ось разбивается на равные отрезки, соответствующие разрядам; на этих отрезках, как на основаниях, строятся прямоугольники с высотой, пропорциональной частоте данного разряда. Полученная фигура называется *ступенчатым многоугольником*. В качестве примера построим ступенчатый многоугольник для изображения ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.10 и рис. 1.4).

Для изображения ряда распределения по *способу прямых* в середине каждого отрезка на горизонтальной оси восстанавливают

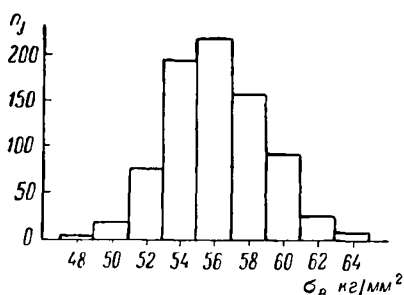


Рис. 1.4. Распределение предела прочности при разрыве осевой стали (ступенчатый многоугольник).

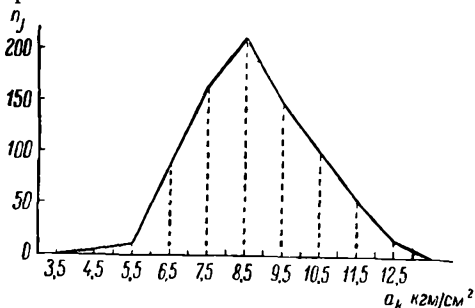


Рис. 1.5. Распределение ударной вязкости осевой стали (многоугольник частот).

перпендикуляры, длина которых пропорциональна частоте данного разряда. Вершины этих перпендикуляров соединяются в последовательном порядке отрезками прямых, а вершины крайних — левого и правого — перпендикуляров соединяются с точками, находящимися на горизонтальной оси в середине соседних отрезков. Полученная в результате такого построения замкнутая ломаная линия называется *многоугольником частот*.

Построим, например, многоугольник частот для ряда распределения ударной вязкости осевой стали (табл. 1.11). Изображение этого ряда дано на рис. 1.5. Заметим при этом, что самые перпендикуляры, изображенные на этом чертеже пунктиром, обычно не проводятся, а отмечаются только их вершины, которые затем соединяются отрезками прямых.

Ступенчатые многоугольники и многоугольники частот носят общее название *многоугольников распределения*.

Изображением ряда из накопленных частот является *кривая сумм*. Построим, например, кривую сумм по способу прямоугольников для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.13). Порядок такого построения показан на рис. 1.6. Внизу рисунка представлен ступенчатый многоугольник, изображающий данный ряд распределения. Вверху же показан способ построения кривой сумм, а именно, используются прямо-

угольники этого ступенчатого многоугольника. Так же как и в ступенчатом многоугольнике, площадь каждого прямоугольника верхней части рисунка пропорциональна соответствующей частоте изображаемого ряда. Но так как при этом происходило накопление частот, то основание каждого прямоугольника верхней части

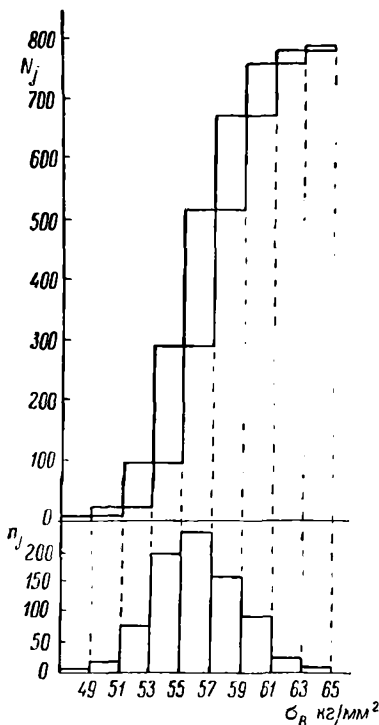


Рис. 1.6. Построение кривой сумм (для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали).

рисунка покоится не на горизонтальной оси, как в ступенчатом многоугольнике, а находится на высоте, соответствующей накопленной частоте предыдущего разряда. Соединяя последовательно середины верхних сторон каждого из этих прямоугольников отрезками прямой линии, получим кривую сумм.

Наряду с рассмотренными способами, при которых изображаются частоты ряда распределения, применяется также способ, при котором изображаются наблюдаемые значения случайной величины.

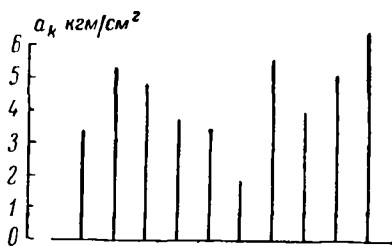


Рис. 1.7. Значения ударной вязкости осевой стали.

Возьмем, например, следующие значения ударной вязкости осевой стали, в кгм/см^2 :

3,4, 5,3, 4,8, 3,8, 3,5, 1,9, 5,6, 5,5, 5,2, 6,4.

Проведем горизонтальную прямую и на ней будем изображать последовательно значения рассматриваемой величины при помощи отрезков вертикальных прямых, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Длина этих отрезков должна быть пропорциональной изображаемым значениям и откладывается по масштабу, указываемому с левой стороны чертежа (рис. 1.7).

Применяя этот способ, построим график для изображения значений величины $e^{2/3} \cdot 10^8$, полученных при определении величины заряда электрона e (табл. 1.14 и рис. 1.8) *).

Для целей исследования значения случайной величины, полученные при наблюдении, располагаются в возрастающем порядке,

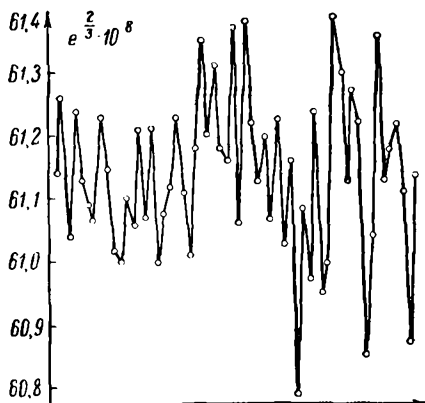


Рис. 1.8. Значения, полученные при определении величины заряда электрона.

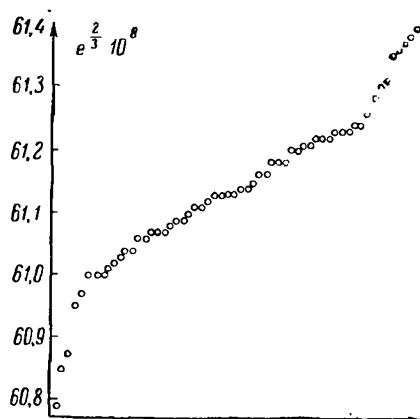


Рис. 1.9. Огиба — значения, полученные при определении величины заряда электрона.

после чего изображаются описанным выше способом. Соединяя вершины вертикальных отрезков между собой, получим некоторую ломаную, называемую *огивой*. Огиба, изображающая значения, полученные при определении величины заряда электрона, представлена на рис. 1.9.

Таблица 1.14

Значения величины $e^{2/3} \cdot 10^8$

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 61,14 | 61,26 | 61,04 | 61,24 | 61,13 | 61,09 |
| 61,07 | 61,23 | 61,15 | 61,02 | 61,00 | 61,10 |
| 61,06 | 61,21 | 61,07 | 61,21 | 61,00 | 61,08 |
| 61,12 | 61,23 | 61,11 | 61,01 | 61,18 | 61,35 |
| 61,20 | 61,31 | 61,18 | 61,16 | 61,37 | 61,06 |
| 61,38 | 61,22 | 61,13 | 61,20 | 61,07 | 61,23 |
| 61,03 | 61,16 | 60,79 | 61,09 | 60,97 | 61,24 |
| 60,95 | 61,00 | 61,39 | 61,30 | 61,13 | 61,28 |
| 61,22 | 60,85 | 61,04 | 61,36 | 61,13 | 61,18 |
| 61,22 | 61,11 | 60,87 | 61,14 | | |

*) Милликэн, 1947, стр. 109—110 (VII, I).

3. Таблицы распределения. Рассмотрим две случайные величины X_1 и X_2 . Примем для обозначения разрядов одной величины значения $X_{1(j)}$ и другой величины — значения $X_{2(j)}$ (или же $X_{1(j)}$ и $X_{2(j)}$ — просто различные наблюдаемые значения соответственно X_1 и X_2). Тогда *таблицей распределения* называется система пар $\{X_{1(j)}, X_{2(j)}\}$ вместе с частотами тех пар совместно наблюдаемых значений величин X_1 и X_2 , у которых наблюдаемое значение X_1 попало в разряд $X_{1(j)}$, а наблюдаемое значение X_2 — в разряд $X_{2(j)}$ (или же наблюдаемое значение X_1 равно $X_{1(j)}$, а наблюдаемое значение X_2 равно $X_{2(j)}$).

Пару $(X_{1(j)}, X_{2(j)})$ можно рассматривать как обозначение некоторого разряда для двух случайных величин X_1 и X_2 .

Таблица распределения имеет вид, показанный в табл. 1.15. Во внутренних клетках этой таблицы помещены частоты попадания пар совместно наблюдаемых значений двух случайных величин в разряды, определяемые заголовками таблицы. Например, частота попадания такой пары в разряд $(X_{1(j)}, X_{2(k)})$ равна $n_{j|k}$. В правом — итоговом — столбце указаны суммы частот по строкам таблицы $n_{j|}$, а в нижней — итоговой — строке указаны суммы частот по столбцам таблицы $n_{|k}$.

Примерами таблиц распределения могут служить: 1) таблица распределения объемного веса γ (г/см³) при влажности 10% и

Таблица 1.15

Таблица распределения

| $X_1 \backslash X_2$ | $X_{2(1)}$ | $X_{2(2)}$ | ... | $X_{2(j)}$ | ... | $X_{2(k)}$ | \sum_{k_2} |
|----------------------|------------|------------|-----|------------|-----|------------|--------------|
| $X_{1(1)}$ | $n_{1 1}$ | $n_{1 2}$ | ... | $n_{1 j}$ | ... | $n_{1 k}$ | $n_{1 }$ |
| $X_{1(2)}$ | $n_{2 1}$ | $n_{2 2}$ | ... | $n_{2 j}$ | ... | $n_{2 k}$ | $n_{2 }$ |
| ... | ... | ... | | ... | | ... | ... |
| $X_{1(j)}$ | $n_{j 1}$ | $n_{j 2}$ | ... | $n_{j j}$ | ... | $n_{j k}$ | $n_{j }$ |
| ... | ... | ... | | ... | | ... | ... |
| $X_{1(k)}$ | $n_{k 1}$ | $n_{k 2}$ | ... | $n_{k j}$ | ... | $n_{k k}$ | $n_{k }$ |
| \sum_{j_1} | $n_{ 1}$ | $n_{ 2}$ | ... | $n_{ j}$ | ... | $n_{ k}$ | n |

модуля упругости E (кг/см^2) при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели (табл. 1.16; составлена на основании данных табл. 1.2); 2) таблица распределения ударной вязкости a_k (кгм/см^2) и предела прочности при разрыве σ_B (кг/мм^2) осевой стали (образцы прямоугольного сечения с надрезом в виде треугольной

Таблица 1.16

Таблица распределения объемного веса γ (г/см^3) при влажности 10% и модуля упругости E (кг/см^2) при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели

| $\gamma \cdot 10^3 \backslash E \cdot 10^{-3}$ | 60 | 74 | 88 | 102 | 116 | 130 | 144 | 158 | 172 | 186 | 200 | Σ |
|--|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| 325 | 1 | 3 | 2 | | | | | | | | | 6 |
| 355 | 1 | 1 | 9 | 6 | 1 | | | | | | | 18 |
| 385 | | 1 | 8 | 20 | 8 | | | | | | | 37 |
| 415 | | | 1 | 11 | 42 | 14 | | | | | | 68 |
| 445 | | | | 7 | 26 | 46 | 11 | | | | | 90 |
| 475 | | | | | 9 | 31 | 36 | 3 | | | | 79 |
| 505 | | | | | 1 | 9 | 23 | 19 | 2 | | | 54 |
| 535 | | | | | | | 8 | 15 | 6 | 2 | | 31 |
| 565 | | | | | | | 1 | 4 | 6 | 1 | | 12 |
| 595 | | | | | | | | 1 | 2 | 1 | | 4 |
| 625 | | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| Σ | 2 | 5 | 20 | 44 | 84 | 100 | 79 | 42 | 16 | 4 | 1 | 400 |

выемки) (табл. 1.17) *); заметим, что ряды табл. 1.10 и 1.11 представляют итоговые распределения табл. 1.17; 3) таблица распределения крепости X_1 (г) и удлинения X_2 (%) хлопчатобумажной пряжи (по данным Е. А. Санкова) ($n = 2500$), в ‰ (табл. 1.18); 4) таблица распределения предела прочности при сжатии X_1 (кг/см²) и предела прочности при растяжении X_2 (кг/см²) портланд-цементного раствора 28-дневного возраста (1938 г.) (табл. 1.19).

Совокупность значений двух случайных величин, выражаемая таблицей распределения, называется *двумерной совокупностью*.

Таблица 1.1

Таблица распределения ударной вязкости a_k (кгм/см²) и предела прочности при разрыве σ_B (кг/мм²) осевой стали

| $\sigma_B \backslash a_k$ | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | Σ |
|---------------------------|----|----|----|-----|-----|-----|----|----|----|----------|
| 4,5 | | | | | | | | 1 | 1 | 2 |
| 5,5 | | | | | 2 | 3 | 3 | 2 | — | 10 |
| 6,5 | | | 5 | 7 | 21 | 27 | 21 | 10 | 1 | 92 |
| 7,5 | 1 | 4 | 11 | 28 | 48 | 43 | 29 | 5 | — | 169 |
| 8,5 | — | 4 | 22 | 60 | 63 | 38 | 23 | 1 | 3 | 214 |
| 9,5 | — | 5 | 15 | 32 | 47 | 26 | 6 | 1 | | 132 |
| 10,5 | 1 | 2 | 14 | 37 | 28 | 12 | 6 | 3 | | 103 |
| 11,5 | 1 | 2 | 4 | 22 | 16 | 6 | 2 | | | 53 |
| 12,5 | | | 4 | 8 | 3 | — | 1 | | | 16 |
| Σ | 3 | 17 | 75 | 194 | 228 | 155 | 91 | 23 | 5 | 791 |

*) Н. П. Шапов и А. И. Кочетов, 1938, стр. 104 (VII, 106).

Таблица 1.18

Таблица распределения крепости X_1 (г) и удлинения X_2 (%)
хлопчатобумажной пряжи

| $X_1 \backslash X_2$ | 5 | 5,5 | 6 | 6,5 | 7 | 7,5 | 8 | 8,5 | 9 | 9,5 | 10 | 10,5 | Σ |
|----------------------|---|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|------|----------|
| 125 | | 1 | | | | | | | | | | | 1 |
| 150 | 1 | 2 | 2 | | | | | | | | | | 5 |
| 175 | 1 | 3 | 6 | 7 | 5 | 1 | | | | | | | 23 |
| 200 | 1 | 2 | 9 | 16 | 19 | 8 | 3 | 1 | | | | | 59 |
| 225 | | 1 | 5 | 21 | 34 | 42 | 24 | 7 | | | | | 134 |
| 250 | | | 2 | 12 | 29 | 58 | 66 | 32 | 4 | | | | 203 |
| 275 | | | | 4 | 12 | 44 | 73 | 56 | 19 | 4 | | | 212 |
| 300 | | | | | 5 | 16 | 42 | 60 | 43 | 11 | 2 | | 179 |
| 325 | | | | | 1 | 4 | 17 | 37 | 34 | 14 | 6 | 1 | 114 |
| 350 | | | | | | 1 | 3 | 10 | 14 | 17 | 5 | 1 | 51 |
| 375 | | | | | | | | 2 | 4 | 5 | 3 | 1 | 15 |
| 400 | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | 3 |
| 425 | | | | | | | | | | 1 | | | 1 |
| Σ | 3 | 9 | 24 | 60 | 105 | 174 | 228 | 205 | 119 | 53 | 17 | 3 | 1000 |

Таблица 1.19

Таблица распределения предела прочности при сжатии X_1 (кг/см^2) и предела прочности при растяжении X_2 (кг/см^2) портланд-цементного раствора 28-дневного возраста (1938 г.)

| $X_1 \backslash X_2$ | 16,5 | 17,5 | 18,5 | 19,5 | 20,5 | 21,5 | 22,5 | 23,5 | 24,5 | 25,5 | 26,5 | 27,5 | Σ |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| 230 | | | 2 | 2 | 1 | | | | | | | | 5 |
| 250 | 1 | 1 | 5 | 8 | 2 | 3 | 1 | | | | | | 21 |
| 270 | 1 | 3 | 18 | 13 | 15 | 4 | 4 | 1 | | | | | 59 |
| 290 | 2 | 15 | 14 | 28 | 31 | 19 | 17 | 6 | 2 | 1 | | | 135 |
| 310 | | 8 | 12 | 32 | 56 | 55 | 32 | 10 | 11 | 1 | 1 | | 218 |
| 330 | | 3 | 18 | 27 | 39 | 59 | 39 | 22 | 13 | 7 | — | | 227 |
| 350 | | | 5 | 22 | 36 | 37 | 32 | 29 | 17 | 7 | 1 | | 186 |
| 370 | | | | 6 | 10 | 17 | 22 | 17 | 8 | 4 | 3 | 1 | 88 |
| 390 | | | | | 3 | 5 | 7 | 10 | 6 | 3 | 2 | | 36 |
| 410 | | | | | 1 | 2 | 2 | 5 | 3 | 2 | 1 | | 16 |
| 430 | | | | | | 1 | — | 3 | 2 | 1 | | | 7 |
| 450 | | | | | | | | 1 | — | 1 | | | 2 |
| Σ | 4 | 30 | 74 | 138 | 149 | 202 | 156 | 104 | 62 | 27 | 8 | 1 | 1000 |

Таблица распределения выражает связь между случайными величинами X_1 и X_2 . *Статистическая связь* показывает, что если одна из величин X_1 принимает некоторое определенное значение или попадает в определенный разряд, то в зависимости от этого другая величина X_2 принимает некоторый ряд значений с определенными частотами.

Особенно важным является частный случай статистической связи, когда с изменением значений одной случайной величины сопоставляется изменение какой-либо численной характеристики

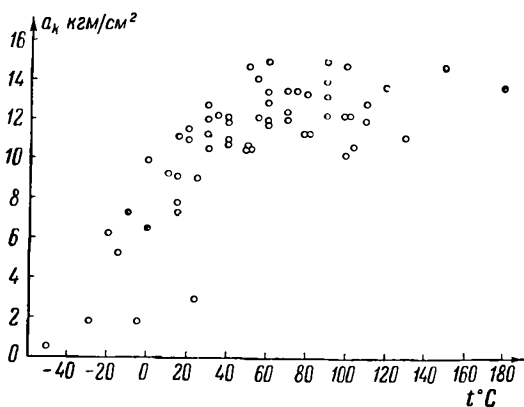


Рис. 1.10. Зависимость ударной вязкости углеродистой стали с 0,40% С от температуры.

соответствующего ряда распределения наблюдаемых значений другой случайной величины. Такая связь называется *корреляцией*. Поэтому таблицы распределения называются также *корреляционными таблицами*.

Графическое изображение статистической связи дается или в виде *точечной диаграммы для двух случайных величин*, если изображаются данные, полученные непосредственно при наблюдении, или же в виде *призограммы*, если изображается таблица распределения.

Примером точечной диаграммы для двух случайных величин может служить рис. 1.10, на котором изображена зависимость ударной вязкости углеродистой стали с 0,40% С от температуры *).

При построении призограммы берется сетка из пересекающихся под прямым углом линий, в точном соответствии с данной таблицей распределения. На каждом квадратике этой сетки

*) Н. Н. Давиденков, 1936, стр. 233 (VII, 106).

строится призма с объемом, пропорциональным соответствующей разрядной частоте. В результате такого построения получается геометрическая модель, называемая призмোগраммой. Например, призмোগрамма для таблицы распределения объемного веса γ при влажности 10% и модуля упругости E при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели (табл. 1.16) представлена на рис. 1.11;

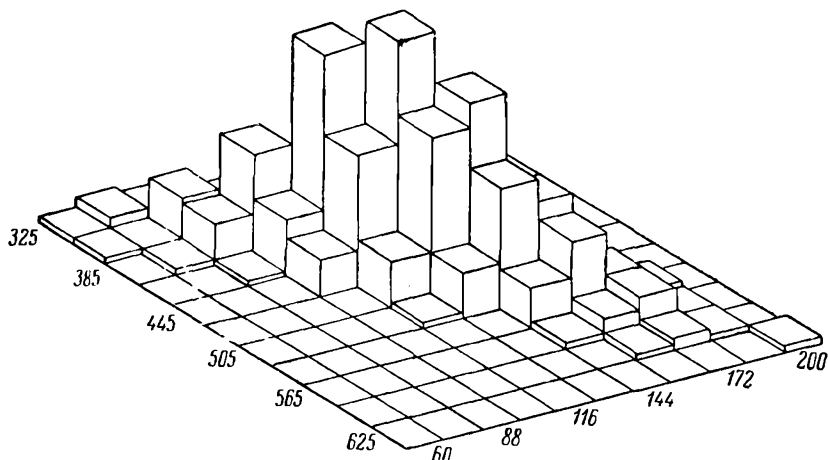


Рис. 1.11. Призмোগрамма — корреляция между объемным весом при влажности 10% и модулем упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели.

призмোগрамма для таблицы распределения крепости и удлинения хлопчатобумажной пряжи (табл. 1.18) имеет вид, представленный на рис. 1.12.

4. Кривые и поверхности распределения. Ряды и таблицы распределения были определены соответственно на стр. 27 и 35 только для частичных совокупностей, т. е. для наблюдаемых значений случайных величин. Если бы была известна общая совокупность, то можно было бы и для нее совершенно аналогично определить и ряды и таблицы распределения. Их естественно называть рядами и таблицами распределения самих случайных величин.

Такой ряд распределения случайной величины, составленный на основе одномерной общей совокупности, можно изобразить графически, строя, например, многоугольник частот γ_c с помощью действий, подобных описанным на стр. 32. Это будет многоугольник частот случайной величины.

Объем общей совокупности предполагается хотя и большим, но все же конечным. Но иногда этот объем считают бесконечным. Бесконечная общая совокупность есть математическая абстракция,

и ее можно рассматривать как предельный случай конечной совокупности, когда число всех ее предметов неограниченно возрастает. При таком предельном переходе, если еще допустить, что

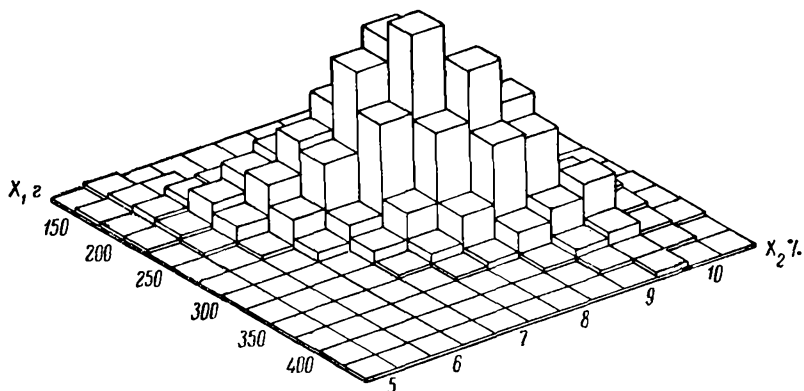


Рис. 1.12. Призмограмма — корреляция между крепостью X_1 и удлинением X_2 хлопчатобумажной пряжи.

вместе с увеличением объема общей совокупности величина разрядов неограниченно убывает, могут возникнуть различные ситуации. Остановимся на одной, особенно важной для статистического исчисления.

Может случиться, что при указанных условиях многоугольник частот случайной величины будет стремиться к некоторой плавной кривой и при достаточно большом, но конечном объеме общей совокупности и достаточно малой величине разрядов многоугольник частот случайной величины будет практически совпадать с этой кривой. Далее мы всегда считаем объем общей совокупности именно таким, т. е. практически неограниченным, так что нашу плавную кривую мы можем рассматривать как геометрическое изображение случайной величины и называть ее *кривой распределения случайной величины*.

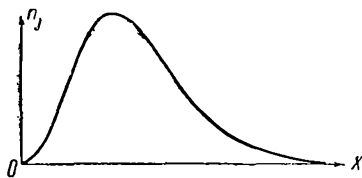


Рис. 1.13. Кривая распределения.

Подобная кривая, например, начинаясь от некоторой точки на горизонтальной оси, поднимается постепенно над этой осью до некоторой наивысшей точки и затем снова опускается до горизонтальной оси в крайней точке справа. Скорость возрастания и убывания кривой распределения различна и находится в полной зависимости от природы изучаемой величины (рис. 1.13).

Пока мы имеем дело с одной случайной величиной, т. е. с *одно-родной* совокупностью ее значений, геометрическим изображением этой совокупности почти всегда является указанная одновершинная кривая распределения. Практически можно считать, что однородность всегда сопровождается одновершинностью кривой распределения, хотя обратное заключение неверно.

Кривая распределения представляет, конечно, некоторую модель изучаемой совокупности. Но исследователь имеет дело лишь с частичной совокупностью и его основная задача — определить

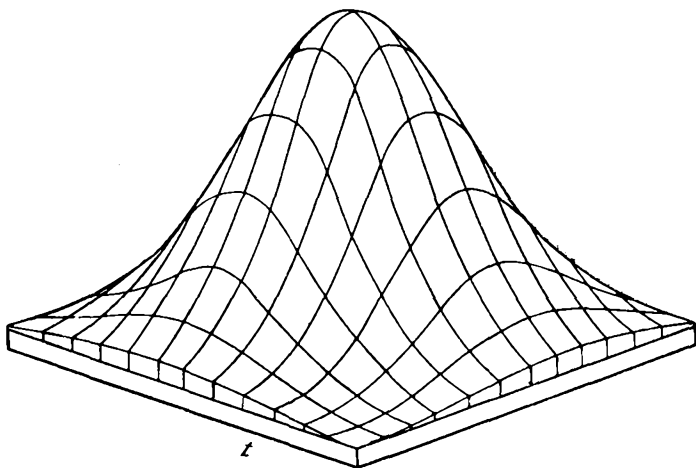


Рис. 1.14. Нормальная поверхность распределения.

кривую распределения случайной величины или некоторые характеристики этой кривой на основе сравнительно небольшого числа наблюдений.

В каждом отдельном случае мы можем данный многоугольник частот, построенный на основе частичной совокупности, рассматривать как некоторое приближение к соответствующей кривой распределения случайной величины, а определенные характеристики этого многоугольника (иначе, характеристики ряда распределения) — как приближения к аналогичным характеристикам кривой распределения. Причем степень приближения будет в общем возрастать по мере увеличения объема частичной совокупности и уменьшения величины разрядов; те или иные случайные отклонения всегда будут иметь место, но они все меньше будут затухивать предельную картину.

Все сказанное здесь можно распространить на случай двух случайных величин, т. е. на случай таблицы распределения. Таблица распределения, составленная на основе общей двумерной совокупности, в результате предельного перехода приведет нас к некоторой

гладкой поверхности распределения двух случайных величин. Конечно, призмogramму можно также рассматривать как приближение к такой поверхности при большом объеме частичной совокупности и малой величине разрядов.

На рис. 1.14 изображен участок так называемой нормальной поверхности распределения.

§ 3. Свойства рядов и таблиц распределения

1. Свойства распределения. Ряды и таблицы распределения лежат в основе исследования случайных величин.

Таблица 1.20

Ряды распределения

| Значения | Частоты рядов распределения | | | | | | |
|------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | I | II | III | IV | V | VI | VII |
| 1 | | | | | | 1 | |
| 2 | | | | | | 2 | |
| 3 | 1 | | | | 3 | 6 | |
| 4 | 2 | | | | 9 | 13 | |
| 5 | 8 | | | | 16 | 14 | |
| 6 | 27 | | | 11 | 31 | 5 | 31 |
| 7 | 65 | | 4 | 65 | 53 | 6 | 81 |
| 8 | 121 | 1 | 55 | 157 | 83 | 81 | 140 |
| 9 | 178 | 2 | 244 | 215 | 156 | 221 | 165 |
| 10 | 196 | 8 | 394 | 200 | 200 | 302 | 162 |
| 11 | 178 | 27 | 244 | 156 | 215 | 221 | 165 |
| 12 | 121 | 65 | 55 | 83 | 157 | 81 | 140 |
| 13 | 65 | 121 | 4 | 53 | 65 | 6 | 81 |
| 14 | 27 | 178 | | 31 | 11 | 5 | 31 |
| 15 | 8 | 196 | | 16 | | 14 | 2 |
| 16 | 2 | 178 | | 9 | | 13 | |
| 17 | 1 | 121 | | 3 | | 6 | |
| 18 | | 65 | | 1 | | 2 | |
| 19 | | 27 | | | | 1 | |
| 20 | | 8 | | | | | |
| 21 | | 2 | | | | | |
| 22 | | 1 | | | | | |
| Σ | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| \bar{X} | 10 | 15 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| σ | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| α | 0 | 0 | 0 | +0,72 | -0,72 | 0 | 0 |
| ϵ | +0,04 | +0,04 | -0,01 | +0,60 | +0,60 | +4,25 | -0,73 |

Исследование случайных величин имеет целью, прежде всего, выяснить основные свойства распределения этих величин и связи между ними. Говоря здесь о распределениях самих случайных величин, мы будем пока понимать под этим кривую распределения в случае одной случайной величины и поверхность распределения в случае двух случайных величин.

Численные характеристики свойств распределения и связи, вычисленные на основании частичных совокупностей значений случайных величин, называются *статистиками* в отличие от *параметров*, характеризующих распределение самих величин и связь между ними.

Статистики дают возможность при помощи немногих показателей, вычисленных на основе наблюдений, выразить наиболее важные особенности распределения изучаемых величин и связи между ними.

Среди свойств распределения одной случайной величины наиболее важными являются: 1) *положение* кривой распределения случайной величины, определяемое тем значением ее, относительно которого в каком-то смысле располагаются все другие значения этой величины; 2) степень *рассеяния* значений случайной величины относительно указанного значения; 3) степень *косости* кривой распределения и 4) степень *крутости* кривой распределения.

Статистическими аналогами этих свойств служат соответствующие свойства ряда распределения наблюдаемых значений случайной величины: 1) положение ряда распределения, 2) степень рассеяния значений ряда распределения, 3) степень косости многоугольника частот и 4) степень крутости многоугольника частот.

Основными свойствами связи между случайными величинами являются форма, направление и степень связи. Эти свойства также обладают статистическими аналогами.

Представление об основных свойствах рядов распределения мы можем составить, сравнивая между собой эти ряды в отношении статистических аналогов изучаемых свойств. Для этого рассмотрим ряды распределения, данные в табл. 1.20. Чтобы получить возможность сравнивать их между собой, эти ряды приведены к одинаковому основанию — частоты многоугольника частот. Объем каждого ряда равен $n = 1000$.

Для выяснения первого из указанных свойств — *положения* ряда — возьмем ряды I и II табл. 1.20.

Представив эти ряды на чертеже (рис. 1.15), мы видим, что полученные многоугольники частот имеют одинаковую площадь, изображающую один и тот же объем ряда, равный $n = 1000$, и, кроме того, имеют одинаковый вид. Существенное несходство между этими многоугольниками частот состоит только в том, что они занимают различное положение на горизонтальной оси: многоугольник частот, изображающий ряд II, сдвинут вправо, т. е.

в сторону высших значений, по сравнению с многоугольником частот, изображающим ряд I.

Основной статистикой, характеризующей положения ряда распределения, является среднее из разрядных значений случайной величины. Ввиду исключительной важности среднего значения при

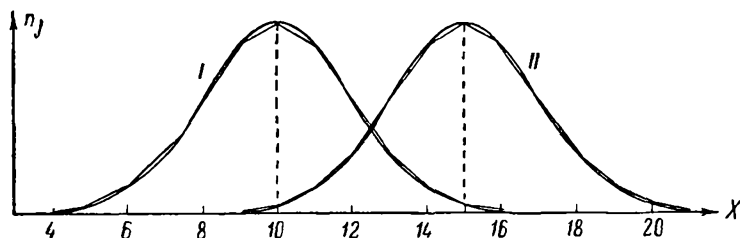


Рис. 1.15. Положение ряда распределения.

исследовании случайных величин, остановимся на выяснении этого понятия.

Понятие среднего значения, как и ряд других основных поня-

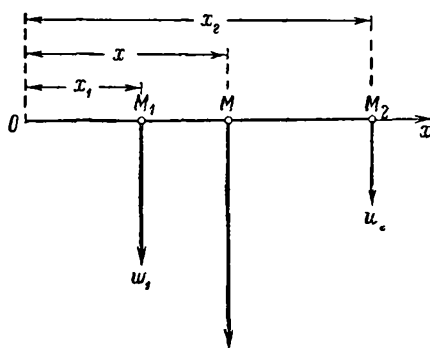


Рис. 1.16. Центр тяжести.

тий статистического исчисления, взято из механики, а именно, определение среднего значения имеет полную аналогию с нахождением абсциссы центра тяжести системы материальных точек.

Положим, что на прямой ОХ на расстояниях x_1 и x_2 от начала расположены две материальные точки M_1 и M_2 , веса которых равны w_1 и w_2 (рис. 1.16). Центр тяжести этих точек находится в точке M на прямой, соединяющей M_1 и M_2 , и делит расстояние между

ними на части, обратно пропорциональные весам этих точек. Поэтому должно быть

$$\frac{\overline{M_1 M}}{\overline{M M_2}} = \frac{w_2}{w_1}. \quad (1.16)$$

Обозначим расстояние точки M от начала, т. е. абсциссу точки M , через x . Тогда будем иметь

$$\overline{M_1 M} = x - x_1, \quad \overline{M M_2} = x_2 - x.$$

Подставляя в (1.16), получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Решая это уравнение, находим

$$x = \frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}. \quad (1.17)$$

Возьмем теперь ряд распределения вида

$$\left\{ \begin{array}{cc} X_{(1)}, & X_{(2)} \\ n_1, & n_2, \end{array} \right\},$$

т. е. в результате наблюдений случайной величины X получилось только два различных значения с соответствующими частотами.

Заменяя в выражении (1.17) числа x_1 и x_2 значениями $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$, а веса ω_1 и ω_2 — частотами n_1 и n_2 , мы получим среднее значение из наблюдаемых значений случайной величины X . Имеем

$$\bar{X}' = \frac{X_{(1)} n_1 + X_{(2)} n_2}{n_1 + n_2}. \quad (1.18)$$

В частности, если каждое из значений $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$ встречалось в одинаковом числе случаев, например, по одному разу, то

$$\bar{X}' = \frac{X_{(1)} + X_{(2)}}{2}, \quad (1.19)$$

т. е. среднее из двух значений равно полусумме этих значений.

Полученное определение среднего значения (1.18) можно распространить на случай трех, четырех и вообще какого угодно числа значений.

Положим, что наблюдалось всего три различных значения $X_{(1)}$, $X_{(2)}$, $X_{(3)}$, частоты которых соответственно равны n_1 , n_2 , n_3 . Этот случай можно свести к случаю двух значений. Действительно, на основании (1.18) имеем

$$X_{(1)} n_1 + X_{(2)} n_2 = \bar{X}' (n_1 + n_2).$$

Таким образом, вместо трех значений $X_{(1)}$, $X_{(2)}$, $X_{(3)}$ с их частотами мы можем рассматривать два значения: \bar{X}' с частотой $(n_1 + n_2)$ и $X_{(3)}$ с частотой n_3 . Но для этих двух значений среднее значение будет, на основании (1.18), равно

$$\bar{X}'' = \frac{\bar{X}' (n_1 + n_2) + X_{(3)} n_3}{(n_1 + n_2) + n_3},$$

что приводится к виду

$$\bar{X}'' = \frac{X_{(1)} n_1 + X_{(2)} n_2 + X_{(3)} n_3}{n_1 + n_2 + n_3}. \quad (1.20)$$

Продолжая подобным же образом, найдем, что среднее значение \bar{X} разрядных значений случайной величины X , выражаемой рядом распределения

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} X_{(1)}, & X_{(2)}, & \dots, & X_{(j)}, & \dots, & X_{(k)} \\ n_1, & n_2, & \dots, & n_j, & \dots, & n_k \end{array} \right\},$$

будет равно

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^k X_{(j)} n_j}{\sum_{j=1}^k n_j}. \quad (1.21)$$

Таким образом, *среднее значение* \bar{X} равно сумме произведений каждого разрядного значения случайной величины на соответствующую частоту, деленной на сумму всех частот.

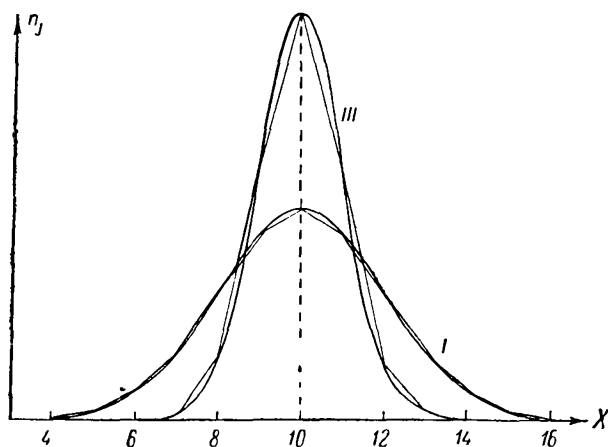


Рис. 1.17. Рассеяние значений случайной величины.

Если значения $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ встречались по одному разу, то формула (1.21) примет вид

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^n X_{(j)}}{n}, \quad (1.22)$$

т. е. среднее значение равно сумме всех значений, деленной на их число. Этот вид среднего значения называется *арифметическим средним*.

Пример вычисления арифметического среднего приведен в табл. 1.3.

Вычисление среднего значения по формуле (1.21) располагается по схеме табл. 1.21. В качестве примера взят ряд распределения предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.10).

Для рассматриваемого ряда среднее значение оказалось равным $\bar{X} = 56,048 \text{ кг/мм}^2$. Подобным же образом, среднее значение ряда I табл. 1.20 равно $\bar{X}_I = 10$, а среднее значение ряда II равно $\bar{X}_{II} = 15$.

В качестве примера, выясняющего *рассеяние* наблюдаемых значений случайной величины, возьмем ряды I и III табл. 1.20.

Изображение этих рядов на рис. 1.17 показывает, что площади обоих многоугольников частот одинаковы ($n = 1000$) и центры этих многоугольников, выражаемые средними значениями, совпадают: для обоих рядов среднее значение равно $\bar{X} = 10$. Но характер распределения значений оказывается различным.

В ряде III замечается большая скученность значений около точки, соответствующей среднему значению; значения этого ряда не выходят из пределов от 7 до 13. Напротив, в ряде I наблюдается большая разбросанность; значения этого ряда колеблются в более широких пределах — от 3 до 17. В таком случае говорят, что ряды имеют различное *рассеяние*. Ряд III имеет меньшее *рассеяние* по сравнению с рядом I.

Сравнивая ряды II и III табл. 1.20, мы будем иметь одновременно пример и различного положения, и различного *рассеяния* (рис. 1.18).

Основной статистикой, характеризующей *рассеяние* ряда распределения, служит основное отклонение.

Основным отклонением $\bar{\sigma}$ называется положительное значение квадратного корня из дроби, числитель которой равен сумме произведений квадратов разностей между каждым значением ряда и его средним значением на соответствующую частоту, а знаменатель равен сумме всех частот:

$$\bar{\sigma} = + \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k (X_{(j)} - \bar{X})^2 n_j}{n}}. \quad (1.23)$$

Таблица 1.21

Схема вычисления среднего значения

| $X_{(j)}$ | n_j | $X_{(j)} n_j$ |
|--|-------|---------------|
| (1) | (2) | (3) |
| 48 | 3 | 144 |
| 50 | 17 | 850 |
| 52 | 75 | 3 900 |
| 54 | 194 | 10 476 |
| 56 | 228 | 12 768 |
| 58 | 155 | 8 990 |
| 60 | 91 | 5 460 |
| 62 | 23 | 1 426 |
| 64 | 5 | 320 |
| Σ | 791 | 44 334 |
| $\bar{X} = \frac{44\,334}{791} = 56,048 \text{ кг/мм}^2$ | | |

Если отклонения от среднего значения выражены в единицах разряда, то основное отклонение обозначается через σ .

Вычисление основного отклонения по этой формуле располагается по схеме, данной в табл. 1.22. В качестве примера взят ряд распределения предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.10), для которого среднее значение равно $\bar{X} = 56,048 \text{ кг/мм}^2$ (см. табл. 1.21).

Т а б л и ц а 1.22

Схема вычисления основного отклонения

| $X_{(j)}$ | n_j | $X_{(j)} - \bar{X}$ | $(X_{(j)} - \bar{X})^2 n_j$ |
|--|-------|---------------------|-----------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) |
| 48 | 3 | -8,048 | 194,310912 |
| 50 | 17 | -6,048 | 621,831168 |
| 52 | 75 | -4,048 | 1228,972800 |
| 54 | 194 | -2,048 | 813,694976 |
| 56 | 228 | -0,048 | 0,525312 |
| 58 | 155 | +1,952 | 590,597120 |
| 60 | 91 | +3,952 | 1421,265664 |
| 62 | 23 | +5,952 | 814,804992 |
| 64 | 5 | +7,952 | 316,171520 |
| Σ | 791 | — | 6002,174464 |
| $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{6002,174464}{791}} = 2,7546 \text{ кг/мм}^2$ | | | |

Для рассматриваемого ряда основное отклонение оказалось равным $\bar{\sigma} = 2,7546 \text{ кг/мм}^2$. Подобным же образом основное отклонение рядов I и II табл. 1.20 равно $\sigma_I = \sigma_{II} = 2$; основное отклонение ряда III равно $\sigma_{III} = 1$.

Теперь обратим внимание на то, что на рис. 1.15, 1.17 и 1.18 вместе с многоугольниками частот проведены также некоторые плавные кривые. Это — кривые распределения соответствующих случайных величин. Наши многоугольники частот близко к ним примыкают, что естественно, так как число наблюдений велико ($n = 1000$). Но это позволяет в какой-то мере перенести уже полученные нами представления об основных свойствах рядов распределения на основные свойства самих случайных величин. Если мы установили, что на рис. 1.15 существенное несходство многоугольников частот заключается в их положении, то можно высказать предположение, что и существенное несходство кривых распределения соответствующих случайных величин тоже заключается в их положении. Если мы на рис. 1.17 выяснили, что один ряд

распределения обнаруживает меньшее рассеяние по сравнению с другим, то можно предположить, что и рассеяние значений одной случайной величины будет меньше, чем рассеяние другой. Предположения подобного рода будут оправдываться тем чаще, чем больше наблюдений мы используем при построении многоугольников частот.

Выше мы определили среднее значение как статистику, характеризующую положение ряда распределения, и основное отклонение как статистику, характеризующую его рассеяние. Только что приведенные соображения позволяют считать, что эти статистики

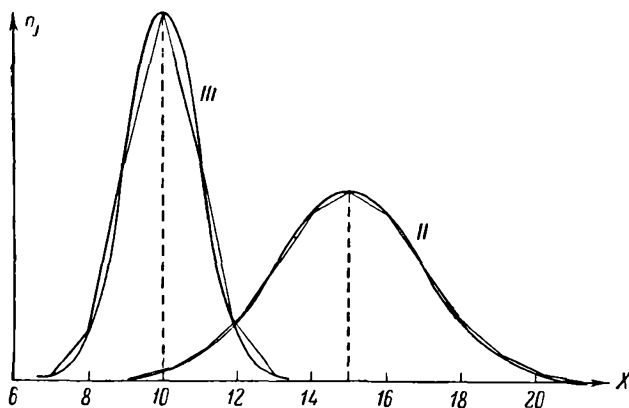


Рис. 1.18. Положение и рассеяние распределения.

характеризуют также соответственно положение кривой распределения случайной величины и степень рассеяния ее значений.

Выясним теперь третье основное свойство — *косость*, причем постараемся проанализировать это свойство для самой случайной величины, но сделаем это на основе исследования многоугольников частот, сразу перенося подмеченные черты на кривые распределения. Далее мы будем поступать так, не оговаривая этого особо.

Для выяснения косости кривой распределения сравним ряды IV и V табл. 1.20 с рядом I этой таблицы. Изобразив эти ряды на чертеже (рис. 1.19 и 1.20), мы видим, что многоугольники частот имеют одинаковую площадь ($n = 1000$); центры рядов, определяющие их положение, совпадают — среднее значение каждого ряда равно $\bar{X} = 10$; наконец, ряды I, IV и V обладают одинаковой степенью рассеяния — для каждого ряда $\sigma = 2$. Однако между этими рядами имеется существенное различие. Читатель сам заметит его. Адекватное различие следует приписать и кривым распределения.

Кривая распределения, относящаяся к ряду I, имеет в центре наибольшую ординату, а ординаты, расположенные на одинаковых расстояниях по ту и другую сторону от центральной ординаты, равны между собой. Такая кривая называется *симметрической* кривой распределения (здесь прежде всего симметрическим является сам ряд распределения).

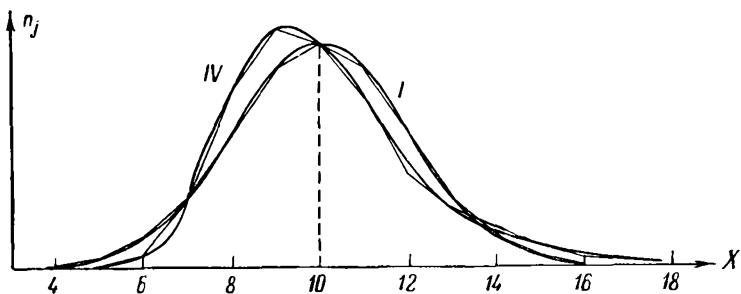


Рис. 1.19. Положительная косость кривой распределения.

Напротив, в кривых распределения, относящихся к рядам IV и V, ординаты изменяются по одну сторону от наибольшей ординаты с заметно большей скоростью, чем по другую сторону от нее. Такие кривые называются *косыми*, или *асимметрическими*,

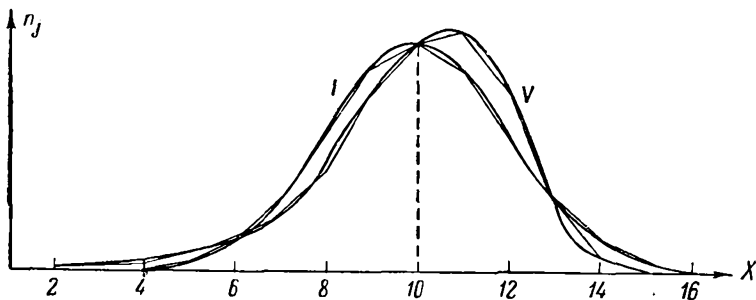


Рис. 1.20. Отрицательная косость кривой распределения

кривыми распределения (здесь и ряды распределения были асимметрическими). Косость кривых распределения, у которых правая ветвь, начиная от вершины, больше левой (как для ряда IV, где число различных наблюдаемых значений, считая от значения с максимальной частотой, больше справа, чем слева), называется *положительной* косостью; косость же кривых распределения, у которых левая ветвь больше правой (как для ряда V, где число различных наблюдаемых значений, считая от значения с макси-

мальной частотой, больше слева, чем справа), называется *отрицательной косостью*.

Основная статистика, характеризующая косость кривой распределения, называется *мерой косости*.

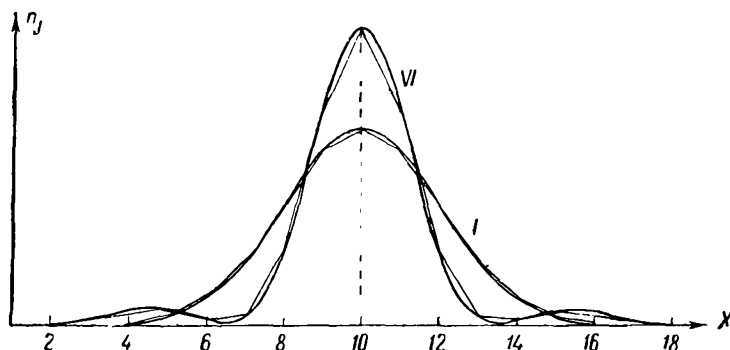


Рис. 1.21. Положительная крутость кривой распределения.

Мера косости α определяется по формуле

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^k (X_{(j)} - \bar{X})^3 n_j}{n} : \bar{\sigma}^3. \quad (1.24)$$

Для симметрических рядов распределения $\alpha = 0$; для рядов с положительной косостью $\alpha > 0$; для рядов с отрицательной

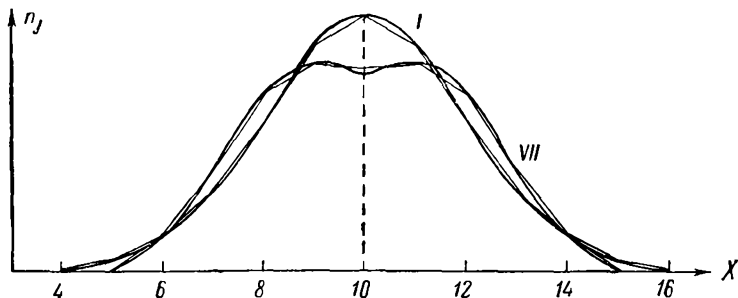


Рис. 1.22. Отрицательная крутость кривой распределения.

косостью $\alpha < 0$. Например, для ряда I $\alpha = 0$, для ряда IV $\alpha = +0,72$, а для ряда V $\alpha = -0,72$.

Четвертое свойство случайных величин — *крутость* кривой распределения — можно выяснить, сравнивая ряды VI и VII табл. 1.20 с рядом I.

Изобразив ряды на чертеже (рис. 1.21 и 1.22), мы видим, что многоугольники частот имеют одинаковую площадь ($n = 1000$),

положение этих рядов определяется одним и тем же средним значением $\bar{X} = 10$; ряды имеют одинаковое рассеяние — основное отклонение каждого ряда равно $\sigma = 2$; наконец, каждый из рядов симметрический — мера косости каждого ряда равна $\alpha = 0$. Однако все эти ряды различаются между собой, и это сказывается на крутости кривой распределения.

Крутость исследуемой кривой распределения сравнивается с крутостью кривой распределения, которая может быть отнесена к классу так называемых нормальных кривых распределения (см. гл. V, § 2).

Крутость ряда распределения, в котором значения только трех единиц из 1000 лежит вне пределов $\pm 3\sigma$, называется *нормальной* крутостью. В ряде I значение только двух единиц из 1000 находится вне пределов $\pm 3\sigma$. Что же касается ряда VI, то в нем за пределы $\pm 3\sigma$ выходят значения в 18 случаях из 1000. Это явление, называемое *экссессом*, сопровождается большей крутостью кривой распределения, т. е. большим скоплением значений около среднего значения, по сравнению с нормальным распределением. Такая крутость называется *положительной* крутостью и соответствующие кривые — *островершинными* кривыми распределения. Напротив, в ряде VII значения расположены в пределах более узких, чем в нормальном распределении. Это явление, называемое *дефектом*, сопровождается меньшей крутостью, чем в нормальном распределении. Такая крутость называется *отрицательной*, а кривые такого рода — *плосковершинными* кривыми распределения.

Мера крутости ι определяется по формуле

$$\iota = \frac{\sum_{j=1}^k (X_{(j)} - \bar{X})^4 n_j}{n} : \sigma^4 - 3. \quad (1.25)$$

Это формула подобрана так, что для рядов с нормальной кривой распределения при больших n мера крутости практически равна нулю, для рядов с островершинной кривой распределения $\iota > 0$ и для рядов с плосковершинной кривой распределения $\iota < 0$.

Например, мера крутости ряда I практически равна нулю: $\iota = +0,04$; для ряда VI $\iota = +4,25$; для ряда VII $\iota = -0,73$.

2. Свойства связи. В § 2, п. 3 впервые было упомянуто о статистической связи между случайными величинами. Смысл этого понятия для двух случайных величин состоит в том, что фиксированному наблюденному значению одной случайной величины в последовательности n совместных наблюдений обеих величин соответствует не одно наблюденное значение, а ряд распределения наблюденных значений другой случайной величины. Статистическую связь наглядно иллюстрируют таблицы распределения.

В § 2, п. 4 описывался предельный переход, в результате которого было введено понятие поверхности распределения двух случайных величин. Поверхность распределения выражает так называемую стохастическую связь между двумя случайными величинами. Эта связь неизвестна исследователю, и цель исследователя — познать ее как можно полнее на основе статистической связи.

В § 2, п. 3 было упомянуто также о частном случае статистической связи — статистической корреляции. Этот случай также находит себе аналог при упомянутом предельном переходе — стохастическую корреляцию, когда с изменением значений одной случайной величины сопоставляется изменение некоторой численной

Таблица 1.23

Корреляция между пределом прочности σ_B (кг/мм²) и пределом текучести σ_T (кг/мм²) стали 30ХГСА

| $\sigma_B \backslash \sigma_T$ | 93 | 98 | 103 | 108 | 113 | 118 | 123 | 128 | Σ |
|--------------------------------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| 103 | 2 | | | | | | | | 2 |
| 107 | 2 | 1 | | | | | | | 3 |
| 111 | | 5 | 8 | 4 | | | | | 17 |
| 115 | | 2 | 15 | 21 | 1 | | | | 39 |
| 119 | | | 1 | 26 | 26 | | | | 53 |
| 123 | | | 1 | 3 | 31 | 19 | | | 54 |
| 127 | | | | | 8 | 20 | 2 | | 30 |
| 131 | | | | | | 2 | 6 | | 8 |
| 135 | | | | | | | 2 | 1 | 3 |
| Σ | 4 | 8 | 25 | 54 | 66 | 41 | 10 | 1 | 209 |

характеристики распределения другой случайной величины. Этот аналог также познается путем изучения таблиц распределения — корреляционных таблиц. В тексте слова «статистическая» и «стохастическая» почти везде опускаются, так как всегда либо безразлично, либо понятно, о какой связи идет речь.

Таблица 1.24

Корреляция между временем горения при нормальном напряжении X_1 и процентом начального значения светового потока в конце срока службы X_2 электрических ламп

| X_1 , час \ X_2 | 57,5 | 62,5 | 67,5 | 72,5 | 77,5 | 82,5 | 87,5 | 92,5 | 97,5 | Σ |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| 400 | | | | | | | | 2 | 1 | 3 |
| 600 | | | | 1 | | 1 | 6 | 5 | | 13 |
| 800 | | | | | 8 | 6 | 4 | | | 18 |
| 1000 | | | 1 | 7 | 10 | 9 | 1 | | | 28 |
| 1200 | | | 6 | 5 | 6 | | | | | 17 |
| 1400 | 1 | 3 | 2 | 4 | | | | | | 10 |
| 1600 | | 3 | 2 | 1 | | | | | | 6 |
| 1800 | 1 | 1 | 2 | 1 | | | | | | 5 |
| Σ | 2 | 7 | 13 | 19 | 24 | 16 | 11 | 7 | 1 | 100 |

При изучении корреляционной связи необходимо прежде всего выяснить форму, направление и степень тесноты связи: корреляция может быть линейной и нелинейной, положительной и отрицательной, имеющей ту или иную тесноту связи. Кратко поясним это на примере статистической корреляции.

В случае *линейной корреляции* частоты корреляционной таблицы располагаются внутри полосы, направленной вдоль диагонали таблицы. Если при этом корреляция положительна (когда с увеличением одной величины другая величина, в общем, тоже увеличивается), то частоты корреляционной таблицы распола-

гаются вдоль диагонали, идущей слева сверху вправо вниз. Если же корреляция отрицательна (когда с увеличением одной величины другая величина, в общем, уменьшается), то частоты корреляционной таблицы располагаются вдоль диагонали, идущей справа сверху влево вниз.

Таблица 1.25

Корреляция между температурой t (°C) и ударной вязкостью a_k (кгм/см²) углеродистой стали с 0,40 % С

| $t^\circ \backslash a_k$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | Σ |
|--------------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----------|
| -40 | 1 | | | | | | | | 1 |
| -20 | 1 | — | 1 | 1 | | | | | 3 |
| 0 | 1 | — | — | 2 | 1 | | | | 4 |
| +20 | | | | 2 | 3 | 3 | | | 8 |
| +40 | | | | | | 5 | 4 | | 9 |
| +60 | | | | | | 4 | 4 | 3 | 11 |
| +80 | | | | | | 2 | 6 | — | 8 |
| +100 | | | | | | 1 | 4 | 3 | 8 |
| +120 | | | | | | — | 3 | — | 3 |
| +140 | | | | | | 1 | — | — | 1 |
| +160 | | | | | | | — | 1 | 1 |
| +180 | | | | | | | 1 | | 1 |
| Σ | 3 | — | 1 | 5 | 4 | 16 | 22 | 7 | 58 |

Примером линейной положительной корреляции может служить корреляция между пределом прочности σ_B и пределом текучести σ_T стали 30ХГСА (табл. 1.23 *).

В качестве примера линейной отрицательной корреляции приведем корреляцию между временем горения при нормальном напряжении X_1 и процентом начального значения светового потока в конце срока службы X_2 электрических ламп (табл. 1.24 **).

Статистикой, характеризующей степень и направление линейной корреляции, является коэффициент корреляции.

В случае нелинейной корреляции частоты корреляционной таблицы располагаются внутри некоторых криволинейных полос: при положительной корреляции будет заполнена числами по преимуществу левая верхняя и правая нижняя части таблицы, а при

Т а б л и ц а 1.26

Корреляция между литражем цилиндра v_h (л) и литровым весом g_h (кг/л) авиационных двигателей выпуска 1937—1939 гг.

| $\begin{smallmatrix} g_h \\ v_h \end{smallmatrix}$ | 12,5 | 17,5 | 22,5 | 27,5 | 32,5 | 37,5 | 42,5 | 47,5 | 52,5 | 57,5 | Σ |
|--|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| 0,25 | | | | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 4 | 3 | 14 |
| 0,75 | | | 6 | 10 | 3 | 4 | 1 | | | | 24 |
| 1,25 | | 4 | 24 | 5 | | | | | | | 33 |
| 1,75 | | 10 | 11 | 2 | | | | | | | 23 |
| 2,25 | 1 | 10 | 1 | | | | | | | | 12 |
| 2,75 | 1 | 10 | — | | | | | | | | 11 |
| 3,25 | 4 | 7 | 1 | | | | | | | | 12 |
| 3,75 | | 1 | | | | | | | | | 1 |
| Σ | 6 | 42 | 43 | 18 | 5 | 6 | 2 | 1 | 4 | 3 | 130 |

*) Я. И. Лукомский, 1961, стр. 000 (V).

**) А. П. Иванов, 1936, стр. 324 (VII, 10a).

отрицательной корреляции будет заполнена правая верхняя и левая нижняя части таблицы.

Примером нелинейной положительной корреляции может служить корреляция между температурой (t) и ударной вязкостью (a_k) углеродистой стали с 0,40% (табл. 1.25)*. Эта таблица составлена на основании точечной диаграммы, изображенной на рис. 1.10.

В качестве примера нелинейной отрицательной корреляции приведем корреляцию между литражем цилиндра v_h и литровым весом g_h авиационных двигателей выпуска 1937—1939 гг. (табл. 1.26)**). Литровым весом называется отношение сухого веса к литражу цилиндра.)

Для измерения нелинейной корреляции применяется статистика, называемая *корреляционным отношением*.

Непосредственное вычисление статистик распределения и связи является довольно сложным. Для облегчения вычислительного труда применяются моменты случайных величин.

*) Н. Н. Давиденков, 1936, стр. 233 (VII, 106).

**) П. И. Орлов, 1940, стр. 131 (VII, 10а).

ГЛАВА II

МОМЕНТЫ

§ 1. Моменты в случае одномерной частичной совокупности

1. Обыкновенные моменты. Мы неоднократно подчеркивали основную цель статистического исчисления — исследовать распределения самих случайных величин и связи между ними. Для этого исследуют ряды и таблицы распределения наблюдаемых значений этих величин, имея в виду, что при достаточно большом объеме частичной совокупности свойства рядов и таблиц будут хорошо отражать свойства распределений случайных величин и связи между ними.

Исследование начинается с вычисления моментов — особого рода статистик, определение которых мы сейчас дадим.

Моменты разделяются на обыкновенные и факториальные; те и другие в свою очередь делятся на начальные, центральные и основные.

Выясним сначала понятие обыкновенного начального момента.

Понятие момента взято из механики. Моментом силы относительно некоторой точки называется произведение величины силы на длину плеча, т. е. на величину перпендикуляра, опущенного из данной точки на линию действия силы. Реальный смысл момента заключается в том, что он определяет эффективность силы, приложенной к твердому телу и стремящейся сообщить ему вращательное движение вокруг данной неподвижной точки. В качестве примера эффективности силы, определяемой моментом, укажем на известный способ поднятия тяжестей при помощи рычага. Небольшая сила, приложенная к большему плечу рычага, уравновешивает большую силу, приложенную к меньшему плечу. Если имеется система сил, тогда момент системы этих сил относительно некоторой точки будет равен сумме моментов этих сил относительно данной точки.

Ряд распределения, т. е. система наблюдаемых значений случайной величины вместе с соответствующими частотами

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)} \\ p'_1, p'_2, \dots, p'_k \end{array} \right\}$$

имеет полную аналогию с системой сил, приложенную к твердому телу. Каждую частоту p'_j можно рассматривать как силу, приложенную к точке, соответствующей данному значению $X_{(j)}$. По-

этому, взяв какое-либо значение $X_{(a)}$ за начало, мы можем составить момент разрядных частотей относительно данного начального значения аналогично понятию момента системы сил относительно некоторой точки. При этом в качестве плеча мы возьмем отклонение x каждого значения от выбранного начального значения [см. (1.9)].

С целью придать понятию момента необходимую общность, мы будем брать отклонения x в некоторой степени. Таким образом, мы можем дать следующее определение:

Обыкновенным начальным моментом m_h ряда распределения, т. е. моментом относительно начального значения $X_{(a)}$, называется сумма произведений данной степени отклонений разрядных значений от $X_{(a)}$ на соответствующую частоту

$$m_h = \sum_{j=1}^k p'_j x_{(j)}^h, \quad (2.1)$$

где h — целое положительное число.

Принимая во внимание (1.10), мы можем также написать

$$m_h = \frac{\sum_{j=1}^k x_{(j)}^h n_j}{n}, \quad (2.2)$$

т. е. обыкновенный начальный момент h -го порядка равен сумме произведений каждого отклонения x , взятого в h -й степени, на соответствующую частоту, деленной на сумму всех частот.

Давая показателю h различные значения $h = 0, 1, 2, \dots$, получим нулевой момент m_0 , первый момент m_1 , второй момент m_2 и т. д.

Нулевой момент

$$m_0 = \frac{\sum_{j=1}^k x_{(j)}^0 n_j}{n} = \sum_{j=1}^k p'_j \quad (2.3)$$

представляет сумму частотей ряда распределения; следовательно, согласно (1.11),

$$m_0 = 1, \quad (2.4)$$

т. е. нулевой момент относительно какого угодно значения ряда распределения равен единице.

Первый момент равен

$$m_1 = \frac{\sum_{j=1}^k x_{(j)} n_j}{n}, \quad (2.5)$$

Если вместо отклонений $x_{(j)}$ возьмем значения $X_{(j)}$ случайной величины, то получим среднее значение

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^k X_{(j)} n_j}{n} \quad (2.6)$$

[см. (1.21)].

Заменяя в формуле (2.5) отклонение $x_{(j)}$ соответствующим ему выражением (1.9), находим

$$m_1 = \frac{\sum_{j=1}^k \left(\frac{X_{(j)} - X_{(a)}}{c} \right) n_j}{n} = \frac{1}{c} \left(\frac{\sum_{j=1}^k X_{(j)} n_j}{n} - X_{(a)} \frac{\sum_{j=1}^k n_j}{n} \right),$$

или, принимая во внимание (2.6) и (1.8), получим

$$m_1 = \frac{\bar{X} - X_{(a)}}{c}. \quad (2.7)$$

Относительно моментов можно установить следующие основные теоремы:

1. Если отклонения x будут увеличены или уменьшены на какое-либо постоянное число b , то первый момент m_1 этой величины увеличится или уменьшится на это число. (Изменение начала отсчета.)

Действительно,

$$\frac{\sum_{j=1}^k (x_{(j)} \pm b) n_j}{n} = \frac{\sum_{j=1}^k x_{(j)} n_j}{n} \pm b \frac{\sum_{j=1}^k n_j}{n} = m_1 \pm b. \quad (2.8)$$

Эта теорема обосновывает произвольный выбор начала отсчета в том смысле, что при вычислении моментов мы можем взять начальное значение наиболее удобным образом.

Так как статистики распределения и связи приурочиваются обычно к среднему значению, то начальное значение должно быть взято возможно ближе к среднему значению. Учитывая, что, согласно (2.7), первый момент представляет разность между средним значением и начальным значением, выраженную в единицах разряда, заключаем, что если начальное значение будет взято равным полусумме крайних значений того разряда, в котором находится среднее значение, то численное значение первого момента не будет превышать 0,5. Таким образом, критерием правильности выбора начального значения является условие

$$-0,5 < m_1 < +0,5. \quad (2.9)$$

Определенное таким образом начальное значение остается затем одним и тем же для всех моментов данного ряда распределения,

При таком выборе начального значения вычисление моментов становится наиболее легким. Объясняется это тем, что частоты разрядов, расположенных около среднего значения, являются обычно наибольшими, и, следовательно, при указанном правильном выборе начального значения наибольшие частоты будут умножаться на наименьшие отклонения (см. табл. 1.12).

2. Если каждое отклонение x будет умножено на некоторое постоянное число b , то момент h -го порядка будет умножен на h -ю степень этого числа b . (Изменение шкалы.)

Действительно,

$$\frac{\sum_{j=1}^k (bx_{(j)})^h n_j}{n} = b^h \frac{\sum_{j=1}^k x_{(j)}^h n_j}{n} = b^h m_h. \quad (2.10)$$

На основании этой теоремы мы можем при вычислении моментов выражать отклонения в *рабочих единицах*, т. е. брать отклонения в виде (1.9), что в значительной степени упрощает вычислительную работу. Если же нужно будет от моментов, выраженных в этих рабочих единицах, перейти к моментам, выраженным в единицах измерения, то достаточно, на основании рассматриваемой теоремы, умножить момент m_h на c^h .

3. Если каждая частота n_j будет умножена на некоторое постоянное число b , то величина момента h -го порядка не изменится.

Действительно,

$$\frac{\sum_{j=1}^k x_{(j)}^h (bn_j)}{\sum_{j=1}^k (bn_j)} = \frac{b \sum_{j=1}^k x_{(j)}^h n_j}{b \sum_{j=1}^k n_j} = \frac{\sum_{j=1}^k x_{(j)}^h n_j}{n} = m_h. \quad (2.11)$$

На основании этой теоремы мы можем при вычислении моментов применять преобразованные ряды распределения (1.12), т. е. вместо частот брать частоты (проценты или промилле), отчего значения моментов не изменятся.

2. **Факториальные моменты.** Кроме обыкновенных моментов, при исследованиях случайных величин применяются также факториальные моменты. В факториальных моментах вместо степеней берутся факториалы отклонений.

Факториалом h -го порядка называется произведение

$$x^{[h]} = x(x-1) \dots (x-h+1). \quad (2.12)$$

Замечая, что

$$x^{[h]} = x^{[g]}(x-g)^{[h-g]}, \quad (2.13)$$

и полагая в этом равенстве $g=0$, имеем $x^{[h]} = x^{[0]}x^{[h]}$, откуда

$$x^{[0]} = 1. \quad (2.14)$$

Если $h=x$, то будем иметь факториал x -го порядка числа x :

$$x^{[x]} = x(x-1) \dots 2 \cdot 1 = x! \quad (2.15)$$

(Читается «икс-факториал».)

Умножая $x_j^{[h]}$ на p'_j и суммируя по j , от 1 до k , получим факториальный момент h -го порядка

$$m_{[h]} = \sum_{j=1}^k p'_j x_j^{[h]}. \quad (2.16)$$

Выведем соотношение между обыкновенными и факториальными моментами. Для этого найдем связь между h -й степенью числа x и факториалом h -го порядка (2.12). Эту связь можно представить в виде

$$x^h = a_{h,0}x^{[0]} + a_{h,1}x^{[1]} + a_{h,2}x^{[2]} + \dots + a_{h,g}x^{[g]} + \dots \\ \dots + a_{h,h-2}x^{[h-2]} + a_{h,h-1}x^{[h-1]} + a_{h,h}x^{[h]}, \quad (2.17)$$

где коэффициенты $a_{h,g}$ определяются следующим образом.

Умножая левую и правую части равенства (2.17) на x , имеем

$$x^{h+1} = a_{h,0}xx^{[0]} + a_{h,1}xx^{[1]} + a_{h,2}xx^{[2]} + \dots + a_{h,g}xx^{[g]} + \dots \\ \dots + a_{h,h-2}xx^{[h-2]} + a_{h,h-1}xx^{[h-1]} + a_{h,h}xx^{[h]}. \quad (2.18)$$

Так как на основании (2.13) $x^{[g+1]} = x^{[g]}(x-g)$, то

$$xx^{[g]} = gx^{[g]} + x^{[g+1]}. \quad (2.19)$$

Заменяя в (2.18) $xx^{[g]}$ ($g=0, h$) через (2.19), получим

$$x^{h+1} = a_{h,0}\{0x^{[0]} + x^{[1]}\} + a_{h,1}\{1x^{[1]} + x^{[2]}\} + a_{h,2}\{2x^{[2]} + x^{[3]}\} + \dots \\ \dots + a_{h,g}\{gx^{[g]} + x^{[g+1]}\} + \dots + a_{h,h-2}\{(h-2)x^{[h-2]} + x^{[h-1]}\} + \\ + a_{h,h-1}\{(h-1)x^{[h-1]} + x^{[h]}\} + a_{h,h}\{hx^{[h]} + x^{[h+1]}\},$$

или

$$x^{h+1} = 0 + \{a_{h,0} + a_{h,1}\}x^{[1]} + \{a_{h,1} + 2a_{h,2}\}x^{[2]} + \dots \\ \dots + \{a_{h,g} + (g+1)a_{h,g+1}\}x^{[g+1]} + \dots + \{a_{h,h-2} + (h-1)a_{h,h-1}\}x^{[h-1]} + \\ + \{a_{h,h-1} + ha_{h,h}\}x^{[h]} + a_{h,h}x^{[h+1]}. \quad (2.20)$$

С другой стороны, на основании (2.17) имеем

$$x^{h+1} = a_{h+1,0}x^{[0]} + a_{h+1,1}x^{[1]} + a_{h+1,2}x^{[2]} + \dots + a_{h+1,g+1}x^{[g+1]} + \dots \\ \dots + a_{h+1,h-1}x^{[h-1]} + a_{h+1,h}x^{[h]} + a_{h+1,h+1}x^{[h+1]}. \quad (2.21)$$

Сравнивая почленно (2.20) и (2.21) и принимая во внимание (2.14), находим, прежде всего, что

$$a_{h+1,0} = 0. \quad (2.22)$$

Затем, замечая, что для осуществления равенства (2.21) необходимо, чтобы коэффициент при старшей степени переменной в правой части равенства был равен коэффициенту при $x^{[h+1]}$, т. е. равен единице, имеем

$$a_{h+1, h+1} = a_{h, h} = 1. \quad (2.23)$$

Наконец, сравнивая коэффициенты при $x^{[g+1]}$, получим

$$a_{h+1, g+1} = a_{h, g} + (g+1) a_{h, g+1},$$

так что вообще будем иметь

$$a_{h, g} = a_{h-1, g-1} + g a_{h-1, g}. \quad (2.24)$$

Пользуясь этим соотношением, можно построить таблицу чисел $a_{h, g}$. Каждое число $a_{h, g}$ этой таблицы равно, согласно (2.24), сумме двух чисел, одно из которых $a_{h-1, g-1}$ стоит в предыдущей строке и предыдущем столбце, а другое представляет умноженное на номер данного столбца g число $a_{h-1, g}$, стоящее в предыдущей строке и данном столбце (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Числа $a_{h, g}$

| $h \backslash g$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------------|---|-----|-----|------|------|-----|----|---|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | |
| 7 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | |
| 8 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 |

Таким образом, применяя равенство (2.17) и пользуясь числами табл. 2.1, мы можем h -ю степень числа x выразить через факториалы $x^{[h]}$.

Мы можем также факториалы $x^{[h]}$ выразить через степени x^h . Для этого положим, что

$$x^{[h]} = (-1)^h b_{h, 0} x^0 + (-1)^{h-1} b_{h, 1} x^1 + (-1)^{h-2} b_{h, 2} x^2 + \dots \\ \dots + (-1)^{h-g} b_{h, g} x^g + \dots + (-1)^1 b_{h, h-1} x^{h-1} + (-1)^0 b_{h, h} x^h. \quad (2.25)$$

Коэффициенты $b_{h, g}$ этого равенства мы можем найти, рассуждая аналогично тому, как мы делали при определении коэффициентов $a_{h, g}$. В результате получим

$$b_{h, 0} = 0, \quad (2.26)$$

$$b_{h, h} = 1; \quad (2.27)$$

общий же член выразится соотношением

$$b_{h,g} = b_{h-1,g-1} + (h-1)b_{h-1,g}. \quad (2.28)$$

Применяя это соотношение, можно построить таблицу чисел $b_{h,g}$ (табл. 2.2). Каждое число $b_{h,g}$ этой таблицы равно, по (2.28), сумме двух чисел, одно из которых $b_{h-1,g-1}$ стоит в предыдущей строке и предыдущем столбце, а другое представляет умноженное на номер предыдущей строки $h-1$ число $b_{h-1,g}$, стоящее в предыдущей строке и данном столбце.

Таблица 2.2

Числа $b_{h,g}$

| $h \backslash g$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------------|------|-------|-------|------|------|-----|----|---|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 2 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 6 | 11 | 6 | 1 | | | | |
| 5 | 24 | 50 | 35 | 10 | 1 | | | |
| 6 | 120 | 274 | 225 | 85 | 15 | 1 | | |
| 7 | 720 | 1764 | 1624 | 735 | 175 | 21 | 1 | |
| 8 | 5040 | 13068 | 13132 | 6769 | 1960 | 322 | 28 | 1 |

Для проверки составления чисел $b_{h,g}$ заметим, что $\sum_{g=1}^h b_{h,g} = h!$, т. е. сумма чисел каждой строки табл. 2.2 равна факториалу числа, соответствующего номеру этой строки.

Числа $a_{h,g}$ и $b_{h,g}$ называются *числами Стирлинга*.

Переходя к моментам, умножим левую и правую части равенства (2.17) на p'_j и просуммируем по j от $j=1$ до $j=k$. Замечая, что $a_{h,0}=0$, $a_{h,h}=1$ [см. (2.22), (2.23)], получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k p'_j x_j^h = a_{h,1} \sum_{j=1}^k p'_j x_j^{[1]} + a_{h,2} \sum_{j=1}^k p'_j x_j^{[2]} + \dots + a_{h,g} \sum_{j=1}^k p'_j x_j^{[g]} + \dots \\ \dots + a_{h,h-1} \sum_{j=1}^k p'_j x_j^{[h-1]} + \sum_{j=1}^k p'_j x_j^{[h]}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Принимая во внимание (2.1) и (2.16), находим

$$m_h = \sum_{g=1}^h a_{h,g} m_{[g]}. \quad (2.30)$$

Таким образом, по факториальным моментам мы можем, пользуясь числами табл. 2.1, найти обыкновенные моменты. Например,

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m_{[1]}, \\ m_2 &= m_{[1]} + m_{[2]}, \\ m_3 &= m_{[1]} + 3m_{[2]} + m_{[3]}, \\ m_4 &= m_{[1]} + 7m_{[2]} + 6m_{[3]} + m_{[4]}. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Подобным же образом по обыкновенным моментам можно найти факториальные моменты.

Умножая левую и правую части равенства (2.25) на p'_j , суммируя по j от $j=1$ до $j=k$ и заменяя суммы соответствующими моментами, получим

$$m_{[h]} = \sum_{g=1}^h (-1)^{h-g} b_{h,g} m_g. \quad (2.32)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} m_{[1]} &= m_1, \quad m_{[2]} = -m_1 + m_2, \quad m_{[3]} = 2m_1 - 3m_2 + m_3, \\ m_{[4]} &= -6m_1 + 11m_2 - 6m_3 + m_4. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

3. Вычисление моментов по способу произведений. При исследовании распределения случайной величины обычно вполне достаточно ограничиться вычислением моментов наблюдаемого ряда распределения не выше четвертого порядка.

Начальные моменты могут быть вычислены двумя способами: способом произведений и способом сумм.

Вычисление обыкновенных начальных моментов по способу произведений состоит в непосредственном применении определения этих моментов (2.1).

Вычислим, например, начальные моменты для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.10). Вычисление моментов располагается в следующей схеме (табл. 2.3).

Схема вычисления моментов состоит из девяти столбцов: первые семь столбцов служат для вычисления моментов, а остальные два — для проверки вычислений.

Последовательность вычислений ясна из заголовков столбцов схемы. Вычисление удобнее всего производить в следующем порядке. Заполнив столбцы значений $(X_{(j)})$, частот (n_j) и отклонений $(x_{(j)})$, следует во всех остальных четырех столбцах левой части схемы выписать произведения частот на степени отклонений. Эти произведения надо выписывать по строкам, т. е. в горизонтальном направлении, умножая в каждой строке число предыдущего столбца на одно и то же число, а именно, на отклонение (3).

Таблица 2.3

Схема вычисления обыкновенных начальных моментов по способу произведений (для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали)

| $x_{(j)}$ | n_j | $x_{(j)}$ | $x_{(j)}n_j$ | $x_{(j)}^2n_j$ | $x_{(j)}^3n_j$ | $x_{(j)}^4n_j$ | $x_{(j)}+1$ | $(x_{(j)}+1)^4n_j$ |
|--|-------|-----------|--------------|----------------|----------------|----------------|--|--------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) |
| 48 | 3 | -4 | -12 | 48 | -192 | 768 | -3 | 243 |
| 50 | 17 | -3 | -51 | 153 | -459 | 1377 | -2 | 272 |
| 52 | 75 | -2 | -150 | 300 | -600 | 1200 | -1 | 75 |
| 54 | 194 | -1 | -194 | 194 | -194 | 194 | 0 | 0 |
| 56 | 228 | 0 | -407 | - | -1445 | - | +1 | 228 |
| 58 | 155 | +1 | 155 | 155 | 155 | 155 | +2 | 2 480 |
| 60 | 91 | +2 | 182 | 364 | 728 | 1456 | +3 | 7 371 |
| 62 | 23 | +3 | 69 | 207 | 621 | 1863 | +4 | 5 888 |
| 64 | 5 | +4 | 20 | 80 | 320 | 1280 | +5 | 3 125 |
| - | - | - | + 426 | - | + 1824 | - | Σ | 19 682 |
| Σ | 791 | - | +19 | 1501 | +379 | 8293 | $m_4^* = \frac{19\,682}{791} = 24,882$ | |
| $m_1 = \frac{+19}{791} = +0,024$ $m_2 = \frac{1501}{791} = 1,898$ $m_3 = \frac{+379}{791} = +0,479$ $m_4 = \frac{8293}{791} = 10,484$ | | | | | | | $m_0 = 1,000$ | |
| | | | | | | | $4m_1 = 0,096$ | |
| | | | | | | | $6m_2 = 11,388$ | |
| | | | | | | | $4m_3 = 1,916$ | |
| | | | | | | | $m_4 = 10,484$ | |
| | | | | | | | 24,884 | |

Благодаря этому не только облегчается вычислительная работа и сокращается возможность ошибки, но и создаются условия для проверки вычислений.

Прежде чем находить суммы произведений каждого столбца схемы и делить их на итог частот, для получения моментов, необходимо произвести проверку сделанных перемножений. Такая проверка может быть достигнута повторением всей вычислительной работы.

Легко, однако, видеть, что если при образовании чисел последних четырех столбцов левой части схемы будет применен описанный выше способ перемножения чисел предыдущих столбцов на отклонения (3), то ошибки, сделанные при образовании чисел предыдущих столбцов, найдут отражение в числах столбца (7),

дающего четвертый момент. Поэтому, если числа столбца (7) окажутся правильными, то это может служить указанием на правильность образования всех произведений левой части схемы.

Для проверки правильности чисел последнего столбца левой части схемы вычисления моментов по способу произведений составлена *таблица значений четвертых моментов разрядных частот*. Такая таблица для разрядных частот и отклонений, обычно встречающихся в практике статистических вычислений, приведена в конце книги (табл. IV). В левом заголовке этой таблицы указаны разрядные частоты от $n_j = 1$ до $n_j = 300$, а в верхнем заголовке — отклонения $x_{(j)}$. Значения же четвертых моментов разрядных частот, т. е. $x_{(j)}^4 n_j$, находятся на пересечении соответствующих строки и столбца. Если, например, $n_j = 19$, $x_{(j)} = \pm 3$, то значение четвертого момента этой частоты, т. е. $3^4 \cdot 19$, будет равно 1539.

Если частота будет больше 300, то, замечая, что

$$(n_1 + n_2) x^4 = n_1 x^4 + n_2 x^4,$$

мы можем данную частоту n_j разложить на два или более слагаемых, не превышающих 300. Взяв для этих чисел значения из табл. IV и сложив их, находим искомый четвертый момент данной частоты. Пусть, например, $n_j = 439$ и $x_{(j)} = 2$. Разбив 439 на два слагаемых $n_1 = 300$ и $n_2 = 139$, найдем для этих чисел при $x = 2$ табличные значения 4800 и 2224. Сумма этих чисел 7024 и будет искомым четвертым моментом, т. е. $2^4 \cdot 439$.

Сравнивая числа, полученные в столбце (7) схемы (табл. 2.3), с соответствующими числами табл. IV, мы можем убедиться в правильности составления произведений во всех столбцах схемы вычисления моментов. В случае несовпадения каких-либо чисел столбца (7) схемы с соответствующими числами табл. IV потребуется повторить вычислительную работу не всю целиком, а только по тем строкам, в которых не оказалось совпадения с числами табл. IV.

Убедившись в правильности составленных произведений, находим суммы каждого столбца и делим их на сумму всех частот для получения значений моментов. Эти вычисления располагаются внизу левой части схемы.

Вычисление моментов производится обычно с точностью до 0,001.

Для проверки правильности вычисления первых четырех моментов применяется формула

$$m_4^* = m_0 + 4m_1 + 6m_2 + 4m_3 + m_4. \quad (2.34)$$

В правой части этой формулы стоят моменты относительно принятого начального значения, а в левой части — четвертый момент

относительно значения, передвинутного на один разряд в направлении убывающих значений:

$$m_4^* = \frac{\sum_{j=1}^k n_j (x_{(j)} + 1)^4}{n}. \quad (2.35)$$

Формула (2.34) выведена на основании разложения четвертой степени суммы $(x_{(j)} + 1)$:

$$(x_{(j)} + 1)^4 = 1 + 4x_{(j)} + 6x_{(j)}^2 + 4x_{(j)}^3 + x_{(j)}^4.$$

Умножая левую и правую части этого равенства на n_j , суммируя по j от 1 до k и разделив на n , получим (2.35).

Для вычисления m_4^* в столбце (8) схемы помещаются отклонения, увеличенные на единицу, $x_{(j)} + 1$. По этим новым отклонениям и частотам (2) выписываются в столбце (9) числа $n_j(x_{(j)} + 1)^4$ из табл. IV. Сумма этих чисел, деленная на итог частот, даст m_4^* .

В рассматриваемом примере $m_4^* = 19682/791 = 24,882$.

Выполним, наконец, действия, указанные в правой части формулы (2.34), подставляя в эту формулу найденные значения моментов. Эти действия располагаются внизу правой части схемы. Если в результате этих действий получится число, совпадающее с m_4^* с принятой точностью, то вычисление моментов следует признать правильным. В рассматриваемом примере в результате указанных действий мы получили число 24,884, совпадающее с найденным выше моментом m_4^* ; отсюда мы заключаем, что моменты вычислены правильно.

4. Вычисление моментов по способу сумм. Вычисление моментов по способу произведений требует большой вычислительной работы по перемножению каждой частоты ряда распределения на различные степени отклонений. Кроме того, для уверенности в правильности вычислений необходимо обращаться к специальным проверочным таблицам или же производить вычисления по два раза, что в случае ряда распределения с большим числом разрядов представляет значительную трудность.

Ввиду этого следует признать особенно ценным такой способ вычисления моментов, при котором нахождение произведений заменяется составлением сумм, и, следовательно, вычислительная работа сводится к простому механическому подсчету и может быть произведена быстро при помощи русских счетов. При этом не только в высшей степени упрощается вычислительная работа, но и, кроме того, в самом процессе вычислений получаются данные, обеспечивающие возможность проверки каждой стадии работы.

Этот способ вычисления моментов называется *способом сумм*.

Применение способа сумм при вычислении моментов основыв-

вается на том, что между суммами s и разностями d , получаемыми при этом способе, и моментами существуют вполне определенные соотношения, которые дают возможность находить моменты при помощи этих сумм и разностей.

Для вывода этих соотношений возьмем ряд распределения значений случайной величины X (1.4). Из частот этого ряда составим таблицу сумм таким образом, чтобы каждое число $N_j^{(g)}$, стоящее в j -й строке и g -м столбце этой таблицы, было равно сумме двух чисел, одно из которых $N_j^{(g-1)}$ стоит в той же строке предыдущего столбца, а другое $N_{j-1}^{(g)}$ — в предыдущей строке того же столбца:

$$N_j^{(g)} = N_j^{(g-1)} + N_{j-1}^{(g)}. \quad (2.36)$$

При этом выписывание чисел в таблице сумм оканчивается в каждом столбце на одну строку раньше, чем в предшествующем ему столбце.

Если таблица сумм составляется относительно начального значения, непосредственно предшествующего значению $X_{(1)}$ ряда распределения, то суммирование начинается с частоты n_k и производится по указанному правилу в направлении к начальному значению, причем в столбце (1) заканчивается на строке (1), в столбце (2) — на строке (2) и т. д.

Число, стоящее в строке (j) и столбце (g) этой таблицы, равно

$$N_j^{(g)} = \sum_{i=1}^k N_j^{(g-1)}, \quad (2.37)$$

где

$$j \geq g. \quad (2.38)$$

В частности,

$$N_j^{(1)} = \sum_{i=1}^k n_j. \quad (2.39)$$

Составленная таким образом таблица сумм, в которой числа $N_j^{(g)}$ выражены в частотах ряда распределения, будет иметь следующий вид (табл. 2.4).

Из правила составления таблицы сумм (2.36) и (2.37) следует, что сумма чисел каждого столбца равна сумме двух чисел, одно из которых стоит в последней строке данного столбца, а другое — в последней строке следующего за ним столбца. Сложим, например, последние числа столбца (3) и столбца (4) таблицы 2.4:

$$n_3 + 3n_4 + 6n_5 + \dots + \frac{(k-1)(k-2)}{2!} n_k,$$

$$n_4 + 4n_5 + \dots + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3!} n_k.$$

Таблица 2.4

Таблица сумм для одной случайной величины

| x_j | n_j | (1) | (2) | (3) | (4) |
|----------|---------------------------|--|---|--|---|
| (k) | n_k | n_k | n_k | n_k | n_k |
| $(k-1)$ | n_{k-1} | $n_{k-1} + n_k$ | $n_{k-1} + 2n_k$ | $n_{k-1} + 3n_k$ | $n_{k-1} + 4n_k$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| (4) | n_4 | $n_4 + n_5 + n_6 + \dots + n_k$ | $n_4 + 2n_5 + 3n_6 + \dots + (k-3)n_k$ | $n_4 + 3n_5 + 6n_6 + \dots + \frac{(k-2)(k-3)}{2!} n_k$ | $n_4 + 4n_5 + 10n_6 + \dots + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3!} n_k$ |
| (3) | n_3 | $n_3 + n_4 + n_5 + \dots + n_k$ | $n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \dots + (k-2)n_k$ | $n_3 + 3n_4 + 6n_5 + \dots + \frac{(k-1)(k-2)}{2!} n_k$ | _____ |
| (2) | n_2 | $n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_k$ | $n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \dots + (k-1)n_k$ | _____ | _____ |
| (1) | n_1 | $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ | _____ | _____ | _____ |
| Σ | $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ | $n_1 + 2n_2 + \dots + 3n_3 + \dots + kn_k$ | $n_2 + 3n_3 + 6n_4 + \dots + \frac{k(k-1)}{2!} n_k$ | $n_3 + 4n_4 + 10n_5 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} n_k$ | $n_4 + 5n_5 + 15n_6 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} n_k$ |
| - | $S_0 = \sum_{j=1}^k n_j$ | $S_1 = \sum_{j=1}^k x_j n_j$ | $S_2 = \sum_{j=1}^k \frac{x_j(x_j-1)}{2!} n_j$ | $S_3 = \sum_{j=1}^k \frac{[x_j(x_j-1) \times \dots \times (x_j-2)]}{3!} n_j$ | $S_4 = \sum_{j=1}^k \frac{[x_j(x_j-1) \times \dots \times (x_j-2)(x_j-3)]}{4!} n_j$ |

Замечая, что сумма коэффициентов при n_k равна

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2!} + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3!} = \frac{(k-1)(k-2)}{2!} \left(1 + \frac{k-3}{3}\right) = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!},$$

найдем, что сумма рассматриваемых чисел равна

$$n_3 + 4n_4 + 10n_5 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} n_k,$$

т. е. равна сумме всех чисел столбца (3). Это дает возможность проверять правильность составления таблицы.

Указанные суммы приведены внизу табл. 2.4.

Рассматривая эти суммы, мы приходим к заключению, что сумма S_g чисел (g) -го столбца таблицы сумм будет равна

$$S_g = \sum_{j=1}^k \frac{x_j^{[g]}}{g!} n_j. \quad (2.40)$$

По суммам S_g легко определяются начальные моменты случайных величин как обыкновенные, так и факториальные. Особенно простыми являются соотношения между суммами и факториальными моментами.

Сопоставляя (2.40) с (2.16), получим

$$nm_{[g]} = g! S_g. \quad (2.41)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} nm_{[1]} &= S_1, \\ nm_{[2]} &= 2S_2, \\ nm_{[3]} &= 6S_3, \\ nm_{[4]} &= 24S_4. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Определив факториальные моменты, мы можем на основании их найти обыкновенные моменты по формулам (2.31).

Обыкновенные моменты можно вычислить также непосредственно по суммам S_g , не прибегая к предварительному определению факториальных моментов.

Для этого, принимая во внимание (2.41) и полагая

$$c_{h,g} = g! a_{h,g}, \quad (2.43)$$

мы можем формулу (2.30) заменить следующей:

$$m_h = \frac{1}{n} \sum_{g=1}^h c_{h,g} S_g. \quad (2.44)$$

Из формулы (2.43) видно, что коэффициенты при S_g в (2.44) легко получаются из таблицы чисел $a_{h,g}$, если каждое число этой таблицы умножить на факториал числа g , равного номеру столбца таблицы. Поступая таким образом, мы можем из табл. 2.1 чисел $a_{h,g}$ образовать таблицу чисел $c_{h,g}$, в которой коэффициенты при S_g в формуле обыкновенных моментов (2.44) даются непосредственно (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Числа $c_{h,g}$

| $h \backslash g$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------------|---|-----|------|--------|---------|---------|---------|--------|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | | | | | | |
| 3 | 1 | 6 | 6 | | | | | |
| 4 | 1 | 14 | 36 | 24 | | | | |
| 5 | 1 | 30 | 150 | 240 | 120 | | | |
| 6 | 1 | 62 | 540 | 1 560 | 1 800 | 720 | | |
| 7 | 1 | 126 | 1800 | 8 400 | 16 800 | 15 120 | 5 040 | |
| 8 | 1 | 254 | 5796 | 40 824 | 126 000 | 191 520 | 141 120 | 40 320 |

Таблица чисел $c_{h,g}$ может быть составлена иным способом, а именно:

$$c_{h,g} = g(c_{h-1,g-1} + c_{h-1,g}), \quad (2.45)$$

т. е. для образования каждого числа $c_{h,g}$ этой таблицы надо умножить на номер данного столбца g сумму двух чисел предыдущей строки, одно из которых $c_{h-1,g-1}$ стоит в предыдущем, а другое $c_{h-1,g}$ — в данном столбце, причем

$$c_{1,1} = 1.$$

Так как при вычислении моментов начальное значение $X_{(a)}$ берется обычно в середине ряда, то при составлении таблицы сумм ряд распределения разбивается на две части — верхнюю и нижнюю, и суммирование чисел производится отдельно для каждой части. Поэтому, обозначая через S_g^+ и S_g^- суммы нижней (положительной) и верхней (отрицательной) части g -го столбца таблицы сумм, мы можем представить формулу (2.44) для вычисления m_h в следующем виде:

$$m_h = \frac{1}{n} \sum_{g=1}^h c_{h,g} [S_g^+ + (-1)^h S_g^-]. \quad (2.46)$$

Вводя обозначения

$$s_g = S_g^+ + S_g^-, \quad d_g = S_g^+ - S_g^- \quad (2.47)$$

и выписывая коэффициенты $c_{h,g}$ из табл. 2.5, получим формулы для вычисления моментов по способу сумм. Для момента m_h надо взять из h -й строки этой таблицы все числа, причем число столбца (1) будет коэффициентом при s_1 (в моментах четного порядка) или при d_1 (в моментах нечетного порядка); число столбца (2) будет коэффициентом при s_2 (или d_2) и т. д. Например, взяв для определения m_1 , m_2 , m_3 и m_4 числа 1, 2, 3 и 4-й строк таблицы чисел $c_{h,g}$, получим следующие формулы для вычисления обыкновенных моментов по способу сумм:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{d_1}{n}, \\ m_2 &= \frac{s_1 + 2s_2}{n}, \\ m_3 &= \frac{d_1 + 6d_2 + 6d_3}{n}, \\ m_4 &= \frac{s_1 + 14s_2 + 36s_3 + 24s_4}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

При вычислении моментов по способу сумм необходимо, прежде всего, построить таблицу сумм.

Вычислим, например, первые четыре момента для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали σ_B (табл. 1.10), приняв $X_{(a)} = 56 \text{ кг/мм}^2$. В этом случае таблица сумм будет иметь следующий вид (табл. 2.6).

В таблице сумм, кроме столбца значений и столбца частот, помещаются еще нумерованные столбцы в числе, на единицу большем сравнительно с числом вычисляемых моментов; кроме того, с правой стороны таблицы присоединяются два столбца для проверки вычислений.

Против частоты, соответствующей начальному значению, проводится черта через все нумерованные столбцы таблицы. Благодаря этому вся таблица разбивается на две части — верхнюю и нижнюю; в каждой из этих частей суммирование производится отдельно.

При составлении таблицы сумм применяется формула (2.36): для образования каждого числа таблицы сумм складываются два числа, одно из которых стоит рядом с образуемым числом слева, а другое — непосредственно над образуемым числом (в верхней части таблицы), или непосредственно под образуемым числом (в нижней части таблицы). Суммирование в каждой части таблицы производится по направлению от конца столбца к середине и прекращается в каждом столбце на один разряд раньше, чем в предыдущем столбце.

Заметим при этом, что если частота какого-либо разряда равна нулю, то при образовании чисел столбца (1) эта частота все же

Т а б л и ц а 2.6

Схема вычисления моментов по способу сумм (для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали)

| $x_{(j)}$ | n_j | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | $x_{(j)} + 1$ | Числа из табл. IV |
|---|-------|-----|-----|-----|-----|-----|---|-------------------|
| 48 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | -3 | 243 |
| 50 | 17 | 20 | 23 | 26 | — | — | -2 | 272 |
| 52 | 75 | 95 | 118 | — | — | — | -1 | 75 |
| 54 | 194 | 289 | — | — | — | — | 0 | 0 |
| 56 | 228 | | | | | | +1 | 228 |
| 58 | 155 | 274 | — | — | — | — | +2 | 2 480 |
| 60 | 91 | 119 | 152 | — | — | — | +2 | 7 371 |
| 62 | 23 | 28 | 33 | 38 | — | — | +4 | 5 888 |
| 64 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | — | +5 | 3 125 |
| $n = 791$ | | 407 | 144 | 29 | 3 | — | Σ | 19 682 |
| — | — | 426 | 190 | 43 | 5 | — | $m_4^* = \frac{19682}{791} = 24,882$ | |
| — | s | 833 | 334 | 72 | 8 | — | | |
| — | d | +19 | +46 | +14 | +2 | — | | |
| $m_1 = \frac{+19}{791} = +0,024$ $m_2 = \frac{833 + 2 \cdot 334}{791} = \frac{1501}{791} = 1,898$ $m_3 = \frac{19 + 6 \cdot 46 + 6 \cdot 14}{791} = \frac{+379}{791} = +0,479$ $m_4 = \frac{833 + 14 \cdot 334 + 36 \cdot 72 + 24 \cdot 8}{791} = \frac{8293}{791} = 10,484$ | | | | | | | $m_0 = 1,000$ $4m_1 = 0,096$ $6m_2 = 11,388$ $4m_3 = 1,916$ $m_4 = 10,484$ <hr/> 24,884 | |

принимается во внимание, т. е. число соответствующей строки в столбце (1) непременно выписывается.

Внизу каждого столбца выписываются суммы чисел верхней (отрицательной) и нижней (положительной) части столбца. Кроме того, под каждым столбцом выписываются суммы s_g этих сумм и разности d_g , для получения которых надо из нижней суммы вычесть верхнюю.

При составлении таблицы сумм следует обратить внимание на порядок вычислительной работы, в котором надо выполнять вычисления при образовании каждого столбца таблицы сумм:

- 1) сначала производится составление чисел столбца,
- 2) затем делается проверка,
- 3) наконец, выполняется суммирование верхней и нижней части столбца.

Располагая вычислительную работу всегда в указанном порядке и производя вычисления на счетах, можно достигнуть значительной быстроты вычислений с полной уверенностью в правильности их.

Каждая стадия вычислений при составлении таблицы сумм сопровождается проверкой.

Для проверки правильности составления столбца (1) надо сложить наибольшие числа верхней и нижней частей столбца (1) с частотой, стоящей против начального значения. Сумма этих трех чисел (стоящих непосредственно над чертой, под чертой и против черты) должна быть равной итогу столбца частот. Это положение ясно из самого составления чисел столбца (1). В рассматриваемом примере имеем

$$289 + 274 + 228 = 791.$$

Проверка составления столбца (2) и следующих столбцов тоже очень проста, а именно: если к последнему (т. е. ближайшему к черте, проведенной против начального значения, или наибольшему) числу той или иной части данного столбца прибавить последнее число той же самой части предыдущего столбца, то получится сумма соответствующей части предыдущего столбца [ср. (2.36)]. Так, в рассматриваемом примере, прибавляя к последнему (т. е. наибольшему) числу 38 положительной (т. е. нижней) части столбца (3) последнее число 152 положительной части столбца (2), получим итог положительной части второго столбца, 190.

Убедившись в правильности составления таблицы сумм, переходим к вычислению моментов по формулам (2.48). Подставляя в эти формулы вместо s и d соответствующие суммы и разности из таблицы сумм и производя действия, указанные в этих формулах, находим искомые моменты. Результаты выполненных действий помещаются в нижней части схемы. В рассматриваемом примере имеем

$$m_1 = + 0,024, \quad m_2 = 1,898, \quad m_3 = + 0,479, \quad m_4 = 10,484.$$

Для проверки правильности полученных значений моментов применяется способ, описанный выше при вычислении моментов по способу произведений, — формула (2.34).

Поступая подобным же образом, найдем моменты для ряда распределения ударной вязкости осевой стали (табл. 1.11):

$$m_1 = + 0,215, \quad m_2 = 2,448, \quad m_3 = + 2,665, \quad m_4 = 16,602.$$

5. Центральные и основные моменты. Начальные моменты сами по себе не имеют большого прикладного значения; они являются только вспомогательными величинами для вычисления других моментов. Объясняется это тем, что начальные моменты оказываются

различными в зависимости от того, какое значение принято за начальное.

В табл. 2.8 и на рис. 2.1 показано, как изменяются моменты в зависимости от изменения начального значения для ряда распределения, приведенного в табл. 2.7.

Таблица 2.7

Ряд распределения

| $X_{(i)}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|-----------|---|---|----|----|----|----|----|---|---|----------|
| n_i | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | 256 |

Таблица 2.8

Изменение моментов в зависимости от начального значения

| $X_{(a)}$ | m_1 | m_2 | m_3 | m_4 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | +4 | 18 | +88 | 459 |
| 1 | +3 | 11 | +45 | 200 |
| 2 | +2 | 6 | +20 | 75 |
| 3 | +1 | 3 | +7 | 24 |
| 4 | 0 | 2 | 0 | 11 |
| 5 | -1 | 3 | -7 | 24 |
| 6 | -2 | 6 | -20 | 75 |
| 7 | -3 | 11 | -45 | 200 |
| 8 | -4 | 18 | -88 | 459 |

Среди начальных моментов непосредственно применяется только первый момент m_1 , при помощи которого вычисляется среднее разрядных значений ряда распределения.

Формула для вычисления среднего значения при помощи первого момента выводится из (2.7) и имеет вид

$$\bar{X} = X_{(a)} + m_1 c. \quad (2.49)$$

Таким образом, для вычисления среднего значения надо к начальному значению прибавить первый момент, умноженный на величину разряда. Например, для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали имеем (см. табл. 2.6)

$$X_{(a)} = 56 \text{ кг/мм}^2, \quad m_1 = +0,024, \quad c = 2 \text{ кг/мм}^2.$$

Следовательно,

$$\bar{X} = 56 + 0,024 \cdot 2 = 56,048 \text{ кг/мм}^2.$$

Для ряда распределения модуля упругости E при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели имеем

$$X_{(a)} = 130\,000 \text{ кг/см}^2, \quad m_1 = -0,082, \quad c = 14000 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно,

$$\bar{X} = 130\,000 + (-0,082) \cdot 14000 = 128\,852 \text{ кг/см}^2.$$

Вычисление среднего значения при помощи первого момента по формуле (2.49) гораздо проще, чем непосредственное вычисление по формуле (1.21) (см. табл. 1.21).

Среднее значение представляет центр, относительно которого в каком-то смысле распределяются все наблюдаемые значения случайной величины. Этот центр является постоянной величиной для данного ряда распределения. В силу этого моменты, вычисляемые относительно среднего значения, называются центральными моментами ряда; их в широкой мере используют при исследованиях.

Центральные моменты μ_h определяются по такой же формуле, как и начальные моменты, только вместо отклонений от начального значения (1.9) берутся отклонения от среднего значения:

$$\frac{X_{(j)} - \bar{X}}{c} = \frac{X_{(j)} - (X_{(a)} + m_1 c)}{c} = \frac{X_{(j)} - X_{(a)}}{c} - m_1 = x_{(j)} - m_1. \quad (2.50)$$

Таким образом,

$$\mu_h = \frac{\sum_{j=1}^k (x_{(j)} - m_1)^h n_j}{n}. \quad (2.51)$$

Непосредственное вычисление центральных моментов оказывается довольно трудным. Объясняется это тем, что средние значения, относительно которых вычисляются центральные моменты, выражаются обычно многозначными числами. Поэтому при вычислении центральных моментов пользуются сравнительно легко определяемыми начальными моментами.

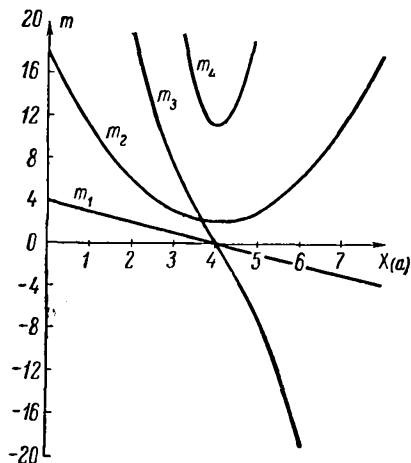


Рис. 2.1. Изменение моментов в зависимости от изменения начального значения.

Соотношения между центральными и начальными моментами получаются из формулы (2.51) и могут быть представлены или в виде

$$\mu_h = \sum_{g=0}^h (-1)^g \frac{h!}{g! (h-g)!} m_{h-g} m_1^g, \quad (2.52)$$

или же в виде

$$\mu_h = m_h - \sum_{g=1}^h \frac{h!}{g! (h-g)!} \mu_{h-g} m_1^g. \quad (2.53)$$

Из (2.52) получаем формулы для вычисления центральных моментов

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = m_2 - m_1^2, \\ \mu_3 &= m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3, \\ \mu_4 &= m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Из (2.53) получаем формулы для проверки вычисления центральных моментов

$$\left. \begin{aligned} \mu_3 &= m_3 - 3\mu_2 m_1 - m_1^3, \\ \mu_4 &= m_4 - 4\mu_3 m_1 - 6\mu_2 m_1^2 - m_1^4. \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Вычисляя центральные моменты по формулам (2.54) и (2.55), мы должны получить одинаковые значения, причем при вычислении μ_3 ввиду округлений при промежуточных вычислениях допускается расхождение в третьем знаке после запятой, а при вычислении μ_4 — во втором знаке после запятой.

Вычислим, например, центральные моменты для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали. Подставляя начальные моменты (табл. 2.6) в формулы (2.54) и проверяя по формулам (2.55), находим

$$\mu_2 = 1,897, \quad \mu_3 = +0,342, \quad \mu_4 = 10,446.$$

Подобным же образом, вычисляя центральные моменты для ряда распределения ударной вязкости осевой стали, находим

$$\mu_2 = 2,402, \quad \mu_3 = +1,106, \quad \mu_4 = 14,987.$$

Второй центральный момент

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 \quad (2.56)$$

называется *дисперсией* ряда и обозначается через σ^2 , а квадратный корень из дисперсии, взятый с положительным знаком, называется *основным отклонением* ряда σ :

$$\sigma = +\sqrt{\mu_2}. \quad (2.57)$$

Вычисленная по этой формуле величина основного отклонения σ будет выражена в рабочих единицах, т. е. представляет отвлеченное число. При переходе же к единицам измерения надо умножить σ на величину разряда c , чтобы получить *именованное основное отклонение* $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma} = \sigma \cdot c \quad (2.58)$$

[ср. (1.23)].

Найдем, например, основное отклонение для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали. Здесь $\sigma = + \sqrt{1,897} = 1,3773$, $c = 2 \text{ кг/мм}^2$, следовательно,

$$\bar{\sigma} = 2,7546 \text{ кг/мм}^2$$

[ср. табл. 1.22].

Подобным же образом для ряда распределения ударной вязкости осевой стали имеем

$$\sigma = + \sqrt{2,402} = 1,5496, \quad c = 1 \text{ кгм/см}^2, \quad \bar{\sigma} = 1,5496 \text{ кгм/см}^2.$$

Из равенства (2.56) заключаем, что

$$m_2 \geq m_1^2, \quad (2.59)$$

следовательно $\mu_2 \geq 0$, как это показывает формула (2.51) при $h = 2$. Равенство

$$m_2 = m_1^2, \quad (2.60)$$

означающее, что

$$\sum_{j=1}^k (x_{(j)} - m_1)^2 n_j = 0,$$

будет иметь место только в том случае, когда тождественно $x_{(j)} - m_1 = 0$. Таким образом, равенство (2.59) означало бы, что все отклонения одинаковы, т. е. одинаковы и все разрядные значения. Итак, дисперсия всякого ряда распределения положительна и лишь тогда равна нулю, когда ряд имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{c} X_{(1)} \\ n_1 \end{array} \right\},$$

где $n_1 = n$.

Обратим особое внимание на то, что все рассуждения этой главы относились до сих пор всегда к ряду распределения по разрядам *наблюдаемых значений* некоторой случайной величины. Но можно также рассматривать распределение самой случайной величины, а под этим мы пока понимаем кривую распределения этой величины. В дальнейшем, в гл. IV, § 3, п. 1, для него также определены понятия начального и центрального моментов, дисперсии, основного отклонения и т. п. Чтобы не было путаницы, можно

для распределения случайной величины связать эти понятия со словами «случайная величина», а для ряда распределения — со словом «выборочный»; например, говорить соответственно: «центральный момент случайной величины порядка h » или «выборочный центральный момент порядка h ».

Итак, до сих пор шла речь о выборочных моментах. Моменты самой случайной величины, как мы сказали, определить можно, но эти моменты не бывают известны исследователю из-за незнания распределения самой случайной величины, и о них, стало быть, нужно судить по выборочным моментам. Последние не совпадают с соответствующими моментами самой случайной величины по двум причинам. Во-первых, потому, что частичная совокупность есть небольшая доля общей, и, во-вторых, потому, что мы применяем объединение наблюденных значений в разряды.

В самом деле, действие сводки значений случайной величины в разряды выражается в прибавлении к наблюденному значению положительной или отрицательной ошибки, которая может принимать все значения от $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$ величины разряда с одинаковой частотой. При вычислении среднего значения эти ошибки взаимно уравниваются, так что с увеличением величины разряда среднее значение может изменяться только случайно. При вычислении же дисперсии все ошибки, будучи возведены в квадрат, представляют положительные числа, и, следовательно, при увеличении величины разряда дисперсия будет в среднем увеличиваться. Это увеличение выражается в прибавлении постоянного количества, равного $\frac{1}{12}$ разряда.

Если объем частичной совокупности достаточно велик, так что частичная совокупность выступает как представительный образец общей совокупности, то влияние объединения в разряды можно в значительной степени устранить, употребляя так называемые *поправки Шеннарда*.

При этом необходимо выполнение некоторых условий, которые проще всего сформулировать на языке теории вероятностей. Грубо говоря, нужно, чтобы объем общей совокупности был достаточно велик, чтобы общая совокупность содержала практически любое значение изучаемого свойства из некоторого промежутка и, наконец, чтобы были конечны моменты самой случайной величины.

В тех случаях, когда обе ветви кривой распределения асимптотически приближаются к оси абсцисс, исправленные центральные моменты μ находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 &= \mu_2 - \frac{c^2}{12}, \\ \mu_3 &= \mu_3, \\ \mu_4 &= \mu_4 - \frac{c^2}{2} \mu_2 + \frac{7c^4}{240}, \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

или, полагая $c = 1$,

$$\left. \begin{aligned} \check{\mu}_2 &= \mu_2 - 0,083, \\ \check{\mu}_4 &= \mu_4 - 0,5\mu_2 + 0,029. \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Если объем частичной совокупности недостаточно велик, поправки моментов имеют второстепенное значение сравнительно с ошибками, возникающими в зависимости от случайного состава частичных совокупностей. Поэтому, вообще говоря, не следует вводить поправок при вычислении моментов до тех пор, пока объем ряда не будет достаточно большим.

Необходимость в поправках моментов совершенно отпадает, если при составлении ряда распределения будет принята такая величина разряда, что поправки моментов окажутся ничтожными и, следовательно, могут быть отброшены.

Из формул (2.61) следует, что поправка в σ сводится к 1%, когда $c \approx 0,49\sigma$, а поправка в μ_4 равна 1%, когда $c \approx 0,25\sigma$. Так как ошибка в 1% при вычислении σ несущественна, то при сводке данных наблюдения следует объединять значения в разряды так, чтобы величина разряда c не превышала половины основного отклонения:

$$c \leq 0,5\sigma. \quad (2.63)$$

Среди начальных и центральных моментов самостоятельное значение имеют начальный момент первого порядка m_1 и центральный момент второго порядка μ_2 . Первый начальный момент служит для вычисления среднего значения (2.49), т. е. характеризует положение ряда. Второй центральный момент (2.56), или дисперсия, является характеристикой рассеяния значений случайной величины.

Вообще же говоря, начальные и центральные моменты служат для вычисления основных моментов, представляющих вполне определенные численные характеристики различных свойств случайных величин.

Заменяя в (2.1) отклонения $x_{(j)}$ нормированными значениями случайной величины ξ

$$\xi_{(j)} = \frac{x_{(j)} - m_1}{\sigma}, \quad (2.64)$$

получим основные моменты

$$r_h = \sum_{j=1}^n p_j' \xi_{(j)}^h. \quad (2.65)$$

Значения $\xi_{(j)}$ называются нормированными значениями случайной величины, так как в этом случае

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^k p'_j \xi_{(j)} &= 0, \\ \sum_{j=1}^k p'_j \xi_{(j)}^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

Из (2.65) находим

$$r_h = \frac{\mu_h}{\sigma^h}, \quad (2.67)$$

т. е. основной момент равен отношению центрального момента того или иного порядка к основному отклонению в соответствующей степени. В частности,

$$r_0 = 1, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad r_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}. \quad (2.68)$$

Третий основной момент r_3 служит мерой косости кривой распределения

$$\alpha = r_3, \quad (2.69)$$

а разность между четвертым основным моментом и числом 3 служит мерой крутости кривой распределения

$$\iota = r_4 - 3. \quad (2.70)$$

Вычислим, например, основные моменты для ряда распределения ударной вязкости осевой стали. Имеем $r_3 = +0,297$, $r_4 = 2,664$. Следовательно, для рассматриваемого ряда

$$\alpha = +0,297, \quad \iota = -0,336.$$

Подробным же образом находим основные моменты для ряда распределения предела прочности при разрыве осевой стали $r_3 = +0,131$, $r_4 = 2,903$. Следовательно, для этого ряда

$$\alpha = +0,131, \quad \iota = -0,097.$$

Для проверки вычисления основных моментов вычислительная работа производится различными способами — на арифмометре и при помощи таблицы логарифмов.

О границах изменения четвертого основного момента можно сделать заключение, применяя неравенство (2.59). Из этого неравенства следует, что для любой величины z :

$$\sum_{j=1}^k p'_j z_{(j)}^2 \geq \left(\sum_{j=1}^k p'_j z_{(j)} \right)^2. \quad (2.71)$$

Полагая $z = \xi^2$, имеем

$$\sum_{j=1}^k p'_j \xi_j^4 \geq \left(\sum_{j=1}^k p'_j \xi_j^2 \right)^2,$$

или, принимая во внимание (2.66), находим

$$r_4 \geq 1. \quad (2.72)$$

6. Моменты ряда натуральных чисел. Применим рассмотренные выше формулы к нахождению моментов ряда натуральных чисел

$$1, 2, \dots, l, \dots, n. \quad (2.73)$$

Положим, что случайная величина X принимает значения (2.73) с одинаковыми частотами $1/n$. Момент h -го порядка этой величины относительно нуля будет равен

$$m_h = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n l^h. \quad (2.74)$$

Найдем моменты

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n l, \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n l^2$$

и дисперсию

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2.$$

Для определения суммы $\sum_{l=1}^n l$ напомним натуральные числа в прямом и обратном порядке и сложим их почленно:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & & + & \dots & + & l & & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & \dots & + & (n-l+1) & + & \dots & + & 2 & & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{l=1}^n l &= n(n+1), \\ \sum_{l=1}^n l &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned} \quad (2.75)$$

и

$$m_1 = \frac{n+1}{2}. \quad (2.76)$$

Для определения $\sum_{l=1}^n l^2$ напомним ряд очевидных равенств:

$$\begin{aligned}(1+1)^3 &= 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1^3, \\(1+2)^3 &= 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3, \\(1+3)^3 &= 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 3^3, \\&\vdots \\[1+(n-1)]^3 &= 1 + 3(n-1) + 3(n-1)^2 + (n-1)^3.\end{aligned}$$

Складывая эти равенства и замечая, что кубы чисел, входящих в левую и правую части, сокращаются, кроме n^3 и 1^3 , находим $n^3 = (n-1) + 3[1+2+\dots+(n-1)] + 3[1^2+2^2+\dots+(n-1)^2] + 1$,

откуда, замечая, что согласно (2.75) $\sum_{l=1}^{n-1} l = \frac{n(n-1)}{2}$, находим

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n^3 - n}{3} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Прибавляя n^2 в обеих частях этого равенства, получим

$$\sum_{l=1}^n l^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2.77)$$

Следовательно,

$$m_2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2.78)$$

Наконец, дисперсия ряда натуральных чисел будет равна

$$\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12}. \quad (2.79)$$

§ 2. Моменты в случае двумерной частичной совокупности

1. Смешанные моменты. Исследование связи между случайными величинами, так же как и исследование распределения, начинается с вычисления соответствующих моментов. Среди них в случае двумерной частичной совокупности наиболее важное значение имеют так называемые смешанные моменты различных порядков.

Смешанным начальным моментом порядка (h_1, h_2) распределения по разрядам совокупно наблюдаемых значений двух случайных величин X_1 и X_2 называется сумма произведений каждой пары отклонений $x_{1(j)}$ и $x_{2(j)}$ (соответственно от начальных значений

$X_{1(a)}$ и $X_{2(a)}$), взятых в h_1 -й и h_2 -й степени, на соответствующую частость $p'_{j_1|j_2}$:

$$m_{h_1|h_2} = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{j_1|j_2} x_{1(j_1)}^{h_1} x_{2(j_2)}^{h_2}. \quad (2.80)$$

Придавая в этой формуле разные значения показателям h_1 и h_2 , получим частные случаи смешанных моментов

$$m_{1|1}, m_{2|1}, m_{1|2}, m_{3|1}, m_{1|3}, m_{2|2}, \dots$$

Полагая $h_2 = 0$, получим момент $m_{h_1|0}$ случайной величины X_1 ; полагая $h_1 = 0$, получим момент $m_{0|h_2}$ случайной величины X_2 .

Если в (2.80) отклонения от начальных значений заменим отклонениями от средних значений, то получим смешанный центральный момент порядка (h_1, h_2) :

$$\mu_{h_1|h_2} = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{j_1|j_2} (x_{1(j_1)} - m_{1|0})^{h_1} (x_{2(j_2)} - m_{0|1})^{h_2}. \quad (2.81)$$

Разлагая это выражение в ряд при различных значениях h_1 и h_2 , найдем следующие соотношения между смешанными центральными и начальными моментами:

$$\mu_{h_1|h_2} = \sum_{g_1=0}^{h_1} \sum_{g_2=0}^{h_2} (-1)^{g_1+g_2} \frac{h_1! h_2!}{g_1! (h_1 - g_1)! g_2! (h_2 - g_2)!} m_{h_1-g_1|h_2-g_2} m_{1|0}^{g_1} m_{0|1}^{g_2}. \quad (2.82)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} \mu_{1|1} &= m_{1|1} - m_{1|0} m_{0|1}, \\ \mu_{2|1} &= m_{2|1} - 2m_{1|1} m_{1|0} - m_{0|1} (\mu_{2|0} - m_{1|0}^2), \\ \mu_{1|2} &= m_{1|2} - 2m_{1|1} m_{0|1} - m_{1|0} (\mu_{0|2} - m_{0|1}^2), \\ \mu_{3|1} &= m_{3|1} - 3m_{2|1} m_{1|0} + 3m_{1|1} m_{1|0}^2 - m_{0|1} (\mu_{3|0} + m_{1|0}^3), \\ \mu_{1|3} &= m_{1|3} - 3m_{1|2} m_{0|1} + 3m_{1|1} m_{0|1}^2 - m_{1|0} (\mu_{0|3} + m_{0|1}^3), \\ \mu_{2|2} &= m_{2|2} - 2(m_{2|1} m_{0|1} + m_{1|2} m_{1|0}) + 4m_{1|1} m_{1|0} m_{0|1} + \\ &\quad + m_{1|0}^2 (\mu_{0|2} - m_{0|1}^2) + m_{0|1}^2 \mu_{2|0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

Соотношения между смешанными центральными и начальными моментами могут принять также иной вид, если применить выражение

$$m_{h_1|h_2} = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{j_1|j_2} [(x_{1(j_1)} - m_{1|0}) + m_{1|0}]^{h_1} [(x_{2(j_2)} - m_{0|1}) + m_{0|1}]^{h_2}. \quad (2.84)$$

На основании этой формулы получим, в частности,

$$\left. \begin{aligned} \mu_{111} &= m_{111} - m_{110}m_{011}, \\ \mu_{211} &= m_{211} - 2\mu_{111}m_{110} - m_{210}m_{011}, \\ \mu_{112} &= m_{112} - 2\mu_{111}m_{011} - m_{012}m_{110}, \\ \mu_{311} &= m_{311} - 3\mu_{211}m_{110} - 3\mu_{111}m_{110}^2 - m_{310}m_{011}, \\ \mu_{113} &= m_{113} - 3\mu_{112}m_{011} - 3\mu_{111}m_{011}^2 - m_{013}m_{110}, \\ \mu_{212} &= m_{212} - 2(\mu_{211}m_{011} + \mu_{112}m_{110}) - 4\mu_{111}m_{110}m_{011} - \\ &\quad - m_{012}m_{110}^2 - \mu_{210}m_{011}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

Первый смешанный центральный момент μ_{111} называется ко-вариацией.

В тех случаях, когда частоты таблицы распределения постепенно переходят к нулю по мере удаления от центра таблицы, применяются поправки смешанных центральных моментов

$$\left. \begin{aligned} \check{\mu}_{111} &= \mu_{111}, \quad \check{\mu}_{211} = \mu_{211}, \quad \check{\mu}_{112} = \mu_{112}, \\ \check{\mu}_{311} &= \mu_{311} - 0,25\mu_{111}, \quad \check{\mu}_{113} = \mu_{113} - 0,25\mu_{111}, \\ \check{\mu}_{212} &= \mu_{212} - 0,083(\mu_{210} + \mu_{012}) + 0,007. \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

Смешанные основные моменты порядка (h_1, h_2) находятся при помощи центральных моментов

$$r_{h_1 h_2} = \frac{\mu_{h_1 h_2}}{\sigma_1^{h_1} \sigma_2^{h_2}}. \quad (2.87)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} r_{111} &= \frac{\mu_{111}}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad r_{211} = \frac{\mu_{211}}{\sigma_1^2 \sigma_2}, \quad r_{112} = \frac{\mu_{112}}{\sigma_1 \sigma_2^2}, \\ r_{311} &= \frac{\mu_{311}}{\sigma_1^3 \sigma_2}, \quad r_{113} = \frac{\mu_{113}}{\sigma_1 \sigma_2^3}, \quad r_{212} = \frac{\mu_{212}}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

Смешанный основной момент порядка $(1,1)$ r_{111} называется коэффициентом корреляции и обозначается через r :

$$r = \frac{\mu_{111}}{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (2.89)$$

2. Вычисление смешанных моментов по способу произведений.

Смешанные моменты могут быть вычислены как по способу произведений, так и по способу сумм.

По способу произведений вычисляется m_{111} . Для этого применяется схема, в которой наряду с таблицей распределения составляется еще вспомогательная таблица. В качестве примера

вычислим m_{11} для таблицы распределения ударной вязкости Π предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.17).

В верхней части схемы (табл. 2.9) выписывается таблица распределения, в заголовках которой разрядные значения первой величины — ударной вязкости — и второй величины — предела прочности при разрыве — заменяются отклонениями x_1 и x_2 этих значений от соответствующих начальных значений.

Частоты строки и столбца таблицы, расположенных против отклонений, равных нулю, будучи умножены на нуль, дадут в результате нуль. Выделив эти нулевые строку и столбец при помощи жирных линий, мы разделим всю таблицу распределения на четыре четверти.

В I (левой верхней) четверти таблицы частоты должны быть умножены на отрицательные отклонения $x_{1(j_1)}$ и отрицательные отклонения $x_{2(j_2)}$; во II (правой верхней) четверти отклонения x_1 отрицательны, а отклонения x_2 положительны; в III (левой нижней) четверти отклонения x_1 положительны, а отклонения x_2 отрицательны; в IV (правой нижней) четверти как отклонения x_1 , так и отклонения x_2 положительны.

Таким образом, в I и IV четвертях частоты должны быть умножены на положительные произведения отклонений $(+x_1x_2)$, а во II и III четвертях — на отрицательные произведения отклонений $(-x_1x_2)$. Каждое такое произведение отклонений с указанием знака выписывается в правом верхнем углу соответствующей клетки таблицы распределения цифрами малого размера.

В нижней части схемы помещается вспомогательная таблица, состоящая из десяти столбцов (0) — (9). В столбце (0) выписывают в возрастающем порядке, не обращая внимание на знак и на число повторений, все произведения отклонений x_1x_2 , помеченные маленькими цифрами в клетках таблицы распределения. В столбце (1) против соответствующих абсолютных произведений отклонений выписывают из I четверти таблицы распределения все частоты, соединяя их знаком плюс. Подобным же образом, в столбцах (2), (3) и (4) выписывают все частоты из II, III и IV четвертей таблицы распределения. В столбце (5) записывают суммы чисел каждой строки столбцов (1) и (4), а в столбце (6) — суммы чисел каждой строки столбцов (2) и (3). Затем находят итоги чисел столбцов (5) и (6). В рассматриваемом примере итог столбца (5) равен 119, а итог столбца (6) равен 293.

Прежде чем делать дальнейшие вычисления, необходимо произвести проверку правильности предыдущей работы. Для этого складывают итоги столбцов (5) и (6) вспомогательной таблицы с итогами нулевой строки и нулевого столбца таблицы распределения и из полученной суммы вычитают число, стоящее в центральной нулевой клетке таблицы распределения, так как это число, как не-

трудно видеть, было подсчитано дважды. В результате таких действий должно получиться число, равное объему таблицы распределения. В рассматриваемом примере имеем

$$119 + 293 + 214 + 228 = 854, \quad 854 - 63 = 791.$$

Проверка записывается в верхней части столбца (9) вспомогательной таблицы (проверка ¹)).

Убедившись, таким образом, в правильности проделанной вычислительной работы, составляют затем числа столбца (7), которые получаются путем вычитания чисел столбца (6) из чисел столбца (5); при этом необходимо проставлять знак полученной разности. Для проверки этого шага вычислительной работы заметим, что сумма чисел столбца (7) должна равняться разности итогов столбцов (5) и (6). В рассматриваемом случае

$$119 - 293 = -174.$$

Эта проверка записывается в средней части столбца (9) (проверка ²)).

Последний шаг работы при вычислении смешанного момента m_{11} делается в столбце (8) вспомогательной таблицы. В этом столбце помещаются произведения чисел столбцов (0) и (7). Сумма чисел столбца (8) представляет числитель смешанного момента m_{11} . Разделив эту сумму на объем таблицы распределения, получим искомый смешанный момент. В рассматриваемом примере имеем

$$m_{11} = -561/791 = -0,709.$$

Найденное значение момента m_{11} записывается в нижней части вспомогательной таблицы.

Заметим, что если составлена вспомогательная таблица для вычисления m_{11} , то легко найти также m_{212} . Для этого надо возвести в квадрат числа столбца (0) вспомогательной таблицы и перемножить их на соответствующие суммы, образованные из чисел столбцов (5) и (6) (табл. 2.10). Разделив сумму этих произведений на объем таблицы распределения, получим m_{212} .

Что же касается вычисления смешанных моментов других порядков по способу произведений, то здесь возникают значительные трудности.

3. Вычисление смешанных моментов по способу сумм. Большой объем вычислительной работы и отсутствие возможности полной проверки в самом ходе вычислений момента m_{11} являются существенными недостатками способа произведений. Для вычисления же смешанных моментов более высокого порядка этот способ оказывается совершенно непригодным.

Поэтому в качестве рабочего способа при вычислении смешанных моментов следует применять способ сумм. Этот способ и

более легок и в то же время дает возможность проверки вычисления на каждом шагу работы.

Останавливаясь сначала на вычислении m_{11} , образуем из таблицы распределения *первую таблицу сумм*, итог которой по делении на сумму всех частот даст искомый момент. В качестве примера возьмем таблицу распределения ударной вязкости и предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.17).

Строение первой таблицы сумм (табл. 2.11) такое же, как и таблицы распределения, только вместо одной итоговой строки и

Таблица 2.10

Вычисление m_{212} по способу произведений для таблицы распределения ударной вязкости и предела прочности при разрыве осевой стали

| Квадраты чисел столбца (0) | Суммы чисел столбцов (5) и (6) | Произведения |
|--------------------------------------|--------------------------------|--------------|
| 1 | 129 | 129 |
| 4 | 144 | 576 |
| 9 | 46 | 414 |
| 16 | 55 | 880 |
| 36 | 24 | 864 |
| 64 | 7 | 448 |
| 81 | 4 | 324 |
| 144 | 2 | 288 |
| 256 | 1 | 256 |
| Σ | 412 | 4179 |
| $m_{212} = \frac{4179}{791} = 5,283$ | | |

одного итогового столбца берутся три итоговые строки и три итоговых столбца. Нулевая строка и нулевой столбец, выделяемые жирными линиями, делят таблицу сумм на четыре четверти. В каждой из этих четвертей таблицы сумм составляют числа по определенному правилу. В конечном итоге таблицы сумм получается число, совпадающее с суммой, стоящей в числителе при вычислении m_{11} по способу произведений.

В основу составления чисел в каждой четверти таблицы сумм положены следующие соображения, следствием которых является устанавливаемое ниже правило (2.90). Возьмем,

например, частоту клетки таблицы распределения (табл. 2.9) с заголовками: $x_1 = -2$, $x_2 = -2$. Эта частота, равная 5, при вычислении m_{11} по способу произведений должна быть умножена на +4, как показывает маленькая цифра, стоящая в правом верхнем углу клетки. Но, очевидно, того же результата мы достигнем, если частоту 5 возьмем слагаемым четыре раза, поместив эти слагаемые в четырех клетках I четверти, а именно, в данной клетке и во всех других клетках, находящихся внизу и направо от данной. Подобным же образом, частота 2 в клетке с заголовками: $x_1 = -3$, $x_2 = +3$, должна быть при вычислении m_{11} по способу произведений умножена на -9. Но тот же результат мы получим, если частоту 2 возьмем слагаемым девять раз, поместив эти слагаемые в девяти клетках II четверти, а именно, в данной клетке и во всех других, расположенных внизу и налево от данной.

Таблица 2.11

Схема вычисления m_{III} по способу сумм

| $x_2 \backslash x_1$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 | +3 | +4 | (1) + | (2) - | (3) |
|----------------------|----|-----|-----|------|---|------|-----|-----|----|----------|----------|------|
| -4 | - | - | - | - | | 2 | 2 | 2 | 1 | - | 7 | -7 |
| -3 | - | - | - | - | | 10 | 7 | 4 | 1 | - | 22 | -22 |
| -2 | - | - | 5 | 12 | | 69 | 39 | 15 | 2 | 17 | 125 | -108 |
| -1 | 1 | 5 | 21 | 56 | | 146 | 73 | 20 | 2 | 83 | 241 | -158 |
| 0 | | | | | | | | | | | | |
| +1 | 2 | 11 | 48 | 147 | | 63 | 19 | 4 | - | 86 | 208 | -122 |
| +2 | 2 | 6 | 28 | 95 | | 30 | 12 | 3 | - | 45 | 131 | -86 |
| +3 | 1 | 3 | 11 | 41 | | 9 | 3 | - | - | 12 | 56 | -44 |
| +4 | - | - | 4 | 12 | | 1 | 1 | - | - | 2 | 16 | -14 |
| (1) + | 1 | 5 | 26 | 68 | | 103 | 35 | 7 | - | 245 | - | - |
| (2) - | 5 | 20 | 91 | 295 | | 227 | 121 | 41 | 6 | - | 803 | - |
| (3) | -4 | -15 | -65 | -227 | | -124 | -85 | -34 | -6 | - | - | -561 |

Составление чисел в каждой четверти таблицы сумм начинается с крайних углов таблицы и направляется к центру. Эти направления в каждой четверти таблицы сумм показаны стрелками на рис. 2.2. Таким образом, в левой верхней (I) четверти составление чисел таблицы сумм производится по направлению к центру — слева и сверху; в правой верхней (II) четверти — справа и сверху; в левой нижней (III) четверти — слева и снизу; в правой нижней (IV) четверти — справа и снизу.

При составлении каждого числа таблицы сумм применяется следующее *общее правило*:

$$N_{j+1|k} = N_{j+1|k-1} + N_{j-1|k} - N_{j-1|k-1} + n_{j+1|k}, \quad (2.90)$$

т. е. для образования каждого числа таблицы сумм надо сложить два числа этой таблицы, одно из которых стоит в клетке данной строки предыдущего столбца, а другое — в клетке предыдущей строки данного столбца, и вычесть число, стоящее в клетке предыдущей строки предыдущего столбца таблицы сумм; наконец, к полученному результату надо прибавить число, стоящее в данной

клетке таблицы распределения.

Для облегчения работы по составлению чисел таблицы сумм применяется *стрелка*, которая вырезается из плотной бумаги. В каждой четверти таблицы сумм стрелка должна быть обращена к центру таблицы, т. е. принимать положение, которое указано для каждой четверти на рис. 2.2. В таком случае в углу стрелки окажется клетка, для которой составляется число $N_{j+1|k}$, а крестики, помещенные на стрелке, покажут числа $N_{j+1|k-1}$ и $N_{j-1|k}$ таблицы сумм, которые надо сложить. Вычитать же надо число $N_{j-1|k-1}$, стоящее в клетке по диагонали от центра.

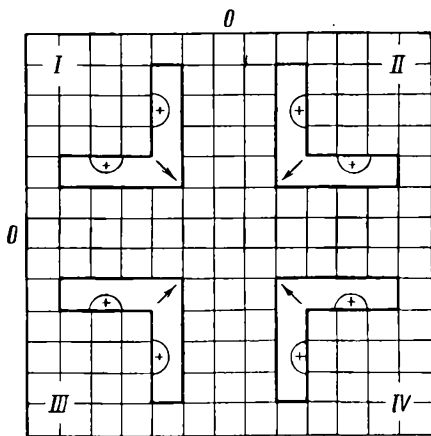


Рис. 2.2. Положение стрелки в каждой четверти таблицы сумм.

Работа по составлению чисел таблицы сумм при помощи стрелки располагается в каждой четверти таблицы следующим образом. Сначала стрелка накладывается на таблицу сумм так, чтобы внутри стрелки была открыта крайняя угловая клетка таблицы. В эту клетку переносится число из соответствующей клетки таблицы распределения. Затем стрелка передвигается по строке на одну клетку по направлению к нулевому столбцу, и в эту клетку таблицы сумм записывается сумма двух чисел, одно из которых стоит в предыдущей клетке таблицы сумм, а другое — в данной клетке таблицы распределения. И так далее. Таким образом, составление чисел первой строки каждой четверти таблицы сумм точно такое же, как при построении табл. 2.6.

При образовании чисел второй строки каждой четверти таблицы сумм стрелка накладывается сначала на таблицу сумм так, чтобы внутри стрелки была открыта крайняя клетка этой строки. Число этой клетки образуется путем сложения числа, стоящего

в клетке предыдущей строки данного столбца таблицы сумм, с числом, стоящим в данной клетке таблицы распределения. После этого стрелка передвигается на одну клетку по направлению к нулевому столбцу, и в эту клетку таблицы сумм записывается число, составленное по общему правилу, указанному выше (2.90). Так продолжается до последней клетки данной четверти.

Рассмотрим, например, порядок составления числа 56, стоящего в I четверти таблицы сумм против заголовков $x_1 = -1$, $x_2 = -1$. При этом стрелка займет на таблице сумм положение, показанное на рис. 2.3.

Применяя общее правило образования чисел таблицы сумм (2.90), мы должны сложить два числа таблицы сумм 21 и 12, одно из которых стоит в клетке данной строки предыдущего столбца, а другое в клетке предыдущей строки данного столбца, и вычесть число 5, стоящее в клетке предыдущей строки и предыдущего столбца таблицы сумм, т. е. в клетке по диагонали от центра; наконец, к полученному результату прибавить число 28, стоящее в данной клетке таблицы распределения. Имеем

$$21 + 12 - 5 + 28 = 56.$$

Подобным же образом число 39, стоящее в клетке II четверти таблицы сумм с заголовками $x_1 = -2$, $x_2 = +2$, получилось от сложения числа 21 данной клетки таблицы распределения с числами 15 и 7 таблицы сумм и вычитания числа 4 таблицы сумм:

$$15 + 7 - 4 + 21 = 39.$$

При употреблении русских счетов работа по составлению таблицы сумм становится совершенно механической и производится очень быстро и легко.

Благодаря применению указанного выше общего правила составления чисел первой таблицы сумм (2.90) не только облегчается вычислительная работа, но и достигается возможность проверки составления этих чисел. Так как, применяя это правило, мы связываем между собой все числа каждой четверти таблицы сумм, то, если окажутся верными наибольшие из этих чисел в каждой четверти таблицы сумм, будут верны также все остальные числа этой таблицы.

Из способа образования чисел первой таблицы сумм видно, что наибольшие в каждой четверти таблицы числа 56, 146, 147, 63,

| $x_1 \backslash x_2$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
|----------------------|----|----|----|----|---|
| -4 | - | - | - | - | - |
| -3 | - | - | - | - | |
| -2 | - | - | 5 | 12 | + |
| -1 | 1 | 5 | 21 | 56 | |
| 0 | | | + | | ↘ |

Рис. 2.3. Составление чисел таблицы сумм при помощи стрелки.

находящиеся в угловых клетках около центральной клетки, представляют суммы всех частот соответствующей четверти таблицы распределения. Поэтому, прибавляя к указанным числам итоги частот нулевой строки и нулевого столбца таблицы распределения и вычитая частоту центральной клетки этой таблицы, мы должны получить сумму всех частот таблицы распределения. Имеем

$$56 + 146 + 147 + 63 + 214 + 228 = 854, \quad 854 - 63 = 791.$$

Это служит проверкой правильности составления таблицы сумм ввиду отмеченной выше связанности чисел этой таблицы.

После этого находятся суммы чисел по строкам положительных (I и IV) четвертей таблицы сумм и выписываются в первом итоговом столбце; затем находят-

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|---|---|---|---|
| + | - | - | + | - | - | + | + |
| - | + | - | + | + | + | + | + |
| a) | b) | b) | 2) | | | | |

Рис. 24. Схемы знаков при вычислении смешанных моментов по способу сумм.

ся суммы чисел по строкам отрицательных (II и III) четвертей и выписываются во втором итоговом столбце; наконец, в третьем итоговом столбце выписываются разности между соответствующими числами первого и второго итоговых столб-

цов. Такой же подсчет выполняется по столбцам таблицы сумм. Проверкой вычислений служит то, что суммы соответствующих итоговых столбцов и строк должны быть равны между собой.

Сумма чисел третьего итогового столбца, как видно из способа ее образования, равна числителю смешанного момента $m_{1|1}$. Разделив эту сумму на сумму частот таблицы распределения, получим искомый смешанный момент:

$$m_{1|1} = -561/791 = -0,709,$$

т. е. то же самое число, что было найдено выше по способу производений.

Вычисление смешанного момента порядка (h_1, h_2) по способу сумм производится по следующей формуле:

$$m_{h_1|h_2} = \frac{1}{n} \sum_{g_1=1}^{h_1} \sum_{g_2=1}^{h_2} c_{h_1, g_1} c_{h_2, g_2} \{ (-1)^{h_1+h_2} S_{g_1|g_2}^I + (-1)^{h_1} S_{g_1|g_2}^{II} + (-1)^{h_2} S_{g_1|g_2}^{III} + S_{g_1|g_2}^{IV} \}, \quad (2.91)$$

где числа c_{h_1, g_1} , c_{h_2, g_2} берутся из табл. 2.5, а $S_{g_1|g_2}^I$, $S_{g_1|g_2}^{II}$, $S_{g_1|g_2}^{III}$, $S_{g_1|g_2}^{IV}$ представляют суммы I, II, III, IV четвертей таблицы сумм для двух случайных величин.

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} d_{g_1|g_2} &= S_{g_1|g_2}^I - S_{g_1|g_2}^{II} - S_{g_1|g_2}^{III} + S_{g_1|g_2}^{IV}, \\ d_{g_1|g_2}^{(a)} &= -S_{g_1|g_2}^I + S_{g_1|g_2}^{II} - S_{g_1|g_2}^{III} + S_{g_1|g_2}^{IV}, \\ d_{g_1|g_2}^{(b)} &= -S_{g_1|g_2}^I - S_{g_1|g_2}^{II} + S_{g_1|g_2}^{III} + S_{g_1|g_2}^{IV}, \\ s_{g_1|g_2} &= S_{g_1|g_2}^I + S_{g_1|g_2}^{II} + S_{g_1|g_2}^{III} + S_{g_1|g_2}^{IV} \end{aligned} \right\} \quad (2.92)$$

В таком случае формулы для смешанных моментов примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m_{1|1} &= \frac{d_{1|1}}{n}, \quad m_{2|1} = \frac{1}{n} (d_{1|1}^{(a)} + 2d_{2|1}^{(a)}), \\ m_{1|2} &= \frac{1}{n} (d_{1|1}^{(b)} + 2d_{1|2}^{(b)}), \quad m_{3|1} = \frac{1}{n} (d_{1|1} + 6d_{2|1} + 6d_{3|1}), \\ m_{1|3} &= \frac{1}{n} (d_{1|1} + 6d_{1|2} + 6d_{1|3}), \\ m_{2|2} &= \frac{1}{n} [s_{1|1} + 2(s_{2|1} + s_{1|2}) + 4s_{2|2}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

Схемы знаков в выражениях (2.92) показаны на рис. 2.4.

Схема (а) берется при вычислении моментов $m_{h_1|h_2}$, когда оба показателя h_1 и h_2 нечетные, например, $m_{1|1}$, $m_{3|1}$, $m_{1|3}$; схема (б) — при вычислении моментов, когда показатель h_1 четный, а h_2 нечетный, например, $m_{2|1}$; схема (в), когда показатель h_1 нечетный, а h_2 четный, например, $m_{1|2}$; схема (г), когда оба показателя h_1 и h_2 четные, например, $m_{2|2}$.

Для вычисления моментов $m_{h_1|1}$, у которых первый значок принимает разные значения, а второй значок равен единице, выпишем из первой таблицы сумм числа итоговых столбцов для I, II, III и IV четвертей. Образуя на основании этих чисел обычные таблицы сумм (см. верхнюю часть табл. 2.6) и применяя соответствующие формулы (2.93), найдем искомые моменты.

Вычисления располагаются в схеме, данной в табл. 2.12.

Здесь имеем [сопоставление приводимых вычислений с формулами (2.92) и нижней строкой табл. 2.12 даст числа $S_{g_1|1}^I$, $S_{g_1|1}^{II}$, $S_{g_1|1}^{III}$, $S_{g_1|1}^{IV}$]:

$$\begin{aligned} d_{1|1} &= 100 - 395 - 411 + 145 = -561, \\ d_{2|1} &= 17 - 190 - 291 + 75 = -389, \\ d_{3|1} &= 0 - 43 - 104 + 18 = -129, \\ d_{1|1}^{(a)} &= -100 + 395 - 411 + 145 = +29, \\ d_{2|1}^{(a)} &= -17 + 190 - 291 + 75 = -43. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$m_{1|1} = \frac{-561}{791} = -0,709, \quad m_{2|1} = \frac{29 + 2 \cdot (-43)}{791} = -0,072,$$

$$m_{3|1} = \frac{-561 + 6 \cdot (-389) + 6 \cdot (-129)}{791} = -4,638.$$

Подобным же образом, для вычисления моментов $m_{1|h_2}$, у которых первый значок равен единице, а второй значок принимает разные значения, составляется таблица сумм из чисел итоговых строк I, II, III и IV четвертей первой таблицы сумм. Подставляя найденные суммы в соответствующие формулы (2.93), получим искомые моменты.

Таблица 2.12

Вычисление смешанных моментов $m_{h_1|1}$

| I | | | | II | | | | III | | | | IV | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (1) | (2) | (3) | (4) | (1) | (2) | (3) | (4) | (1) | (2) | (3) | (4) |
| — | — | — | — | 7 | 7 | 7 | 7 | 16 | 16 | 16 | 16 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| — | — | — | — | 22 | 29 | 36 | — | 56 | 72 | 88 | — | 12 | 14 | 16 | — |
| 17 | 17 | — | — | 125 | 154 | — | — | 131 | 203 | — | — | 45 | 59 | — | — |
| 83 | — | — | — | 241 | — | — | — | 208 | — | — | — | 86 | — | — | — |
| 100 | 17 | — | — | 395 | 190 | 43 | 7 | 411 | 291 | 104 | 16 | 145 | 75 | 18 | 2 |

Вычисления располагаются в следующей схеме (табл. 2.13).

Здесь имеем [сопоставление приведенных вычислений с формулами (2.92) и нижней строкой табл. 2.13 даст числа $S_{1|g_2}^I$, $S_{1|g_2}^{II}$, $S_{1|g_2}^{III}$, $S_{1|g_2}^{IV}$]:

$$d_{1|1} = 100 - 395 - 411 + 45 = -561,$$

$$d_{1|2} = 39 - 221 - 116 + 49 = -279,$$

$$d_{1|3} = 8 - 59 - 35 + 7 = -79,$$

$$d_{1|1}^{(b)} = -100 - 395 + 411 + 145 = +61,$$

$$d_{1|2}^{(b)} = -39 - 221 + 146 + 49 = -65.$$

Следовательно,

$$m_{1|1} = \frac{-561}{791} = -0,709, \quad m_{1|2} = \frac{+61 + 2 \cdot (-65)}{791} = -0,087,$$

$$m_{1|3} = \frac{-561 + 6 \cdot (-279) + 6 \cdot (-79)}{791} = -3,425.$$

Таблица 2.13

Вычисление смешанных моментов $m_{1|h_2}$

| I | | | | II | | | | III | | | | IV | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (1) | (2) | (3) | (4) | (1) | (2) | (3) | (4) | (1) | (2) | (3) | (4) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | — | — | — | — |
| 5 | 6 | 7 | — | 41 | 47 | 53 | — | 20 | 25 | 30 | — | 7 | 7 | 7 | — |
| 26 | 32 | — | — | 121 | 168 | — | — | 91 | 116 | — | — | 35 | 42 | — | — |
| 68 | — | — | — | 227 | — | — | — | 295 | — | — | — | 103 | — | — | — |
| 100 | 39 | 8 | 1 | 395 | 221 | 59 | 6 | 411 | 146 | 35 | 5 | 145 | 49 | 7 | — |

Таблица 2.14

Вычисление смешанного момента $m_{2|2}$

| $x_2 \backslash x_1$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 | +3 | +4 | Σ |
|----------------------|----|----|----|----|---|----|-----|----|----|----------|
| -4 | | | | — | | — | 5 | 3 | 1 | 9 |
| -3 | | | | — | | — | 17 | 8 | 2 | 27 |
| -2 | | | 5 | — | | — | 73 | 25 | 4 | 107 |
| -1 | — | — | — | — | | — | — | — | — | — |
| 0 | | | | | | | | | | |
| +1 | — | — | — | — | | — | — | — | — | — |
| +2 | 3 | 12 | 55 | — | | — | 19 | 3 | | 92 |
| +3 | 1 | 4 | 19 | — | | — | 4 | | | 28 |
| +4 | | | 4 | — | | — | 1 | | | 5 |
| Σ | 4 | 16 | 83 | — | | — | 119 | 39 | 7 | 238 |

Для вычисления $m_{2|2}$ построим *вторую таблицу сумм*, которая составляется из первой таблицы сумм совершенно так же, как первая таблица сумм составлена из таблицы распределения, причем столбцы и строки, соседние с нулевыми, не заполняются (табл. 2.14).

Чтобы убедиться в правильности составления второй таблицы сумм, прибавим к наибольшим числам в клетках каждой четверти этой таблицы, т. е. к числам 5, 73, 55, 19, все числа, стоящие в столбцах и строках каждой четверти первой таблицы сумм, соответствующих отклонениям $+1$ и -1 . В итоге должна получиться общая сумма чисел первой таблицы сумм, т. е.

$$245 + 806 = 1051.$$

Имеем

$$5 + 73 + 55 + 19 + 95 + 322 + 356 + 126 = 1051.$$

Проверив правильность составления второй таблицы сумм, выпишем итоги каждой строки и каждого столбца этой таблицы и найдем сумму их. Эта сумма представит $s_{2|2}$. В данном случае $s_{2|2} = 268$.

Найдем также прочие суммы, входящие в формулу (2.93) момента $m_{2|2}$, применяя выражение (2.92). Имеем (см. табл. 2.12 и 2.13)

$$s_{1|1} = 100 + 395 + 145 + 411 = 1051,$$

$$s_{2|1} = 17 + 190 + 291 + 75 = 573,$$

$$s_{1|2} = 39 + 221 + 146 + 49 = 455.$$

Таким образом,

$$m_{2|2} = \frac{1}{791} [1051 + 2 \cdot (573 + 455) + 4 \cdot 268] = \frac{4179}{791} = 5,283,$$

т. е. получилось то же самое значение момента $m_{2|2}$, какое было найдено выше по способу произведений (табл. 2.10).

По смешанным начальным моментам находим смешанные центральные и основные моменты. Применяя формулы (2.83), (2.85), (2.88), получим

$$\mu_{1|1} = -0,714, \quad r_{1|1} = -0,335,$$

$$\mu_{2|1} = +0,176, \quad r_{2|1} = +0,053,$$

$$\mu_{1|2} = -0,332, \quad r_{1|2} = -0,113,$$

$$\mu_{3|1} = -4,717, \quad r_{3|1} = -0,920,$$

$$\mu_{1|3} = -3,495, \quad r_{1|3} = -0,889,$$

$$\mu_{2|2} = +5,472, \quad r_{2|2} = +1,201.$$

4. **Вычисление моментов при малом числе наблюдений.** Способы вычисления моментов, описанные выше, применяются в тех случаях, когда имеется достаточно большое число наблюдений и значения случайных величин сведены в ряды и таблицы распределения. В случае же малого числа наблюдений моменты и иные статистики вычисляются непосредственно на основании наблюдаемых значений случайных величин.

Найдем, например, средние значения, основные отклонения и коэффициент корреляции для предела прочности при кручении X_1 (кг/мм²) и предела выносливости при изгибе X_2 (кг/мм²) для 12 марок легированных сталей (по данным С. Л. Жукова *).

Вычисления располагаются по схеме табл. 2.15. В столбце (1) таблицы выписываются номера испытаний. В столбцах (2) и (3) приводятся наблюдаемые совместно значения первой и второй случайных величин; суммируя эти значения и деля на число испытаний, находим средние значения изучаемых величин. В столбцах (4) и (5) помещаются отклонения наблюдаемых значений от соответствующих начальных значений. В рассматриваемом примере

Таблица 2.15

Вычисление моментов и иных статистик в случае малого числа испытаний

| № | X_1 | X_2 | x_1 | x_2 | x_1^2 | x_2^2 | $x_1 x_2$ | $x_1 - x_2$ | $(x_1 - x_2)^2$ |
|----------|------------------|------------------|-------|-------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------|----------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
| 1 | 51 | 25 | -37 | -21 | 1369 | 441 | 777 | -16 | 256 |
| 2 | 67 | 30 | -21 | -16 | 441 | 256 | 336 | -6 | 25 |
| 3 | 84 | 43 | -4 | -3 | 16 | 9 | 12 | -1 | 1 |
| 4 | 81 | 44 | -7 | -2 | 49 | 4 | 14 | -5 | 25 |
| 5 | 101 | 57 | 13 | 11 | 169 | 121 | 143 | +2 | 4 |
| 6 | 109 | 58 | 21 | 12 | 441 | 144 | 252 | +9 | 81 |
| 7 | 71 | 43 | -17 | -3 | 289 | 9 | 51 | -14 | 196 |
| 8 | 97 | 46 | 9 | 0 | 81 | 0 | 0 | +9 | 81 |
| 9 | 109 | 62 | 21 | 16 | 441 | 256 | 336 | +5 | 25 |
| 10 | 91 | 45 | 3 | -1 | 9 | 1 | -3 | +4 | 16 |
| 11 | 105 | 55 | 17 | 9 | 289 | 81 | 153 | +8 | 64 |
| 12 | 89 | 44 | 1 | -2 | 1 | 4 | -2 | +3 | 9 |
| Σ | 1055 | 552 | -1 | 0 | 3595 | 1326 | 2069 | -1 | 783 |
| — | $\bar{X}_1 = 88$ | $\bar{X}_2 = 46$ | — | — | $\mu_{2 0} =$ $= 299,6$ | $\mu_{0 2} =$ $= 110,5$ | $\mu_{1 1} =$ $= 172,4$ | — | $\mu_{2(d)} =$ $= 65,3$ |
| — | — | — | — | — | $\sigma_1 = 17,3$ | $\sigma_2 = 10,5$ | $r = 0,95$ | ÷ | — |

*) Я. И. Лукомский, 1961.

начальные значения взяты равными средним значениям и, следовательно, определяются центральные моменты. В столбцах (6) и (7) выписываются квадраты отклонений. Суммы квадратов отклонений, деленные на число испытаний, дают дисперсии изучаемых величин, по которым находятся основные отклонения. В столбце (8) образуются произведения отклонений, сумма которых, деленная на число испытаний, дает смешанный первый центральный момент.

Столбцы (8) и (9) таблицы служат для проверки вычислений. Для этого применяется второй момент разности случайных величин

$$m_{2(d)} = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{j_1|j_2} (x_{1(j_1)} - x_{2(j_2)})^2. \quad (2.94)$$

Раскрывая скобки и переходя к моментам, получим формулу для вычислений

$$m_{2(d)} = m_{2|0} + m_{0|2} - 2m_{1|1}. \quad (2.95)$$

В рассматриваемом примере $m_{2(d)} = 65,3$,
 $299,6 + 110,5 - 344,8 = 65,3$.

Следовательно, вычисления сделаны правильно.

Разделив первый смешанный центральный момент на произведение основных отклонений, получим коэффициент корреляции между пределом прочности при кручении и пределом выносливости при изгибе легированных сталей.

Найденные статистики показаны в нижней строке таблицы.

Если в формуле (2.94) вместо отклонений x_1 и x_2 возьмем нормированные значения ξ_1 и ξ_2 , то получим второй основной момент разности случайных величин

$$r_{2(d)} = r_{2|0} + r_{0|2} - 2r_{1|1} = 2(1 - r_{1|1}). \quad (2.96)$$

Подобным же образом второй основной момент суммы случайных величин равен

$$r_{2(s)} = 2(1 + r_{1|1}). \quad (2.97)$$

5. Условные моменты. Кроме рассмотренных выше моментов, которые называются полными моментами, большое значение при исследованиях имеют условные моменты.

Условным моментом $m_{(j_1)|h_2}$ порядка h_2 величины X_2 в предположении, что наблюдаемое значение величины X_1 попало в ряд $X_{1(j_1)}$, называется сумма произведений данной степени отклонений $x_{2(j_2)}^{h_2}$ на соответствующую частоту $p'_{(j_1)|j_2} = n_{j_1|j_2}/n_{j_1}$. (см. табл. 1.15)

$$m_{(j_1)|h_2} = \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{(j_1)|j_2} x_{2(j_2)}^{h_2}. \quad (2.98)$$

В частности,

$$m_{(j)11} = \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{(j)1j_2} x_{2(j)}, \quad (2.99)$$

$$m_{(j)12} = \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{(j)1j_2} x_{2(j)}^2. \quad (2.100)$$

Принимая во внимание (2.80) и (2.98), находим

$$m_{h_1|h_2} = \sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_11} \cdot x_{1(j)}^{h_1} m_{(j)1h_2} \quad (2.101)$$

(теорема умножения моментов), где $p'_{j_11} = n_{j_11}/n$. В частности,

$$m_{011} = \sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_11} \cdot m_{(j)11}, \quad (2.102)$$

$$m_{111} = \sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_11} \cdot x_{1(j)} m_{(j)11}. \quad (2.103)$$

Условные центральные моменты имеют вид

$$\mu_{(j)1h_2}^* = \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{(j)1j_2} (x_{2(j)} - m_{(j)11})^{h_2} \quad (2.104)$$

и

$$\mu_{(j)1h_2} = \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{(j)1j_2} (x_{2(j)} - m_{011})^{h_2}. \quad (2.105)$$

В частности,

$$\mu_{(j)11}^* = 0, \quad \mu_{(j)12}^* = m_{(j)12} - m_{(j)11}^2; \quad (2.106)$$

$$\mu_{(j)11} = m_{(j)11} - m_{011}, \quad \mu_{(j)12} = \mu_{(j)12}^* + (m_{(j)11} - m_{011})^2. \quad (2.107)$$

В случае центральных моментов формула (2.101) примет вид

$$\mu_{h_1|h_2} = \sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_11} \cdot (x_{1(j)} - m_{110})^{h_1} \mu_{(j)1h_2}. \quad (2.108)$$

В частности, принимая во внимание (2.107), получим

$$\mu_{111} = \sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_11} \cdot (x_{1(j)} - m_{110})(m_{(j)11} - m_{011}); \quad (2.109)$$

$$\mu_{012} = \sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_11} \cdot \mu_{(j)12}, \quad (2.110)$$

или

$$\mu_{012} = \sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_11} \cdot \mu_{j_112}^* + \sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_11} \cdot (m_{(j)11} - m_{011})^2. \quad (2.111)$$

Таким образом, полная дисперсия $\mu_{0|2}$ величины X_2 равна среднему из условных дисперсий $\mu_{(j)|2}^*$, сложенному с дисперсией условных средних значений $m_{(j)|1}$ около полного среднего значения $m_{0|1}$.

Условные основные моменты имеют вид

$$r_{(j)|h_2}^* = \frac{\mu_{(j)|h_2}^*}{\frac{1}{2} h_2}, \quad (2.112)$$

$$r_{(j)|h_2} = \frac{\mu_{(j)|h_2}}{\frac{1}{2} h_2}. \quad (2.113)$$

В частности,

$$r_{(j)|1} = \frac{m_{(j)|1} - m_{0|1}}{\frac{1}{2} h_2}. \quad (2.114)$$

В случае основных моментов формула (2.101) имеет вид

$$r_{h_1|h_2} = \sum_{j=1}^{k_1} p'_{j1} \cdot \xi_{1(j)}^{h_1} r_{(j)|h_2}. \quad (2.115)$$

В частности,

$$r_{1|1} = \sum_{j=1}^{k_1} p'_{j1} \cdot \xi_{1(j)} r_{(j)|1}. \quad (2.116)$$

Из (2.114) находим

$$m_{(j)|1} = r_{(j)|1} \sigma_2 + m_{0|1}.$$

Следовательно, условное среднее значение величин X_2 будет, согласно (2.49), равно

$$\bar{X}_{(j)|1} = X_{2(a)} + (r_{(j)|1} \sigma_2 + m_{0|1}) c_2 = \bar{X}_2 + r_{(j)|1} \bar{\sigma}_2. \quad (2.117)$$

Условные основные моменты первого порядка служат для построения статистик, характеризующих связь между случайными величинами и называемых корреляционными отношениями.

Корреляционное отношение X_2 к X_1 равно квадратному корню из среднего значения квадратов условных основных моментов первого порядка $r_{(j)|1}$ и обозначается через η_{21}

$$\eta_{21}^2 = \sum_{j=1}^{k_1} p'_{j1} \cdot r_{(j)|1}^2. \quad (2.118)$$

Подобным же образом корреляционное отношение X_1 к X_2 равно

$$\eta_{12}^2 = \sum_{j=1}^{k_2} p'_{1j} \cdot r_{1(j)}^2. \quad (2.119)$$

Таблица 2.16

Вычисление условных моментов

| $x_{(j)}$ | n_j | (1) | (2) | (3) | $x_{(j)} + 1$ | $(x_{(j)} + 1)^2 n_j$ |
|--|-------|-----|-----|-----|--|-----------------------|
| 52 | 5 | 5 | 5 | — | —1 | 5 |
| 54 | 7 | 12 | — | — | 0 | 0 |
| 56 | 21 | | | | +1 | 21 |
| 58 | 27 | 59 | — | — | +2 | 108 |
| 60 | 21 | 32 | 44 | — | +3 | 189 |
| 62 | 10 | 11 | 12 | 13 | +4 | 160 |
| 64 | 1 | 1 | 1 | 1 | +5 | 25 |
| — | 92 | 17 | 5 | — | Σ | 508 |
| — | — | 103 | 57 | — | | |
| — | s | 120 | 62 | — | $m_{(j) 2}^* = \frac{508}{92} = 5,522$ | |
| — | d | +86 | — | — | | |
| $m_{(j) 1} = \frac{+86}{92} = +0,935,$ $m_{(j) 2} = \frac{120 + 2 \cdot 62}{92} = 2,652,$ $\mu_{(j) 2}^* = 2,652 - 0,935^2 = 1,778,$ $\bar{X}_{(j) 1} = 56 + 0,935 \cdot 2 = 57,87$ | | | | | $m_{(j) 0} = 1,$ $2m_{(j) 1} = 1,870,$ $\frac{m_{(j) 2}}{5,522}$ | |

Таблица 2.17

Условные моменты для каждой строки
табл. 1.17

| $x_{1(j)}$ | n_{1j} | $m_{(j) 1}$ | $m_{(j) 2}$ | $\mu_{(j) 2}^*$ | $\bar{X}_{(j) 1}$ |
|------------|----------|-------------|-------------|-----------------|-------------------|
| 4,5 | 2 | +3,500 | 12,500 | 0,250 | 63,00 |
| 5,5 | 10 | +1,500 | 3,300 | 1,050 | 59,00 |
| 6,5 | 92 | +0,935 | 2,652 | 1,778 | 57,87 |
| 7,5 | 169 | +0,296 | 1,944 | 1,853 | 56,59 |
| 8,5 | 214 | —0,079 | 1,734 | 1,727 | 55,84 |
| 9,5 | 132 | —0,273 | 1,485 | 1,410 | 55,45 |
| 10,5 | 103 | —0,408 | 1,845 | 1,678 | 55,18 |
| 11,5 | 53 | —0,566 | 1,623 | 1,302 | 54,87 |
| 12,5 | 16 | —0,875 | 1,750 | 0,984 | 54,25 |
| — | 791 | +0,024 | 1,898 | 1,897 | 56,05 |

Принимая во внимание (2.118), (2.114), (2.111) и (2.102), получим формулы для вычисления корреляционного отношения

$$\eta_{21}^2 = \frac{\sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_1 \cdot} (m_{(j_1)1} - m_{01})^2}{\mu_{0|2}} = \frac{\sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_1 \cdot} m_{(j_1)1}^2 - m_{01}^2}{\mu_{0|2}}, \quad (2.120)$$

$$\eta_{21}^2 = 1 - \frac{\sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_1 \cdot} \mu_{(j_1)2}}{\mu_{0|2}}, \quad (2.121)$$

и аналогичные формулы для η_{12}^2 .

Заметим также следующее. Если число совместных наблюдений случайных величин X_1 и X_2 невелико (следовательно, нет необходимости в таблице распределения), то между

Таблица 2.18

Вычисление коэффициента корреляции при помощи условных начальных моментов

| $X_1(j_1)$ | $n_{j_1 \cdot}$ | $x_1(j_1)$ | $m_{(j_1)1}$ | $n_{j_1 \cdot} \cdot x_1(j_1) m_{(j_1)1}$ |
|--|-----------------|------------|--------------|---|
| 4,5 | 2 | -4 | +3,500 | -28,000 |
| 5,5 | 10 | -3 | +1,500 | -45,000 |
| 6,5 | 92 | -2 | +0,935 | -172,040 |
| 7,5 | 169 | -1 | +0,296 | -50,024 |
| 8,5 | 214 | 0 | -0,072 | 0 |
| 9,5 | 132 | 1 | -0,273 | -36,036 |
| 10,5 | 103 | 2 | -0,408 | -84,048 |
| 11,5 | 53 | 3 | -0,566 | -89,994 |
| 12,5 | 10 | 4 | -0,875 | -56,000 |
| Σ | 791 | - | - | -561,142 |
| $m_{111} = \frac{-561,142}{791} = -0,709,$ $r = \frac{-0,709 - 0,215 \cdot 0,024}{1,550 \cdot 1,377} = \frac{-0,714}{2,134} = -0,335$ | | | | |

наблюдениями значениями обеих величин обычно будет иметься взаимнооднозначное соответствие. В этом случае

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_1 \cdot} r_{(j_1)1}^2 = \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{\cdot j_2} r_{1(j_2)}^2 = 1. \quad (2.122)$$

Обратно, при наличии (2.122) такое соответствие всегда существует.

Вычисление условных моментов для каждой строки и для каждого столбца таблицы распределения, т. е. моментов условных рядов распределения, производится теми же самыми способами как и вычисление моментов полных рядов распределения.

При этом необходимо только сохранять неизменность начального значения при всех вычислениях моментов (см. § 1, п. 1, замечание к теореме 1).

Вычислим, например, условные моменты для каждой строки таблицы распределения ударной вязкости и предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.17), сохраняя неизменным начальное

значение, принятое для ряда распределения прочности при разрыве, а именно $X_{2(a)} = 56 \text{ кг/мм}^2$ (см. табл. 2.6).

Для строки с заголовком $a_k = 6,5 \text{ кг/см}^2$ вычисление условных моментов ряда распределения предела прочности при разрыве X ($\sigma_B, \text{кг/мм}^2$) располагается по схеме табл. 2.16. Условные моменты для каждой строки табл. 1.17 показаны в табл. 2.17.

На основании найденных условных моментов мы можем вычислить коэффициент корреляции r между ударной вязкостью и пределом прочности при разрыве осевой стали и корреляционное отношение η_{21} предела прочности при разрыве к ударной вязкости осевой стали.

Применяя формулу (2.103), мы можем вычисление коэффициента корреляции расположить по схеме табл. 2.18.

Таблица 2.19

Схема вычисления корреляционного отношения по формуле (2.120)

| $x_{1(j)}$ | n_{j1} | $m_{(j)11}$ | $m_{(j)11}^2$ | $m_{(j)11}^2 n_{j1}$ |
|--|----------|-------------|---------------|----------------------|
| 4,5 | 2 | +3,500 | 12,2500 | 24,5000 |
| 5,5 | 10 | +1,500 | 2,2500 | 22,5000 |
| 6,5 | 92 | +0,935 | 0,8742 | 80,4264 |
| 7,5 | 169 | +0,296 | 0,0876 | 14,8044 |
| 8,5 | 214 | -0,079 | 0,0062 | 1,3268 |
| 9,5 | 132 | -0,273 | 0,0745 | 9,8340 |
| 10,5 | 103 | -0,408 | 0,1665 | 17,1495 |
| 11,5 | 53 | -0,566 | 0,3204 | 16,9812 |
| 12,5 | 16 | -0,875 | 0,7656 | 12,2495 |
| Σ | 791 | — | — | 199,7719 |
| $\eta_{21}^2 = \frac{1}{1,897} \left(\frac{199,7719}{791} - 0,024^2 \right) =$ $= \frac{0,252}{1,897} = 0,1328,$ $\eta_{21} = \sqrt{0,1328} = 0,3644$ | | | | |

Таблица 2.20

Схема вычисления корреляционного отношения по формуле (2.121)

| $x_{1(j)}$ | n_{j1} | $\mu_{(j)12}^*$ | $\mu_{(j)12}^{*2} n_{j1}$ |
|--|----------|-----------------|---------------------------|
| 4,5 | 2 | 0,250 | 0,500 |
| 5,5 | 10 | 1,050 | 10,500 |
| 6,5 | 92 | 1,778 | 163,576 |
| 7,5 | 169 | 1,853 | 313,157 |
| 8,5 | 214 | 1,727 | 369,578 |
| 9,5 | 132 | 1,410 | 186,120 |
| 10,5 | 103 | 1,678 | 172,834 |
| 11,5 | 53 | 1,302 | 69,006 |
| 12,5 | 16 | 0,984 | 15,744 |
| Σ | 791 | — | 1301,015 |
| $\frac{1301,015}{791} = 1,6451,$ $\frac{1,645}{1,897} = 0,8672,$ $1 - 0,8672 = 0,1328,$ $\sqrt{0,1328} = 0,3644 = \eta_{21}$ | | | |

Вычисление корреляционного отношения η_{21} при помощи первых условных моментов $m_{(j)11}$ — по формуле (2.120) — располагается по схеме табл. 2.19. Проверка вычисления корреляционного отношения η_{21} производится по формуле (2.121) (табл. 2.20).

§ 1. Статистики распределения

1. Среднее значение. Моменты, определенные в предыдущей главе, используются при построении статистик распределения случайных величин и связи между ними.

Статистиками, характеризующими первое основное свойство распределения случайной величины — положение кривой распределения, — служат меры статистических аналогов этого свойства (см гл. I, § 3): среднее значение \bar{X} , срединное значение \hat{X} и наиболее частое значение \hat{X} ряда распределения.

Из этих статистик наиболее важной является среднее значение.

Средним значением \bar{X} ряда распределения по разрядам наблюдаемых значений случайной величины называется сумма произведений каждого разрядного значения на соответствующую частоту, деленная на сумму всех частот:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^k X_{(j)} n_j}{n} \quad (3.1)$$

[см. (1.21)].

Среднее значение может быть вычислено или непосредственно путем выполнения действий, указанных в определении среднего значения (3.1) (см. табл. 1.21), или же при помощи первого момента:

$$\bar{X} = X_{(a)} + m_1 c \quad (3.2)$$

[см. (2.49)].

Вычислим, например, средний возраст научных работников СССР по данным табл. 3.1 *).

Здесь

$$X_{(a)} = 42,5 \text{ года}, \quad m_1 = +0,087, \quad c = 5 \text{ лет},$$

$$\bar{X} = 42,5 + 0,087 \cdot 5 = 42,935 \text{ года}.$$

Определение среднего значения имеет полное сходство с нахождением центра тяжести системы материальных точек (см. гл. I § 3, п. 1). Так как среднее значение представляет число того же са-

*) Научные работники СССР, АН СССР, 1928, стр. 752.

мого наименования, как и отдельные наблюдаемые значения, то на чертеже среднее значение будет изображено отрезком от 0 до \bar{X} на горизонтальной оси, где откладываются эти наблюдаемые значения случайной величины. Если через точку \bar{X} провести вертикальную прямую, то последняя пройдет через центр тяжести C ступенчатого многоугольника (рис. 3.1). В силу этого среднее значение принимается за *центр ряда распределения*.

Рассмотрим, например, ряды распределения предела текучести стали 3 и стали ДС (сталь 3 — мягкая сталь, сталь ДС — Дворец Советов — высококачественная сталь) (табл. 3.2)*. Среднее значение первого ряда равно $\bar{X}_1 = 26,6 \text{ кг/мм}^2$, а второго $\bar{X}_2 = 37 \text{ кг/мм}^2$. В связи со смещением центров распределения многоугольники частот занимают различное положение (рис. 3.2).

Подобно тому как центр тяжести тела (т. е. одна точка) заменяет собой все точки приложения сил в теле, давая тем самым возможность представить в одном результате множество подробностей, точно так же и среднее значение характеризует ряд распределения (и вместе с тем кривую распределения) одним числом. Благодаря этому упрощаются научные исследования, и часто кратким путем достигается представление об общей картине явления, без знания подробностей (конечно, при условии достаточной представительности частичной совокупности).

Из определения среднего значения (3.1) следует, что

$$\sum_{j=1}^k X_{(j)} n_j = \bar{X} n, \quad (3.3)$$

т. е. сумма произведений каждого разрядного значения случайной величины на соответствующую частоту равна среднему значению, умноженному на сумму всех частот. Таким образом, среднее значение выражает простое соотношение между всем рядом распределения и его частями.

Среднее значение указывает положение ряда распределения, т. е. дает более или менее приближенное представление о том уровне, около которого колеблются отдельные наблюдаемые значения случайной величины.

Таблица 3.1

Ряд распределения возраста научных работников СССР, в ‰(1928 г.)

| Возраст | Число научных работников | Возраст | Число научных работников |
|---------|--------------------------|---------|--------------------------|
| 20— | 11 | 55— | 67 |
| 25— | 93 | 60— | 40 |
| 30— | 162 | 65— | 24 |
| 35— | 178 | 70— | 12 |
| 40— | 176 | 75— | 3 |
| 45— | 132 | 80— | 1 |
| 50— | 101 | Σ | 1000 |

*) В. В. Кураев и В. Г. Чернашкин, 1941, стр. 75 (VII, 106).

Рассмотрим, например, значения (которые всегда можно считать разрядными значениями) объемного веса γ древесины березы и дуба (табл. 3.3) *). Представив эти значения на чертеже (рис. 3.3), применяя способ, описанный выше (гл. I, § 2, п. 2), и изображая среднее значение при помощи прямой, параллельной

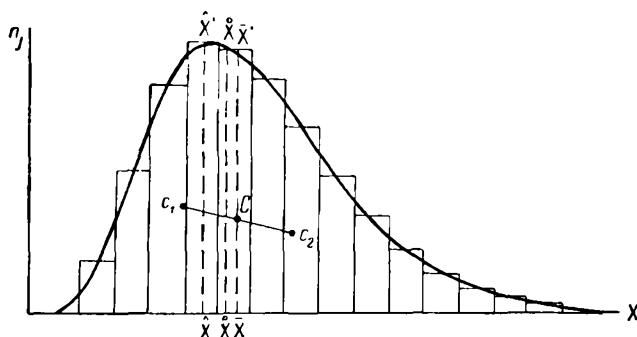


Рис. 3.1. Центр распределения.

основанию, мы видим, что значения объемного веса древесины березы колеблются около более низкого уровня ($\bar{X}_1 = 0,581 \text{ г/см}^3$), чем значения объемного веса древесины дуба ($\bar{X}_2 = 0,653 \text{ г/см}^3$).

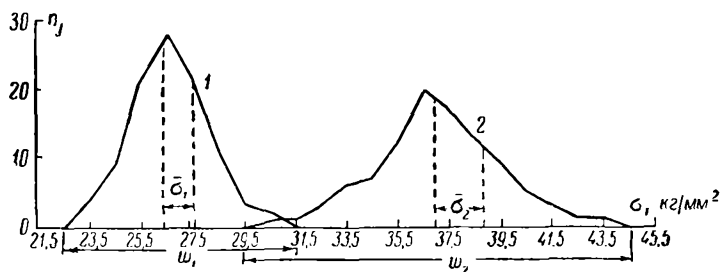


Рис. 3.2. Распределение предела текучести стали 3 (1) и стали ДС (2).

Среднее значение ряда распределения обладает следующими основными свойствами:

1. Сумма отклонений отдельных значений ряда распределения от среднего значения равна нулю:

$$\sum_{j=1}^k (X_{(j)} - \bar{X}) n_j = 0. \quad (3.4)$$

*) А. Х. Певцов, 1935, стр. 65, 73 (VII, 106).

2. Сумма квадратов отклонений отдельных значений ряда распределения от его среднего значения является наименьшей по сравнению с суммами квадратов отклонений от какого-либо иного значения:

$$\sum_{j=1}^k (X_{(j)} - \bar{X})^2 n_j = \min. \quad (3.5)$$

Первое свойство следует из установленного выше положения, что $\mu_1 = 0$ [см. (2.54)]; второе же свойство можно вывести из неравенства $\mu_2 < m_2$, получаемого из (2.56).

Таблица 3.2

Ряды распределения предела текучести σ_s стали 3 ($n = 704$) и стали ДС ($n = 300$), по исследованиям 1937 г., в %

| Сталь 3 | | Сталь ДС | |
|--------------------|------|--------------------|------|
| кг/мм ² | % | кг/мм ² | % |
| 23,5 | 4 | 30,5 | 1 |
| 24,5 | 9 | 31,5 | 1 |
| 25,5 | 21 | 32,5 | 3 |
| 26,5 | 28 | 33,5 | 6 |
| 27,5 | 22 | 34,5 | 7 |
| 28,5 | 11 | 35,5 | 12 |
| 29,5 | 3 | 36,5 | 20 |
| 30,5 | 2 | 37,5 | 17 |
| | | 38,5 | 13 |
| | | 39,5 | 10 |
| | | 40,5 | 5 |
| | | 41,5 | 3 |
| | | 42,5 | 1 |
| | | 43,5 | 1 |
| Σ | 100 | Σ | 100 |
| \bar{X} | 26,6 | \bar{X} | 37 |
| $\bar{\sigma}$ | 1,48 | $\bar{\sigma}$ | 2,45 |

Для выяснения основных свойств среднего значения рассмотрим ряд распределения предела текучести стали 3 (табл. 3.4). Среднее значение этого ряда равно

Таблица 3.3

Значения объемного веса древесины березы и дуба γ , г/см³

| Береза | | Дуб | |
|---------------------|-------|---------------------|-------|
| 0,648 | 0,536 | 0,597 | 0,666 |
| 0,628 | 0,618 | 0,690 | 0,627 |
| 0,511 | 0,571 | 0,635 | 0,626 |
| 0,535 | 0,540 | 0,705 | 0,567 |
| 0,574 | 0,615 | 0,741 | 0,658 |
| 0,580 | 0,622 | 0,646 | 0,733 |
| 0,654 | — | 0,622 | 0,641 |
| 0,576 | — | 0,558 | 0,681 |
| 0,508 | — | 0,637 | 0,726 |
| 0,572 | — | 0,662 | 0,636 |
| $\bar{X}_1 = 0,581$ | | $\bar{X}_2 = 0,653$ | |

$\bar{X} = 26,6$ кг/мм². Вычислим суммы отрицательных и положительных отклонений каждого значения этого ряда распределения от среднего значения, сумму квадратов этих отклонений, а также аналогичные суммы отклонений от какого-нибудь другого значения ряда распределения, например 26,5 (табл. 3.4). Находим, что сумма отклонений от среднего значения равна

$$-57,2 + 57,2 = 0;$$

сумма же отклонений от 25,5 равна

$$-51 + 61 = 10 \neq 0.$$

Сумма квадратов отклонений от среднего значения равна 217,00, т. е. меньше, чем сумма квадратов отклонений от значения 26,5, которая равна 218. Нетрудно убедиться, что чем дальше мы будем отходить от среднего значения, тем больше будет сумма квадратов отклонений. (Ср. рис. 2.1, кривая для m_2 .)

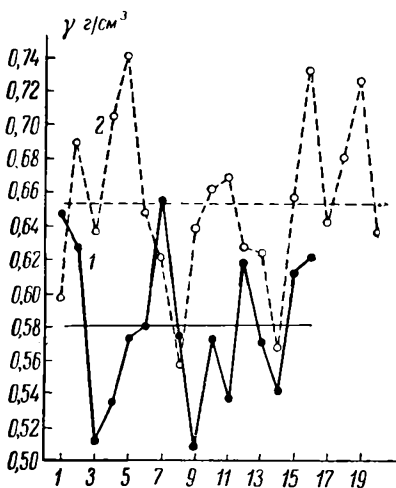


Рис. 3.3. Объемный вес древесины березы (1) и дуба (2).

Выражение (3.4) имеет определенный механический смысл. Оно показывает, что среднее значение, как центр распределения, представляет ту точку, в которой уравниваются все противоположные друг другу отклонения.

Механическую интерпретацию можно несколько изменить. Рассмотрим, например, ряд распределения предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.10). Среднее значение этого ряда равно 56,048 кг/мм² (см. табл. 1.21). Положим теперь, что у нас имеется легкий стержень с равными делениями, соответствующими значениям рассматриваемого ряда распределения (рис. 3.4). Пусть этот стержень

опирается на призму, ребро которой приходится как раз против той точки на стержне, которая соответствует среднему значению ряда распределения. Повесим на этот стержень в соответствующих точках грузы в виде шаров, пропорциональных по своему весу частотам ряда распределения. Ввиду того, что стержень опирается на призму в точке, соответствующей центру тяжести, будет сохранено равновесие грузов и стержень будет находиться в состоянии покоя.

Из равенства (3.2) мы видим, что среднее значение является частным случаем первого момента. Действительно, полагая в этом равенстве $X_{(a)} = 0$ и $c = 1$ и обозначая первый момент (в единицах измерения) относительно нулевого значения через $m_{1(0)}$, находим

$$\bar{X} = m_{1(0)}.$$

В силу этого к среднему значению применимы *основные теоремы о моментах* (гл. II, § 1, п. 1).

Т а б л и ц а 3.4

Основные свойства среднего значения. Пример — ряд
распределения предела текучести стали 3 ($\bar{X} = 26,6$ кг/мм², $\bar{X}_{(a)} = 26,5$ кг/мм²)

| $X_{(j)}$ | n_j | $X_{(j)} - \bar{X}$ | $(X_{(j)} - \bar{X})n_j$ | $(X_{(j)} - \bar{X})^2 n_j$ | $X_{(j)} - X_{(a)}$ | $(X_{(j)} - X_{(a)})n_j$ | $(X_{(j)} - X_{(a)})^2 n_j$ |
|-----------|-------|---------------------|--------------------------|-----------------------------|---------------------|--------------------------|-----------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| 23,5 | 4 | -3,1 | -12,4 | 38,44 | -3 | -12 | 36 |
| 24,5 | 9 | -2,1 | -18,9 | 39,69 | -2 | -18 | 36 |
| 25,5 | 21 | -1,1 | -23,1 | 25,41 | -1 | -21 | 21 |
| 26,5 | 28 | -0,1 | -2,8 | 0,28 | 0 | 0 | 0 |
| 27,5 | 22 | +0,9 | 19,8 | 17,82 | +1 | 22 | 22 |
| 28,5 | 11 | +1,9 | 20,9 | 39,71 | +2 | 22 | 44 |
| 29,5 | 3 | +2,9 | 8,7 | 25,23 | +3 | 9 | 27 |
| 30,5 | 2 | +3,9 | 7,8 | 30,42 | +4 | 8 | 32 |
| Σ | 100 | — | -57,2 +57,2 | 217,00 | — | -51 +61 | 218 |

Т а б л и ц а 3.5

Ряды распределения модуля упругости при сжатии вдоль
волокон древесины резонансовой ели

| $E \cdot 10^{-3}$, кг/см ² | Число испытаний | | | | |
|--|-----------------|-----------|-----------|-----------|---------|
| | 1 — 100 | 101 — 200 | 201 — 300 | 301 — 400 | Всего |
| 60 | — | 1 | — | 1 | 2 |
| 74 | 3 | 1 | 1 | — | 5 |
| 88 | 1 | 4 | 8 | 7 | 20 |
| 102 | 14 | 11 | 11 | 8 | 44 |
| 116 | 21 | 23 | 19 | 24 | 87 |
| 130 | 26 | 31 | 25 | 18 | 100 |
| 144 | 21 | 17 | 17 | 24 | 79 |
| 158 | 8 | 9 | 11 | 14 | 42 |
| 172 | 5 | 3 | 5 | 3 | 16 |
| 186 | 1 | — | 3 | — | 4 |
| 200 | — | — | — | 1 | 1 |
| Σ | 100 | 100 | 100 | 100 | 400 |
| \bar{X} | 128,880 | 126,920 | 129,580 | 130,000 | 128,845 |

Для средних значений имеет место также следующая теорема сложения: среднее значение сложного ряда распределения, состоящего из нескольких составляющих рядов, равно среднему значению из средних значений этих составляющих рядов, причем частота среднего значения каждого составляющего ряда принимается равной его объему.

Вычислим, например, среднее значение модуля упругости E при сжатии вдоль волокон древесины резонансной ели ($n = 400$) на основании рядов распределения, объем каждого из которых равен 100 (табл. 3.5).

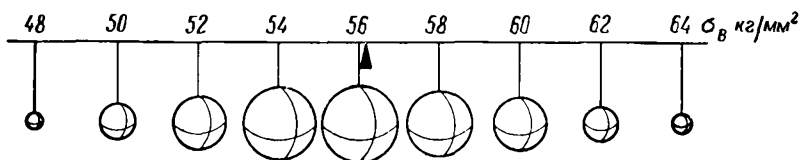


Рис. 3.4. Распределение предела прочности при разрыве осевой стали.

Среднее значение модуля упругости для 400 испытаний равно

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{128,880 \cdot 100 + 126,920 \cdot 100 + 129,580 \cdot 100 + 130,000 \cdot 100}{400} = \\ &= \frac{51\,538,000}{400} = 128,845 \text{ кг/см}^2,\end{aligned}$$

т. е. равно среднему значению всего ряда распределения (см. гл. II, § 1, п. 3).

Теорема сложения имеет большое значение при проверке вычисления средних значений по строкам и столбцам таблицы распределения. Проверим, например, вычисление средних значений по строкам таблицы распределения ударной вязкости и предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.17). Вычисления располагаются по схеме табл. 3.6. Разделив сумму произведений

$$\sum_{j=1}^{k_1} \bar{X}_{(ij)} n_{j \cdot} = 44\,332,56$$

на сумму частот $n = 791$, получим $\bar{X} = 56,05$ (ср. табл. 2.17). Таким образом, мы косвенно убеждаемся в правильности вычисления средних значений.

Кроме среднего значения, в некоторых случаях употребляется в качестве меры положения *срединное значение*.

Пусть наблюдаемые значения случайной величины все различны. Отметим их точками на числовой оси. Ясно, что на этой оси всегда будет существовать точка \hat{X} , обладающая следующим свой-

ством: строго левее и одновременно строго правее от \hat{X} на числовой оси лежит одинаковое количество отмеченных точек.

Например, если число всех наблюдений нечетное, $n = 2h + 1$, то

$$\hat{X} = X_{(h+1)}, \quad (3.6)$$

т. е. равно $(h + 1)$ -му по величине наблюденному значению. Если $n = 2h$, то

$$\hat{X} = \frac{X_{(h)} + X_{(h+1)}}{2}. \quad (3.7)$$

В случае ряда, сведенного в разряды, срединное значение находится в том разряде, которому соответствует накопленная частота, менее других превышающая половину объема ряда. Для вычисления срединного значения надо к начальному значению данного разряда $X_{(h)}$ прибавить часть величины разряда c , пропорциональную отношению разности между половиной объема ряда $n/2$ и накопленной частотой предыдущего разряда $N_{(h-1)}$ к частоте данного разряда n_h :

$$\hat{X} = X_{(h)} + \frac{\frac{n}{2} - N_{(h-1)}}{n_h} \cdot c. \quad (3.8)$$

Например, срединное значение ряда распределения возраста научных работников СССР (табл. 3.1) равно

$$\hat{X} = 40 + \frac{500 - 445}{176} \cdot 5 =$$

$$= 40,938 \text{ лет.}$$

Таблица 3.6

Проверка вычисления средних значений
(по строкам таблицы распределения
ударной вязкости и предела прочности
при разрыве осевой стали)

| $X_{(j)}$ | n_{hj} | $\bar{X}_{(j)}$ | $\bar{X}_{(j)} n_{hj}$ |
|--|----------|-----------------|--------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) |
| 4,5 | 2 | 63,00 | 126,00 |
| 5,5 | 10 | 59,00 | 590,00 |
| 6,5 | 92 | 57,87 | 5 324,04 |
| 7,5 | 169 | 56,59 | 9 563,71 |
| 8,5 | 214 | 55,84 | 11 949,76 |
| 9,5 | 132 | 55,45 | 7 319,40 |
| 10,5 | 103 | 55,18 | 5 683,54 |
| 11,5 | 53 | 54,87 | 2 908,11 |
| 12,5 | 16 | 54,25 | 868,00 |
| Σ | 791 | 56,05 | 44 332,56 |
| $\bar{X}_2 = \frac{44\,332,56}{791} = 56,05 \text{ кг/мм}^2$ | | | |

Подобно срединному значению, и третья мера положения ряда распределения — наиболее частое значение — представляет отдельное значение ряда.

Наиболее частым значением \hat{X} случайной величины называется то ее значение, которое соответствует максимуму, т. е. наивысшей точке кривой распределения, изображающей данный ряд распределения.

Из определения наиболее частого значения следует, что оно может быть вычислено точно только в том случае, когда известна кривая распределения значений случайной величины. По данному же ряду распределения мы можем найти \hat{X} только приближенно. В случае умеренно асимметрического распределения наиболее частое значение вычисляется по формуле

$$\hat{X} \approx \bar{X} + 3(\bar{X} - \bar{X}). \quad (3.9)$$

Например, для ряда распределения возраста научных работников СССР (табл. 3.1) наиболее частое значение приближенно равно

$$\hat{X} \approx 42,935 + 3(40,938 - 42,935) = 36,944 \text{ лет.}$$

Соотношения между мерами положения можно выяснить, рассматривая рис. 3.1. На этом рисунке прямая $\bar{X}\bar{X}'$ проходит через центр распределения C , а прямая $\hat{X}\hat{X}'$ делит площадь кривой распределения на две равные части. Положим теперь, что точки c_1 и c_2 будут изображать центры тяжести левой и правой половин площади; тогда центр тяжести C всей площади будет делить пополам отрезок c_1c_2 ; точка же C , как мы видели выше, определяет своей абсциссой среднее значение \bar{X} . Обратим внимание, что на рис. 3.1 проведена также гладкая кривая, выравнивающая ступенчатый многоугольник, — кривая распределения. В случае положительной косости точка c_1 лежит ближе к ординате $\hat{X}\hat{X}'$, чем точка c_2 , вследствие чего точка C оказывается расположенной вправо от этой ординаты. Другими словами, в случае положительной косости

$$\bar{X} > \hat{X}.$$

В случае отрицательной косости

$$\bar{X} < \hat{X}.$$

Наконец, в случае симметрического распределения

$$\bar{X} = \hat{X}.$$

Вообще для одновершинного симметрического ряда все три меры положения совпадают между собой:

$$\bar{X} = \hat{X} = \hat{X}. \quad (3.10)$$

В самом деле, если ступенчатый многоугольник симметричен относительно какой-либо прямой, параллельной оси ординат, то, конечно, центр тяжести его площади, соответствующий среднему значению, будет лежать на этой прямой. Ось симметрии явится и срединной ординатой, ибо она делит площадь многоугольника на

две равные части. Наконец, формула (3.9) показывает, что \hat{X} также лежит на оси симметрии. Если \hat{X} определять как разрядное значение с наибольшей частотой и если оно является единственным, то в этом случае \hat{X} непременно совпадет с \bar{X} и X .

Так как среднее значение, имея вполне определенный смысл и поддаваясь легкому вычислению, представляет одно из необходимых звеньев основы статистического исчисления — теории моментов, то в дальнейшем изложении мы будем по возможности всюду брать в качестве меры положения именно среднее значение.

2. Основное отклонение. Наряду со средним значением, которое указывает центр распределения, крайне важно знать степень *рассеяния* различных значений около среднего значения.

Рассмотрим, например, результаты испытаний ударной вязкости двух сортов осевой стали (табл. 3.7)*. Представив эти значения (наблюденные значения есть частный случай разрядных) на чертеже (рис. 3.5), мы видим, что эти два сорта стали отличаются друг от друга не только средними значениями ударной вязкости, но и характером колебаний отдельных значений около этих средних: ударная вязкость осевой стали I имеет больший размах колебаний около среднего значения, чем ударная вязкость осевой стали сорта II. Это наличие различного рассеяния значений говорит о том, что сорт II оказывается в отношении рассматриваемого признака более однородным, а потому и более ценным, чем сорт I.

Подобным же образом, рассматривая ряды распределения предела текучести стали 3 и стали ДС (табл. 3.2), мы видим, что эти ряды отличаются друг от друга как центрами распределения, так и степенью рассеяния.

Существует несколько статистик, характеризующих рассеяние. Среди них наиболее простой является *размах ряда распределения*, т. е. разность между наибольшим и наименьшим наблюдаемым разрядным значением

$$\omega = X_{\max} - X_{\min}. \quad (3.11)$$

В частичных совокупностях малого объема размах изображается отрезком вертикальной прямой, соответствующим разности между наибольшим и наименьшим наблюдаемым значением

Таблица 3.7
Результаты
испытаний
ударной вязкости
двух сортов
осевой стали

| № | $a_k, \text{ кгм/см}^2$ | |
|----------------|-------------------------|------|
| | I | II |
| 1 | 3,4 | 5,4 |
| 2 | 5,3 | 5,7 |
| 3 | 4,8 | 5,5 |
| 4 | 3,8 | 5,0 |
| 5 | 3,5 | 4,8 |
| 6 | 1,9 | 5,3 |
| 7 | 5,6 | 5,0 |
| 8 | 5,5 | 4,4 |
| 9 | 5,2 | 4,2 |
| 10 | 6,4 | 5,0 |
| \bar{X} | 4,54 | 5,03 |
| $\bar{\sigma}$ | 1,28 | 0,45 |

*) Н. П. Щапов и А. И. Кочетов, 1938, стр. 90 (VII, 106).

(рис. 3.5). В частичных же совокупностях большого объема изображением размаха является отрезок на оси абсцисс между крайними точками на ней, принадлежащими многоугольнику частот (рис. 3.2).

Крайняя легкость вычисления размаха ряда распределения и его очевидный смысл привели к широкому употреблению этой статистики во многих вопросах производственной техники.

Однако эта статистика имеет существенный недостаток: она подвержена значительным колебаниям от одной частичной совокупности к другой.

Поэтому размах распределения может быть с достаточным основанием применен в качестве меры рассеяния только в частичных совокупностях малого объема.

Наилучшими статистиками, характеризующими рассеяние, являются *дисперсия*

$$\sigma^2 = \mu_2 \quad (3.12)$$

и *основное отклонение*

$$\sigma = + \sqrt{\mu_2}. \quad (3.13)$$

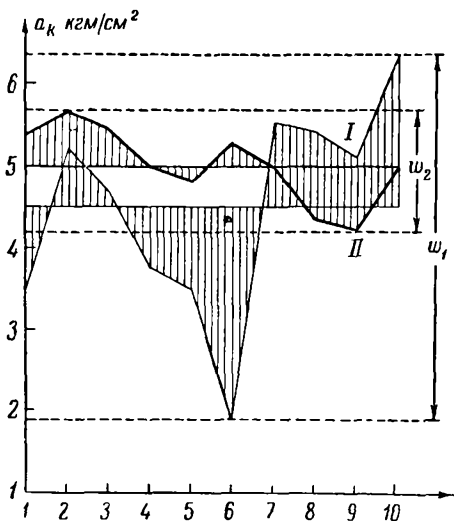
Умножив σ на величину разряда c , получим именованное основное отклонение $\bar{\sigma}$ [см. (2.56) — (2.58)].

Для выяснения реального смысла основного отклонения рассмотрим ряд распределения предела прочности при

Рис. 3.5. Ударная вязкость двух сортов осевой стали.

разрыве осевой стали (табл. 1.10). Выше было показано, что если стержень с грузами, пропорциональными частотам ряда распределения, будет опираться на призму в точке, соответствующей среднему значению (рис. 3.4), то будет сохранено равновесие грузов и стержень будет находиться в состоянии покоя.

Если теперь дадим стержню толчок, то равновесие нарушится и стержень придет в колебательное движение. И чем теснее сосредоточены грузы около точки опоры, тем короче будет период колебаний; напротив, чем дальше от точки опоры будут разбросаны грузы, тем продолжительнее будет период колебаний. Следовательно, величина периода колебаний может служить мерой сосредоточения или разбросанности грузов по стержню. Этот период пропорционален радиусу инерции системы, равному квадратному корню из момента инерции, деленного на массу, т. е. пропорционален определенному выше основному отклонению.



Таким образом, основное отклонение является статистикой, имеющей вполне определенный смысл; оно представляет численную характеристику сжатости или разбросанности значений ряда распределения, указывает средний размах отклонений их от среднего значения независимо от знака.

Графическим изображением именованного основного отклонения будет пропорциональный числу $\bar{\sigma}$ отрезок прямой, откладываемый на горизонтальной оси от точки \bar{X} в положительном направлении (см. рис. 3.2).

Особенно важное значение имеет основное отклонение при исследовании так называемых нормальных общих совокупностей. В этом случае в пределах основного отклонения в ту и другую сторону от среднего значения располагается приблизительно 68,3% всех единиц частичной совокупности, в пределах удвоенного основного отклонения располагается приблизительно 95,4% и в пределах утроенного основного отклонения приблизительно 99,7%. Все эти числа оправдываются тем лучше, чем больше объем частичной совокупности.

Кроме основного отклонения, употребляются в качестве мер рассеяния еще и другие статистики: среднее отклонение θ , модуль M , мера точности h и вероятное отклонение E .

Среднее отклонение представляет среднее из отклонений от среднего значения, взятых с положительным знаком:

$$\theta = \frac{\sum_{j=1}^k |x_{(j)} - m_1| n_j}{n}. \quad (3.14)$$

Умножив среднее отклонение на величину разряда, получим именованное среднее отклонение

$$\bar{\theta} = \theta \cdot c = \frac{\sum_{j=1}^k |X_{(j)} - \bar{X}| n_j}{n}. \quad (3.15)$$

Вычислим, например, среднее отклонение для ряда распределения крепости $X(z)$ хлопчатобумажной пряжи (табл. 3.8). Среднее значение этого ряда равно 271,75 г. Суммы произведений отклонений от среднего значения на частоты этого ряда равны - 715,75 и + 715,75. Взяв эти произведения с положительным знаком, сложив их и разделив на сумму всех частот, найдем

$$\theta = 1431,50/1000 = 1,432$$

и, следовательно,

$$\bar{\theta} = 1,432 \cdot 25 = 35,80 \text{ г.}$$

Таблица 3.8

Вычисление среднего значения, среднего отклонения и основного отклонения
(для ряда распределения крепости хлопчатобумажной пряжи)

| $x_{(j)}$ | n_j | $x_{(j)}$ | $x_{(j)} n_j$ | $x_{(j)} - m_1$ | $(x_{(j)} - m_1) n_j$ | $(x_{(j)} - m_1)^2 n_j$ |
|--|-------|-----------|---------------|-----------------|-----------------------|-------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 125 | 1 | -6 | -6 | -5,87 | -5,87 | 34,4569 |
| 150 | 5 | -5 | -25 | -4,87 | -24,35 | 118,5845 |
| 175 | 23 | -4 | -92 | -3,87 | -89,01 | 344,4687 |
| 200 | 59 | -3 | -177 | -2,87 | -169,33 | 485,9771 |
| 225 | 134 | -2 | -268 | -1,87 | -250,58 | 468,5846 |
| 250 | 203 | -1 | -203 | -0,87 | -176,61 | 153,6507 |
| 275 | 212 | 0 | -771 | 0,13 | 27,56 | 3,5828 |
| 300 | 179 | 1 | 179 | 1,13 | 202,27 | 228,5651 |
| 325 | 114 | 2 | 228 | 2,13 | 242,82 | 517,2066 |
| 350 | 51 | 3 | 153 | 3,13 | 159,63 | 499,6419 |
| 375 | 15 | 4 | 60 | 4,13 | 61,95 | 255,8535 |
| 400 | 3 | 5 | 15 | 5,13 | 15,39 | 78,9507 |
| 425 | 1 | 6 | 6 | 6,13 | 6,13 | 37,5769 |
| | | | +641 | | -715,75 | |
| Σ | 1000 | - | -130 | - | +715,75 | 3237,1000 |
| $m_1 = -0,130, \bar{X} = 275 - 0,130 \cdot 25 = 271,75 \text{ з, } \theta = \frac{715,75 + 715,75}{1000} = 1,432,$ $\sigma = \sqrt{3,2371} = 1,796, 1,25331 \theta = 1,795,$ $\bar{\theta} = 1,432 \cdot 25 = 35,80 \text{ з, } \bar{\sigma} = 1,796 \cdot 25 = 44,90 \text{ з}$ | | | | | | |

В случае нормальной общей совокупности между основным отклонением σ и средним отклонением θ существует следующая приближенная связь:

$$\theta = \sigma \sqrt{2/\pi} = 0,79788\sigma, \quad \sigma = \theta \sqrt{\pi/2} = 1,25331\theta.$$

Таким образом, в случае нормальной совокупности среднее отклонение приблизительно равно $4/5$ основного отклонения. Это соотношение может быть использовано в качестве простейшего способа проверки нормальности совокупности.

Выясним, например, будет ли нормальным ряд распределения крепости хлопчатобумажной пряжи. В данном случае основное отклонение равно $\sigma = 1,796$, а произведение среднего отклонения $\theta = 1,432$ на 1,25331 оказалось равным 1,795 (табл. 3.8.). Таким образом, вполне можно предполагать нормальной соответствующую общую совокупность.

Модуль равен основному отклонению, умноженному на $\sqrt{2}$:

$$M = \sigma \sqrt{2}, \quad (3.16)$$

т. е. соотношение между модулем и основным отклонением такое же, как между диагональю и стороной квадрата:

$$M = 1,41\sigma, \quad \sigma = 0,71M.$$

Подобно основному отклонению, модуль в нормальной общей совокупности характеризует кривую распределения в том смысле, что когда он велик, то это указывает на большую растянутость кривой распределения вдоль оси абсцисс; когда модуль мал, то это указывает на сосредоточенность кривой около центральной ординаты.

Величина, обратная модулю, называется *мерой точности*:

$$h = \frac{1}{\sigma \sqrt{2}}, \quad (3.17)$$

откуда

$$\sigma = \frac{1}{h \sqrt{2}}. \quad (3.18)$$

Таблица 3.9

Соотношение между основным отклонением, средним отклонением, модулем и вероятным отклонением

| | σ | θ | M | E |
|----------|----------|----------|--------|--------|
| σ | 1,0000 | 1,2533 | 0,7071 | 1,4826 |
| θ | 0,7979 | 1,0000 | 0,5642 | 1,1829 |
| M | 1,4142 | 1,7726 | 1,0000 | 2,0966 |
| E | 0,6745 | 0,8453 | 0,4769 | 1,0000 |

Таким образом, чем больше величина h , тем меньше σ , т. е. тем плотнее наблюдаемые значения случайной величины будут сосредоточены около среднего значения и, значит, тем точнее отдельные значения будут выражать это среднее значение. Этим и объясняется, почему величина h называется мерой точности.

Вероятное отклонение призвано характеризовать те пределы отклонений значений случайной величины, которым соответствует вероятность, равная половине; так что одинаково вероятно как то, что наблюдаемое отклонение будет заключаться между этими пределами, так и то, что оно выйдет из них. Вероятное отклонение определяется следующим образом:

$$E = 0,67449 \sigma, \quad (3.19)$$

причем эта статистика достаточно хороша лишь для нормальной общей совокупности. Таким образом, вероятное отклонение приблизительно равно $2/3$ основного отклонения.

Геометрическим изображением именованного вероятного отклонения будет отрезок на оси абсцисс от точки \bar{X} приблизительно до ординаты, делящей правую от \bar{X} часть площади многоугольника частот на две равные части.

Соотношения между основным отклонением, средним отклонением, модулем и вероятным отклонением приводятся в табл. 3.9

(предполагается $c = 1$). Из этой таблицы видно, что, зная одну из статистик σ , θ , M , E , можно определить остальные.

Основное отклонение, подобно среднему значению, употребляется как число именованное. При сравнении рассеяния рядов распределения наблюдаемых значений случайных величин, выраженных в разных единицах измерения, основное отклонение, отдельно взятое, не может дать представления о том, какой из сравниваемых рядов обладает большим или меньшим рассеянием. Чтобы получить статистику, которую можно было бы употреблять при такого рода сравнениях, необходимо, чтобы эта статистика была числом отвлеченным. В качестве такой статистики наиболее удобной является мера изменчивости.

Мера изменчивости v представляет выраженное в процентах отношение именованного основного отклонения к среднему значению

$$v = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{X}} \cdot 100\%, \quad (3.20)$$

т. е. показывает, насколько велико рассеяние по сравнению со средним значением случайной величины.

Сравним, например, рассеяние ударной вязкости и предела прочности при разрыве осевой стали (табл. 1.11 и 1.10). Имеем для ударной вязкости:

$$\bar{X}_1 = 8,715 \text{ кгм/см}^2, \quad \bar{\sigma}_1 = 1,5496 \text{ кгм/см}^2, \quad v_1 = 17,78\%;$$

для предела прочности при разрыве:

$$\bar{X}_2 = 56,048 \text{ кг/мм}^2, \quad \bar{\sigma}_2 = 2,7546 \text{ кг/мм}^2, \quad v_2 = 4,91\%.$$

Таким образом, изменчивость ударной вязкости осевой стали приблизительно в 3,6 раза больше изменчивости предела прочности при разрыве.

Мера изменчивости v выражает рассеяние значений ряда распределения и тем самым рассеяние значений самой случайной величины. В некоторых случаях мере изменчивости можно приписать определенный физический смысл. Например, при анализе качества электрических ламп наблюдается не только значительное рассеяние продолжительности срока службы ламп, но также и зависимость ее от температуры накала нити; однако отношение основного отклонения продолжительности службы лампы к среднему значению оказывается независимым от температуры накала нити. Точно так же при анализе свойств цементов и бетонов рассеяние крепости, обусловливаемое случайными причинами, связанными с перемешиванием и выдержкой материала, оказывается обыкновенно больше для цементов с высокой прочностью, чем для цементов менее прочных. Здесь относительная мера рассеяния v

имеет более определенное значение, чем абсолютная мера рассеяния $\bar{\sigma}$.

Необходимо заметить, что меру изменчивости не следует применять для характеристики рассеяния таких рядов распределения, в которых среднее значение крайне мало сравнительно с их основным отклонением.

Реальный смысл обычно имеет мера изменчивости, не превышающая 50%. Во всех иных случаях в качестве меры рассеяния применяется основное отклонение.

Таблица 3.10

Ряды распределения предела прочности при растяжении опытных образцов, изготовленных тремя сварщиками

| σ_B , кг/мм ² | n_j | | |
|---------------------------------|-------|------|------|
| | (1) | (2) | (3) |
| 28 | — | — | 8 |
| 30 | — | 3 | 15 |
| 32 | — | 5 | 15 |
| 34 | 2 | 30 | 12 |
| 35 | 3 | 35 | 15 |
| 38 | 30 | 20 | 20 |
| 40 | 40 | 5 | 10 |
| 42 | 20 | 2 | 5 |
| 44 | 5 | — | — |
| Σ | 100 | 100 | 100 |
| \bar{X} | 39,8 | 35,7 | 34,7 |
| $\bar{\sigma}$ | 1,98 | 2,31 | 3,94 |

Среднее значение и основное отклонение находят широкое применение при решении задач научного и практического характера. В частности, среднее значение может быть применено при оценке квалификации того или иного специалиста, а основное отклонение — при выяснении его способности сохранять постоянство качества своей работы.

В виде примера рассмотрим результаты испытаний, произведенных при проверке квалификации трех сварщиков. Каждым сварщиком было изготовлено по 100 опытных образцов из одних и тех же исходных материалов. Эти образцы испытывались на растяжение с целью выяснения механической прочности выполненного шва. Результаты испытаний приведены в табл. 3.10*).

Рассматривая полученные ряды распределения предела прочности при растяжении (рис. 3.6), мы видим, что наилучшей квалификацией обладает первый сварщик: достигнутая им средняя прочность образцов равна 39,8 кг/мм²; у этого же сварщика наблюдается и наибольшее постоянство качества работы — основное отклонение ряда распределения равно 1,98 кг/мм². Второй и третий сварщики оказались почти одинаковой квалификации: среднее значение предела прочности образцов второго сварщика равно 35,7 кг/мм², а третьего — 34,7 кг/мм², но постоянство качества работы у второго сварщика выше, чем у третьего, — основное

*) Г. М. Тиходеев, 1935, стр. 48—50 (VII, 10а).

отклонение для второго ряда распределения равно $2,31 \text{ кг/мм}^2$, т. е. значительно меньше, чем для третьего ряда, для которого оно равно $3,94 \text{ кг/мм}^2$.

Рассеяние естественно не остается неизменным при разных условиях, а изменяется в зависимости от изменения этих условий.

Рассмотрим, например, изменение рассеяния при определении ударной вязкости a_k стали с $0,34\% \text{ C}^*)$.

При исследовании большое внимание было направлено на обеспечение однородности испытуемого материала. Отливка была

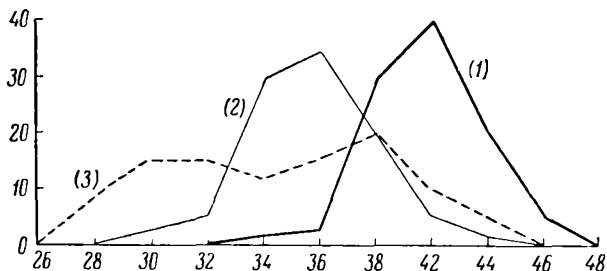


Рис. 3.6. Механическая прочность шва, выполненного тремя сварщиками.

тщательно проверена на микроструктуру и химическую однородность состава; из нее были прокатаны бруски $34 \times 34 \text{ мм}$, одинаково ориентированные по отношению к отливке; бруски были сначала отожжены, затем выстроганы до размеров $30 \times 30 \text{ мм}$, закалены при 850°C , отпущены при 600°C , надрезаны и испытаны на ударный излом.

Результаты испытаний приведены в верхней части табл. 3.11. Из таблицы видно, что, несмотря на тщательно проверенную однородность стали, рассеяние отдельных значений вязкости оказалось очень большим. Характеристика этого рассеяния, которая в рассматриваемом случае определялась в виде отношения среднего отклонения к среднему значению, достигала 50% .

Отыскивая причины такого большого рассеяния, обратили внимание на состояние наружного слоя образцов. Было сделано предположение, что в корке образцов, появившейся после термической обработки, имеются остаточные напряжения, которые могут влиять на число вязкости.

Чтобы убедиться в этом, для трех серий образцов наружные слои были сняты соответственно на глубину: для первой серии 1 мм , для второй 2 мм и для третьей 3 мм . Определение ударной вязкости этих образцов дало результаты, приведенные в нижней части табл. 3.11.

*) Н. Н. Давиденков, 1936, стр. 276 (VII, 106).

Таким образом, при первом же сострагивании характеристика рассеяния снизилась до 20,9%, а при дальнейшей обработке дошла до 8,3%.

Снижение меры рассеяния убедительно показывает, какое важное значение имеет состояние наружного слоя образца: именно в этом слое получают наибольшие изменения и неоднородности.

Влияние изменения условий производственного процесса на характер распределения тех или иных свойств материалов можно видеть на следующем примере.

До введения первого общесоюзного стандарта ОСТ 4118 химический состав рельсовой стали не нормировался, что приводило к большой неоднородности химического состава плавок при очень низком содержании углерода. Вследствие этого рельсы отличались малой твердостью и большим непостоянством механических свойств. Для повышения качества рельсов требовалось в первую очередь повысить содержание углерода и уменьшить содержание фосфора и серы в рельсовой стали. В связи с требованием стандарта ОСТ 4118 была изменена технология производства рельсов, что привело к значительному улучшению их качества.

Характер изменения процентного содержания углерода и серы в рельсовой стали после освоения стандарта ОСТ 4118 показан на рис. 3.7. Содержание углерода повысилось в среднем на 12%, а рассеяние содержания этого элемента уменьшилось почти в три раза. Среднее содержание и рассеяние серы в рельсовой стали значительно уменьшились *).

3. Мера косости. При исследовании распределения случайной величины необходимо, кроме положения и рассеяния, выяснить также степень косости и крутости кривой распределения. По-прежнему заключения об этом делаются на основе наблюдений, на основе изучения соответствующего ряда распределения.

В отношении *косости* кривые распределения разделяются на симметрические и асимметрические — с положительной или отрицательной косостью (см. гл. I, § 3, п. 1).

Примером ряда распределения по разрядам наблюдаемых значений случайной величины с симметрической кривой распределения

Таблица 3.11

Рассеяние при определении ударной вязкости стали с 0,34% С

| Серия *) | a_k , кгм/см ² | δ , кгм/см ² | $\frac{\delta}{a_k}$, % |
|----------|--------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|
| 1 | 16,57 | ±6,3 | 38,0 |
| 2 | 16,27 | ±7,9 | 48,5 |
| 3 | 17,62 | ±5,69 | 32,2 |
| 4 | 17,03 | ±6,79 | 39,8 |
| 1 | 19,05 | ±4,0 | 20,9 |
| 2 | 21,54 | ±2,77 | 12,8 |
| 3 | 20,17 | ±1,69 | 8,3 |

*) В каждой серии семь образцов.

*) А. И. Скаков, 1955, стр. 139 (VII, 106).

может служить ряд распределения отклонений от номинала диаметра цилиндрических деталей (табл. 3.12 и рис. 3.8) *).

Кривая распределения с положительной косостью, например, хорошо выравнивает ряд распределения срока службы электрических ламп (табл. 3.13 и рис. 3.9) **).

Наконец, примером для выравнивающей кривой распределения с отрицательной косостью могут служить ряды распределения длины волокна l трех сортов хлопка (табл. 3.14 и рис. 3.10) ***).

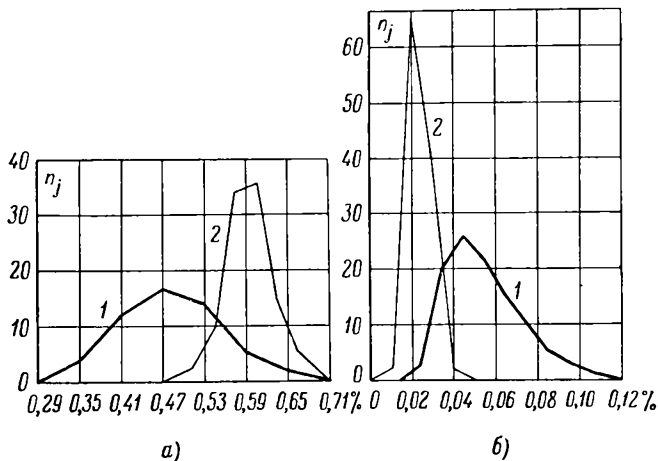


Рис. 3.7. Содержание углерода (а) и серы (б) в рельсовой стали:
1 — до введения ОСТ 4118, 2 — после введения ОСТ 4118.

Статистиками, характеризующими степень и направление косости, являются мера косости α и мера скошенности α^* .

Мера косости α равна третьему основному моменту

$$\alpha = r_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (3.21)$$

[см. (2.69)].

Так как $\sigma > 0$ [см. (2.57)], то знак меры косости определяется знаком μ_3 . Если сумма кубов положительных отклонений от среднего значения больше суммы кубов отрицательных отклонений, то $\mu_3 > 0$; если сумма кубов положительных отклонений от среднего значения меньше суммы кубов отрицательных отклонений, то $\mu_3 < 0$; если сумма кубов положительных отклонений от среднего значения равна сумме кубов отрицательных отклонений, то $\mu_3 = 0$.

*) Н. А. Бородачев и Б. М. Щиголев, 1947, стр. 306 (VII, 106).

**) А. П. Иванов, 1936 (VII, 10a).

***) Е. А. Санков, 1936, стр. 58—63 (VII, 106).

Таким образом, в симметрических рядах распределения $\alpha = 0$; в рядах с положительной косостью $\alpha > 0$; в рядах с отрицательной косостью $\alpha < 0$. Например, для ряда распределения, приведенного в табл. 3.12, $\alpha = +0,004$; для ряда распределения, приведенного в табл. 3.13, $\alpha = +0,377$; меры косости для рядов распределения длины волокна хлопка указаны внизу табл. 3.14.

Мера скошенности α^* представляет отношение разности между средним и наиболее частым значением к основному отклонению:

$$\alpha^* = \frac{\bar{X} - \hat{X}}{\sigma}. \quad (3.22)$$

Если случайная величина имеет симметрическую кривую распределения, то для получающихся рядов распределения $\alpha^* = 0$ [ср. (3.10)]; в случае положительной косости $\bar{X} > \hat{X}$ (см. рис. 3.1) и, следовательно, $\alpha^* > 0$; в случае отрицательной косости $\alpha^* < 0$.

Найдем, например, меру скошенности для рядов IV и V табл. 1.20 (рис. 1.19 и 1.20). Для каждого из этих рядов среднее значение равно 10, а основное отклонение равно 2; но в ряде IV наиболее частое значение равно 9, а в ряде V равно 11. Следовательно, мера скошенности для ряда IV будет равна $\alpha^* = +0,5$, а для ряда V будет равна $\alpha^* = -0,5$.

Как и другие статистики, мера косости не является постоянной, а изменяется с изменением условий.

Характерное изменение значений меры косости можно наблюдать при изучении распределения ударной вязкости при различных значениях температуры испытания. Рассмотрим, например, табл. 3.15, в которой приведено изменение значений косости α рядов распределения ударной вязкости одного из сортов рельсовой стали в зависимости от температуры *).

Таблица показывает, что при температуре испытания $t = 0^\circ$ мера косости $\alpha = 0$, т. е. ряд распределения ударной вязкости оказывается симметрическим. При температуре испытания $t = -20^\circ$ ряд распределения ударной вязкости имеет максимальное значение меры косости $\alpha = +0,750$, а при $t = +50^\circ$ имеет минимальное значение меры косости $\alpha = -0,340$. При повышении температуры испытания выше $+50^\circ$ и понижении температуры ниже -20° абсо-

Таблица 3.12

Распределение отклонений от номинала (12 мм) диаметра цилиндрической детали

| Отклонения | Число деталей | % |
|------------|---------------|-------|
| -17,5 | 3 | 1,8 |
| -7,5 | 17 | 10,3 |
| +2,5 | 39 | 23,6 |
| +12,5 | 47 | 28,5 |
| +22,5 | 39 | 23,6 |
| +32,5 | 16 | 9,7 |
| +42,5 | 4 | 2,5 |
| Σ | 165 | 100,0 |

*) Н. П. Щапов и А. И. Кочетов, 1938, стр. 101 (VII, 106).

Таблица 3.13

Распределение срока
службы (в часах)
электрических ламп

| Срок службы | Частота |
|----------------|---------|
| 100 | 1 |
| 300 | 3 |
| 500 | 2 |
| 700 | 10 |
| 900 | 20 |
| 1100 | 24 |
| 1300 | 25 |
| 1500 | 20 |
| 1700 | 18 |
| 1900 | 11 |
| 2100 | 8 |
| 2300 | 5 |
| 2500 | 5 |
| 2700 | 4 |
| 2900 | 2 |
| 3100 | 1 |
| 3300 | 1 |
| Σ | 160 |
| \bar{X} | 1445 |
| σ | 2,939 |
| v | 40,69 |
| α | +0,377 |
| ι | +0,367 |

Таблица 3.14

Ряды распределения длины волокна
хлопка l (мм) в %

| Длина волокну- на, мм | Китай- ский хлопок | Русский хлопок | |
|--------------------------------|--------------------------|----------------------------|--------------------------|
| | | американ- ских семян | египет- ских семян |
| 9 | 15 | 9 | 6 |
| 12 | 65 | 27 | 14 |
| 15 | 195 | 49 | 25 |
| 18 | 338 | 85 | 33 |
| 21 | 268 | 156 | 39 |
| 24 | 101 | 244 | 49 |
| 27 | 17 | 241 | 61 |
| 30 | 1 | 135 | 81 |
| 33 | | 43 | 105 |
| 36 | | 10 | 132 |
| 39 | | 1 | 163 |
| 42 | | | 153 |
| 45 | | | 94 |
| 48 | | | 38 |
| 51 | | | 7 |
| Σ | 1000 | 1000 | 1000 |
| \bar{X} | 18,45 | 24,18 | 34,67 |
| σ | 1,185 | 1,716 | 2,257 |
| v | 19,27 | 21,29 | -25,59 |
| α | -0,150 | -0,453 | -0,725 |
| ι | -0,033 | +0,180 | -0,073 |

Таблица 3.15

Изменение значений меры косости рядов распределения ударной вязкости
рельсовой стали в зависимости от температуры испытания

| Характер точки на кривой | Хруп- кий интер- вал | Нижняя точка хрупкого интервала | Нижняя часть крити- ческого интерва- ла | Средняя часть кри- тического интервала | | Верхняя часть критиче- ского ин- тервала | Верхняя точка критиче- ского ин- тервала |
|---------------------------------|-------------------------------|--|--|---|---------------|--|--|
| Температура, °C Мера косости | -80 +0,260 | -50 +0,470 | -20 +0,750 | 0 0,000 | +20 -0,050 | +50 -0,340 | +100 -0,160 |

лютное значение меры косости падает и, по-видимому, приближается к нулю. Знак меры косости рядов распределения ударной вязкости рельсовой стали, как правило, оказывается положительным при температуре испытания ниже нуля и отрицательным при температуре выше нуля.

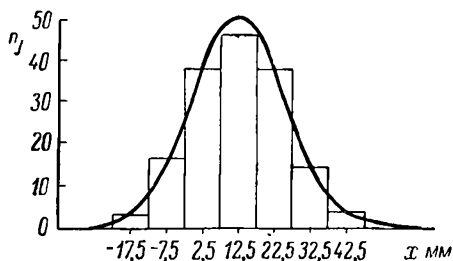


Рис. 3.8. Распределение отклонений от номинала (12 мм) диаметра цилиндрической детали. Жирной линией изображена выравнивающая нормальная кривая.

Под влиянием некоторых причин, действующих в одном направлении, косость рядов распределения изменяется. Рассмотрим, например, ряды распределения длины волокна китайского хлопка и

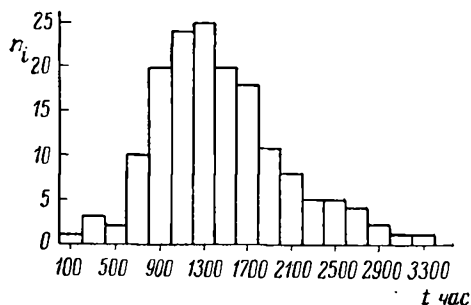


Рис. 3.9. Распределение срока службы электрических ламп.

русского хлопка американских и египетских семян (табл. 3.14 и рис. 3.10). Ряд распределения длины волокна китайского хлопка, представляющего почти естественное состояние, имеет незначительную отрицательную косость, $\alpha = -0,150$. Под воздействием же человека, направленным в одну сторону, а именно в сторону увеличения длины волокна, косость ряда распределения возросла; для русского хлопка американских семян $\alpha = -0,453$, для русского хлопка египетских семян $\alpha = -0,725$.

4. Мера крутости. Статистика, характеризующая крутость кривой распределения, называется мерой крутости.

Мера крутости ι равна разности между четвертым основным моментом и числом 3:

$$\iota = r_4 - 3 \quad (3.23)$$

[см. (2.70)]. В случае нормальной кривой распределения случайной величины $r_4 = 3$ и, следовательно, $\iota = 0$; для островершинных кривых $\iota > 0$, для плосковершинных кривых $\iota < 0$.

Мера крутости, как видно из (3.23), является отвлеченным числом. Для определения пределов меры крутости примем во внима-

ние, что $r_4 \geq 1$ [см. (2.79)]. Следовательно, пределом меры крутости в отрицательную сторону служит -2 ; в положительную же сторону предела не существует. Таким образом,

$$-2 \leq \iota < +\infty. \quad (3.24)$$

Если отрицательная мера крутости значительна, то это говорит о том, что в середине кривая распределения, по-видимому, вдавлена, причем наблюдается пере-

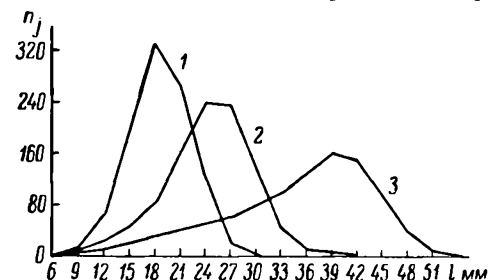


Рис. 3.10. Распределение длины волокна трех сортов хлопка: 1 — китайский, 2 — русский американский семян, 3 — русский египетских семян.

ход в двухвершинную кривую. Мера крутости, равная -2 , указывает на то, что двухвершинная кривая распределения распадается на две отдельные кривые распределения.

Пример выравнивания нормальной кривой дает ряд распределения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели (табл. 3.16 и рис. 3.11, на котором плавной линией изображена выравнивающая нормальная кривая). Для этого ряда мера крутости практически равна нулю ($\iota = +0,116$).

В качестве примера ряда с положительной мерой крутости приведем ряд распределения твердости эбонита (табл. 3.17 и рис. 3.12). В этом ряде

$$\bar{X} = 785,6, \quad \bar{\sigma} = 181,2, \quad \alpha = -0,393, \quad \iota = +1,753.$$

Пределы отклонений от среднего значения на утроенное основное отклонение будут 242,0 и 1309,2; вне этих пределов находится 30 случаев из 1242, или 24 на 1000 вместо 3, как это имеет место в нормальной общей совокупности.

Кривые распределения с положительной крутостью — эксцессивные кривые распределения — часто встречаются при обработке результатов химических измерений благодаря имеющимся при таких измерениях случайным большим ошибкам.

Таблица 3.16

Распределение модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели

| $E \cdot 10^{-3}, \text{ кг. см}^2$ | n_j |
|-------------------------------------|-------|
| 60 | 2 |
| 74 | 5 |
| 88 | 20 |
| 102 | 44 |
| 116 | 87 |
| 130 | 100 |
| 144 | 79 |
| 158 | 42 |
| 172 | 16 |
| 186 | 4 |
| 200 | 1 |
| Σ | 400 |

Таблица 3.17

Распределение твердости эбонита

| Твердость | n_j |
|-----------|-------|
| 100 | 3 |
| 200 | 11 |
| 300 | 19 |
| 400 | 31 |
| 500 | 44 |
| 600 | 75 |
| 700 | 268 |
| 800 | 401 |
| 900 | 228 |
| 1000 | 84 |
| 1100 | 44 |
| 1200 | 24 |
| 1300 | 7 |
| 1400 | 3 |
| Σ | 1242 |

Таблица 3.18

Распределение ударной вязкости для образцов с одним и тем же пределом прочности при $+100^\circ\text{C}$

| $a_k, \text{ кг.м/см}^2$ | n_j |
|--------------------------|-------|
| 4 | 3 |
| 4,5 | 4 |
| 5 | 5 |
| 5,5 | 12 |
| 6 | 9 |
| 6,5 | 10 |
| 7 | 8 |
| 7,5 | 17 |
| 8 | 18 |
| 8,5 | 11 |
| 9 | 1 |
| 9,5 | 2 |
| Σ | 100 |

Примером ряда с отрицательной мерой крутости может служить ряд распределения ударной вязкости a_k для образцов из

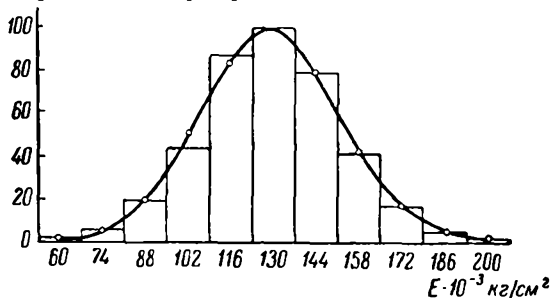


Рис. 3.11. Распределение модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели.

рельсовой стали с одним и тем же пределом прочности* при температуре испытания $+100^\circ$ (табл. 3.18)*). Для этого ряда $i = -0,72$.

*) Н. П. Шапови А. И. Кочетов, 1938, стр. 102 (VII, 106).

Изображением этого ряда является двухвершинный многоугольник частот (рис. 3.13). Подобная двухвершинность указывает на неоднородность ряда распределения — на то, что этот ряд представляет результат наложения каких-то двух однородных и, следовательно, одновершинных рядов. Как оказалось, в данную группу образцов попали образцы из бессемеровской и мартеновской

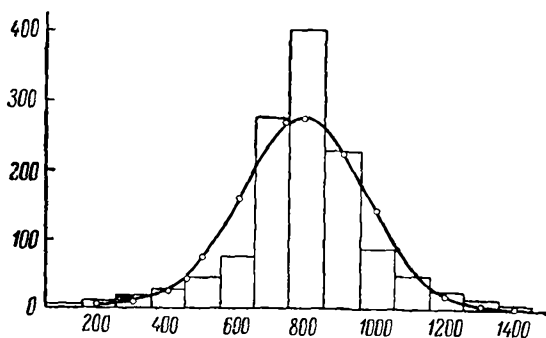


Рис. 3.12. Распределение твёрдости эбонита.

стали. Многоугольники распределения отдельно для мартеновской и бессемеровской стали представлены на том же рис. 3.13 пунктиром.

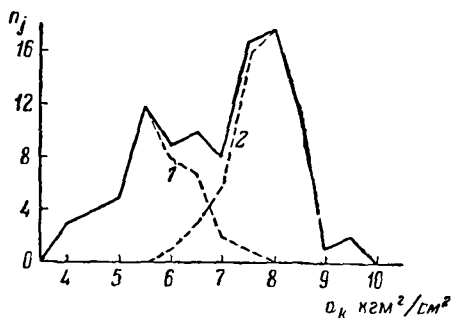


Рис. 3.13. Распределение ударной вязкости для образцов из рельсовой стали: 1 — бессемеровская сталь, 2 — мартеновская сталь.

Назначение рассмотренных статистик состоит в том, чтобы дать краткую численную характеристику основных свойств распределения случайной величины. Надо, однако, заметить, что любая статистика, взятая в отдельности, не дает полного представления об изучаемом распределении.

Например, если будет известна частота p'_0 наблюдаемых значений случайной величины, меньших назначенного предела, то мы очень мало будем знать о самом распределении. Объясняется это тем, что совершенно различные общие совокупности могут привести при наблюдении к равным частотам p'_0 .

Подобным же образом, зная только среднее значение ряда распределения, мы имеем очень малое представление о распределении значений случайной величины, так как совершенно различные распределения могут дать при наблюдении равные средние значения.

Достаточно полное представление о характере распределения случайной величины будет получено, если для ряда распределения наблюдаемых значений будут одновременно известны среднее значение, основное отклонение, мера косости и мера крутости.

Картина распределения предстанет с полной ясностью и исчерпывающей полнотой, конечно, если будет установлено уравнение кривой распределения.

§ 2. Статистики связи

1. Коэффициент корреляции. Среди статистик, характеризующих связь между случайными величинами, наиболее важными являются: коэффициент корреляции, корреляционное отношение, показатель корреляции рангов, а также множественные и частные коэффициенты корреляции и корреляционные отношения.

Коэффициент корреляции r характеризует связь между двумя случайными величинами в случае линейной корреляции между ними (см. гл. I, § 3, п. 2).

Согласно определению

$$r = \frac{\mu_{111}}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (3.25)$$

коэффициент корреляции представляет первый основной смешанный момент (2.89).

Для вычисления коэффициента корреляции надо найти первый начальный смешанный момент m_{111} и первые два начальных момента каждого ряда распределения. Способы вычисления моментов рассмотрены выше (гл. II, § 2, п. 1).

Вычислим, например, коэффициент корреляции между объемным весом и модулем упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели (табл. 1.16). Здесь $m_{110} = +0,335$, $m_{011} = -0,082$, $\sigma_1 = 1,824$, $\sigma_2 = 1,620$, $m_{111} = +2,572$. Следовательно,

$$r = \frac{2,572 - 0,335 \cdot (-0,082)}{1,824 \cdot 1,620} = +0,880.$$

Как и все основные моменты, коэффициент корреляции является отвлеченным числом.

Линейная замена каждой из случайных величин не изменяет коэффициента корреляции между ними. Обозначим коэффициент корреляции между случайными величинами X_1 и X_2 через $r_{X_1|X_2}$, а через $r_{U_1|U_2}$ — коэффициент корреляции между случайными величинами

$$U_1 = a_1 + b_1 X_1 \quad \text{и} \quad U_2 = a_2 + b_2 X_2,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — постоянные. Пусть u_1, x_1 и u_2, x_2 будут отклонениями от соответствующих средних значений. Тогда

$$u_1 = b_1 x_1, \quad u_2 = b_2 x_2, \quad \sigma_{U_1}^2 = b_1^2 \sigma_{X_1}^2, \quad \sigma_{U_2}^2 = b_2^2 \sigma_{X_2}^2,$$

$$\mu_{U_1|U_2} = b_1 b_2 \mu_{X_1|X_2}, \quad r_{U_1|U_2} = \frac{b_1 b_2 \mu_{X_1|X_2}}{b_1 \sigma_{X_1} b_2 \sigma_{X_2}} = \frac{\mu_{X_1|X_2}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}.$$

Таким образом,

$$r_{U_1|U_2} = r_{X_1|X_2}. \quad (3.26)$$

Отсюда следует, что величина коэффициента корреляции не зависит от единиц, в которых измерялись значения случайных величин X_1 и X_2 , так как эти единицы измерения одинаковым образом отражаются как на числителе, так и на знаменателе выражения (3.25).

Относительно возможных пределов, в которых находится величина коэффициента корреляции, можно сделать заключение, рассматривая основные моменты суммы и разности значений рядов распределения, возникших в результате произведенных наблюдений над двумя случайными величинами:

$$r_{2(s)} = 2(1 + r), \quad r_{2(d)} = 2(1 - r)$$

[см. (2.97), (2.96)]. Из первой формулы находим

$$r = -1 + \frac{1}{2} r_{2(s)}; \quad (3.27)$$

из второй формулы получаем

$$r = +1 - \frac{1}{2} r_{2(d)}. \quad (3.28)$$

Но так как $r_{2(s)}$ и $r_{2(d)}$ являются неотрицательными величинами, т. е. $r_{2(s)} \geq 0$ и $r_{2(d)} \geq 0$, то, сопоставляя (3.27) и (3.28), мы приходим к заключению, что величина коэффициента корреляции определяется следующим двойным неравенством:

$$-1 \leq r \leq +1, \quad (3.29)$$

т. е. коэффициент корреляции по своей абсолютной величине не может быть больше единицы.

Таблица 3.19

Корреляция между величинами X_1 и X_2
($n = 10, k = 0$)

| $X_1 \backslash X_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|----------------------|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----------|
| 0 | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — | 1 |
| 1 | — | — | — | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | — | — | — | 10 |
| 2 | — | — | 2 | 5 | 9 | 12 | 9 | 5 | 2 | — | — | 44 |
| 3 | — | 2 | 5 | 14 | 24 | 27 | 24 | 14 | 5 | 2 | — | 117 |
| 4 | — | 2 | 9 | 24 | 42 | 51 | 42 | 24 | 9 | 2 | — | 205 |
| 5 | 1 | 2 | 12 | 27 | 51 | 60 | 51 | 27 | 12 | 2 | 1 | 246 |
| 6 | — | 2 | 9 | 24 | 42 | 51 | 42 | 24 | 9 | 2 | — | 205 |
| 7 | — | 2 | 5 | 14 | 24 | 27 | 24 | 14 | 5 | 2 | — | 117 |
| 8 | — | — | 2 | 5 | 9 | 12 | 9 | 5 | 2 | — | — | 44 |
| 9 | — | — | — | 2 | 2 | 2 | 2 | — | — | — | — | 10 |
| 10 | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — | 1 |
| Σ | 1 | 10 | 44 | 117 | 205 | 246 | 205 | 117 | 44 | 10 | 1 | 1000 |

$$r = 0$$

Таблица 3.20

Корреляция между величинами X_1 и X_2
($n = 10, k = 2$)

| $X_1 \backslash X_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|----------------------|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----------|
| 0 | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — | — | 1 |
| 1 | — | — | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | — | — | — | 10 |
| 2 | — | 1 | 3 | 8 | 11 | 10 | 7 | 3 | 1 | — | — | 44 |
| 3 | — | 2 | 8 | 18 | 27 | 29 | 20 | 9 | 3 | 1 | — | 117 |
| 4 | 1 | 3 | 11 | 27 | 45 | 51 | 39 | 20 | 7 | 1 | — | 205 |
| 5 | — | 2 | 10 | 29 | 51 | 62 | 51 | 29 | 10 | 2 | — | 246 |
| 6 | — | 1 | 7 | 20 | 39 | 51 | 45 | 27 | 11 | 3 | 1 | 205 |
| 7 | — | 1 | 3 | 9 | 20 | 29 | 27 | 18 | 8 | 2 | — | 117 |
| 8 | — | — | 1 | 3 | 7 | 10 | 11 | 8 | 3 | 1 | — | 44 |
| 9 | — | — | — | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | — | — | 10 |
| 10 | — | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | 1 |
| Σ | 1 | 10 | 44 | 117 | 205 | 246 | 205 | 117 | 44 | 10 | 1 | 1000 |

$$r = 0,2$$

Таблица 3.21

Корреляция между величинами X_1 и X_2 $(n = 10, k = 4)$

| $X_1 \backslash X_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|----------------------|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----------|
| 0 | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| 1 | — | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | — | — | — | — | — | 10 |
| 2 | — | 2 | 6 | 10 | 12 | 9 | 4 | 1 | — | — | — | 44 |
| 3 | 1 | 3 | 10 | 23 | 32 | 27 | 15 | 5 | 1 | — | — | 117 |
| 4 | — | 3 | 12 | 32 | 50 | 53 | 36 | 15 | 4 | — | — | 205 |
| 5 | — | 1 | 9 | 27 | 53 | 66 | 53 | 27 | 9 | 1 | — | 246 |
| 6 | — | — | 4 | 15 | 36 | 53 | 50 | 32 | 12 | 3 | — | 205 |
| 7 | — | — | 1 | 5 | 15 | 27 | 32 | 23 | 10 | 3 | 1 | 117 |
| 8 | — | — | — | 1 | 4 | 9 | 12 | 10 | 6 | 2 | — | 44 |
| 9 | — | — | — | — | — | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | — | 10 |
| 10 | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | 1 |
| Σ | 1 | 10 | 44 | 117 | 205 | 246 | 205 | 117 | 44 | 10 | 1 | 1000 |

$$r = 0,4$$

Таблица 3.22

Корреляция между величинами X_1 и X_2 $(n = 10, k = 6)$

| $X_1 \backslash X_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|----------------------|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----------|
| 0 | — | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| 1 | — | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | — | — | — | — | — | 10 |
| 2 | 1 | 3 | 9 | 14 | 11 | 5 | 1 | — | — | — | — | 44 |
| 3 | — | 3 | 14 | 30 | 36 | 24 | 8 | 2 | — | — | — | 117 |
| 4 | — | 2 | 11 | 36 | 60 | 56 | 31 | 8 | 1 | — | — | 205 |
| 5 | — | 1 | 5 | 24 | 56 | 74 | 56 | 24 | 5 | 1 | — | 246 |
| 6 | — | — | 1 | 8 | 31 | 56 | 60 | 36 | 11 | 2 | — | 205 |
| 7 | — | — | — | 2 | 8 | 24 | 36 | 30 | 14 | 3 | — | 117 |
| 8 | — | — | — | — | 1 | 5 | 11 | 14 | 9 | 3 | 1 | 44 |
| 9 | — | — | — | — | — | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | — | 10 |
| 10 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | — | 1 |
| Σ | 1 | 10 | 44 | 117 | 205 | 246 | 205 | 117 | 44 | 10 | 1 | 1000 |

$$r = 0,6$$

Таблица 3.23

Корреляция между величинами X_1 и X_2
($n = 10$, $k = 8$)

| $X_2 \backslash X_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|----------------------|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----------|
| 0 | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| 1 | 1 | 3 | 4 | 2 | — | — | — | — | — | — | — | 10 |
| 2 | — | 4 | 15 | 18 | 7 | — | — | — | — | — | — | 44 |
| 3 | — | 2 | 18 | 43 | 41 | 13 | — | — | — | — | — | 117 |
| 4 | — | — | 7 | 41 | 78 | 62 | 17 | — | — | — | — | 205 |
| 5 | — | — | — | 13 | 62 | 96 | 62 | 13 | — | — | — | 246 |
| 6 | — | — | — | — | 17 | 62 | 78 | 41 | 7 | — | — | 205 |
| 7 | — | — | — | — | — | 13 | 41 | 43 | 18 | 2 | — | 117 |
| 8 | — | — | — | — | — | — | 7 | 18 | 15 | 4 | — | 44 |
| 9 | — | — | — | — | — | — | — | 2 | 4 | 3 | 1 | 10 |
| 10 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | 1 |
| Σ | 1 | 10 | 44 | 117 | 205 | 246 | 205 | 117 | 44 | 10 | 1 | 1000 |

$$r = 0,8$$

Таблица 3.24

Корреляция между величинами X_1 и X_2
($n = 10$, $k = 10$)

| $X_2 \backslash X_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|----------------------|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----------|
| 0 | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| 1 | — | 10 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 10 |
| 2 | — | — | 44 | — | — | — | — | — | — | — | — | 44 |
| 3 | — | — | — | 117 | — | — | — | — | — | — | — | 117 |
| 4 | — | — | — | — | 205 | — | — | — | — | — | — | 205 |
| 5 | — | — | — | — | — | 246 | — | — | — | — | — | 246 |
| 6 | — | — | — | — | — | — | 205 | — | — | — | — | 205 |
| 7 | — | — | — | — | — | — | — | 117 | — | — | — | 117 |
| 8 | — | — | — | — | — | — | — | — | 44 | — | — | 44 |
| 9 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 10 | — | 10 |
| 10 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 1 |
| Σ | 1 | 10 | 44 | 117 | 205 | 246 | 205 | 117 | 44 | 10 | 1 | 1000 |

$$r = 1$$

Напомним еще раз, что r строится на основе наблюдений, и поэтому высказывания о самих случайных величинах никогда не должны быть категорическими,

При положительном r мы вправе предполагать, что одна из случайных величин в среднем возрастает, когда возрастает другая, и убывает, когда убывает другая. Если же r отрицателен, то, по-видимому, при возрастании одной величины другая величина будет в среднем убывать. Значение $r=0$ указывает на отсутствие линейной корреляции между случайными величинами; значения же $r = \pm 1$ указывают на строгую функциональную — положительную или отрицательную — линейную связь. Вообще большая близость r к 1 указывает на большую степень линейной связанности между случайными величинами.

Например, найденный выше (табл. 2.15) коэффициент корреляции между пределом прочности при кручении и пределом выносливости при изгибе легированных сталей $r = +0,95$ показывает, что между этими величинами имеется достаточно тесная положительная связь: высоким значениям одной величины соответствуют высокие, а низким — низкие значения другой величины.

Для выяснения *реального смысла коэффициента корреляции* рассмотрим приводимые ниже шесть корреляционных таблиц (табл. 3.19—3.24). Эти таблицы представляют стохастическую корреляцию между двумя случайными величинами (т. е. таблицы распределения для общих совокупностей) в том случае, когда из всего числа n факторов, равного 10, число факторов, общих для этих случайных величин, равно соответственно

0, 2, 4, 6, 8, 10.

Значения коэффициентов корреляции r для рассматриваемых таблиц указаны под каждой из них. Сопоставляя эти значения r с числом всех факторов и числом факторов, общих для обеих случайных величин, мы приходим к заключению, что коэффициент корреляции выражает отношение числа факторов, общих для обеих случайных величин, ко всему числу факторов.

Например, найдя, что коэффициент корреляции между объемным весом и модулем упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели равен приблизительно 0,9, мы можем допустить, что среди десяти некоторых факторов имеется девять факторов, одинаковым образом влияющих на изменение объемного веса и модуля упругости.

Благодаря полной ясности строения и смысла коэффициента корреляции и легкости и надежности его вычисления, мы наблюдаем широкое применение этой статистики при решении самых различных вопросов.

2. Корреляционное отношение. Коэффициент корреляции служит мерой связи только в случае линейной корреляции между случайными величинами. Если же корреляция нелинейна, тогда коэффициент корреляции утрачивает свое значение в качестве меры связи.

В случае нелинейной корреляции в качестве меры связи берется корреляционное отношение.

Корреляционное отношение η_{21} второй величины X_2 к первой X_1 равно квадратному корню из среднего значения квадратов условных основных моментов первого порядка:

$$\eta_{21}^2 = \sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_1|1} \cdot r_{(j_1)|1}^2. \quad (3.30)$$

Подобным же образом, корреляционное отношение η_{12} первой величины X_1 ко второй X_2 равно

$$\eta_{12}^2 = \sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{j_2|2} \cdot r_{(j_2)|2}^2. \quad (3.31)$$

[см. (2.118), (2.119)].

Способы вычисления корреляционного отношения показаны в табл. 2.19 и табл. 2.20.

Относительно величины корреляционного отношения можно сделать заключение, рассматривая выражения (3.30) и (2.121).

По определению (3.30), корреляционное отношение представляет всегда отвлеченное положительное число $\eta_{21} \geq 0$, а из (2.121) следует, что

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_1|1} \cdot \mu_{(j_1)|2}^* = \mu_{0|2} (1 - \eta_{21}^2).$$

Так как $\sum_{j_1=1}^{k_1} p'_{j_1|1} \cdot \mu_{(j_1)|2}^*$ и $\mu_{0|2}$, являясь суммами квадратов, не могут быть отрицательными, то должно быть $1 - \eta_{21}^2 \geq 0$, откуда

$$\eta_{21} \leq 1.$$

Таким образом, корреляционное отношение есть отвлеченное число, лежащее между нулем и единицей:

$$0 \leq \eta_{21} \leq 1. \quad (3.32)$$

По величине корреляционного отношения можно судить о степени связи между случайными величинами.

Положим, что величина X_2 находится в однозначной функциональной зависимости от X_1 . Тогда каждому значению X_1 будет соответствовать некоторое вполне определенное значение X_2 ; это положение сохранится и для совместно наблюдаемых значений, так что все условные дисперсии $\mu_{(j_1)|2}^*$ обращаются в нуль. Принимая это во внимание, мы находим, что выражение (2.121) примет вид

$$\eta_{21}^2 = 1.$$

Таким образом, в случае однозначной зависимости величины X_2 от X_1 корреляционное отношение равно единице. Обратно, из равенства корреляционного отношения единице следует, что

$\mu_{(j)|2}^* = 0$, если $p_{j1} \neq 0$ [см. (2.121)]. Последнее же указывает, что каждому наблюдаемому значению $X_{1(j)}$, отвечает только одно наблюдаемое совместно с ним значение $X_{2(j)}$, т. е. эти значения находятся в однозначной функциональной зависимости. И чем больше было сделано наблюдений, тем с большим основанием мы можем перенести это утверждение на самые случайные величины.

Положим теперь, что величины X_1 и X_2 не находятся в корреляционной связи между собой. В этом случае каждая условная дисперсия $\mu_{(j)|2}^*$ равна полной дисперсии $\mu_{0|2}$, а следовательно, и среднее из условных дисперсий равно полной дисперсии. Принимая это во внимание, мы находим из (2.121), что

$$\eta_{21}^2 = 0.$$

Таким образом, в случае некоррелированности величины X_2 с X_1 корреляционное отношение равно нулю. Обратно, если наблюдаемое корреляционное отношение равно нулю, то из (2.121) следует

$$\sum_{j=1}^{k_1} p'_{j1} \cdot \mu_{(j)|2}^* = \mu_{0|2}^*$$

Последнее в конечном счете дает основание предполагать некоррелированность случайной величины X_2 с X_1 .

Заметим, что из равенства корреляционного отношения (2.120) нулю следует только, что

$$m_{(j)|1} = m_{0|1},$$

но при этом может оказаться, что существует зависимость между наблюдаемыми условными моментами высших порядков величины X_2 с наблюдаемыми значениями величины X_1 . Таким образом, равенство корреляционного отношения нулю заставляет думать только о некоррелированности между случайными величинами, но не о стохастической независимости между ними.

Приведенный анализ показывает, что корреляционное отношение η_{21} представляет весьма совершенную меру корреляционной связи между величинами X_2 и X_1 . Выражая эту связь одним числом, измеряющим степень связи между рассматриваемыми величинами, корреляционное отношение имеет вполне определенный смысл.

Смысл численных значений корреляционного отношения не изменяется от того, какой вид имеет корреляция между случайными величинами. В этом состоит важное преимущество корреляционного отношения по сравнению с коэффициентом корреляции, численное значение которого имеет смысл только в случае линейной корреляции.

Между корреляционными отношениями η_{21} и η_{12} и коэффициентом корреляции r существует определенное соотношение. В случае

линейной статистической корреляционной связи, т. е. в рамках таблицы распределения,

$$\eta_{21}^2 = \eta_{12}^2 = r^2; \quad (3.33)$$

во всех других случаях

$$r^2 < \eta_{21}^2. \quad (3.34)$$

3. Показатель корреляции рангов. В тех случаях, когда единицы изучаемой частичной совокупности могут быть в отношении некоторого признака расположены в определенном порядке по возрастающим (или убывающим) номерам, или рангам, в качестве статистики связи служит показатель корреляции рангов.

Ранг указывает то место, которое занимает данная единица совокупности среди других единиц. Если бы каждая из этих единиц отличалась в отношении рассматриваемого признака от всех других единиц совокупности, тогда ранги представляли бы порядковые номера от 1 до числа n , равного объему совокупности. Если же некоторые из единиц совокупности оказываются в отношении рассматриваемого признака одинаковыми, то ранг всех этих единиц принимается равным среднему из соответствующих номеров.

Показатель корреляции рангов равен

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{h=1}^n d_h^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (3.35)$$

где величины d_h представляют разности между рангами h_1 и h_2 единиц, извлеченных совместно из двух общих совокупностей

$$d_h = h_1 - h_2.$$

Найдем пределы изменения показателя корреляции рангов.

Положим, что связь между случайными величинами X_1 и X_2 является строгой прямой. Тогда все разности d_h между соответствующими друг другу рангами

$$X_1: 1 \quad 2 \dots h \dots n$$

$$X_2: 1 \quad 2 \dots h \dots n$$

будут равны нулю, и, следовательно, будет равна нулю и сумма квадратов этих разностей

$$\sum_{h=1}^n d_h^2 = 0.$$

Подставляя это значение в (3.35), находим, что в случае строгой прямой связи между случайными величинами $\rho = +1$.

Если связь между случайными величинами X_1 и X_2 будет строго обратной, тогда сумма квадратов разностей между рангами

$$\begin{array}{ccccccc} X_1: & 1 & 2 & \dots & h & \dots & n \\ X_2: & n & n-1 & \dots & n-h+1 & \dots & 1 \end{array}$$

будет равна

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n d_h^2 &= [1-n]^2 + [2-(n-1)]^2 + \dots + [h-(n-h+1)]^2 + \dots + [n-1]^2 = \\ &= \sum_{h=1}^n [h-(n-h+1)]^2 = \sum_{h=1}^n [2h-(n+1)]^2 = 4 \sum_{h=1}^n h^2 - 4(n+1) \sum_{h=1}^n h + n(n+1)^2, \end{aligned}$$

или, принимая во внимание (2.77) и (2.75),

$$\sum_{h=1}^n d_h^2 = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

Подставляя это значение в (3.35), находим, что в случае строго обратной связи между случайными величинами

$$\rho = -1.$$

Наконец, в случае взаимной независимости случайных величин X_1 и X_2 с каждым рангом величины X_1 будет встречаться любой из n рангов величины X_2 с равной частотой $1/n$. Взяв какой-нибудь ранг h случайной величины X_1 , найдем значение квадрата разности между этим рангом величины X_1 и соответствующими рангами величины X_2 :

$$\begin{aligned} d_h^2 &= \frac{1}{n} [h-1]^2 + \frac{1}{n} [h-2]^2 + \dots + \frac{1}{n} [h-(h-1)]^2 + \frac{1}{n} [h-h]^2 + \\ &+ \frac{1}{n} [h-(h+1)]^2 + \dots + \frac{1}{n} [h-n]^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{h-1} j^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-h} j^2 = \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{(h-1)h(2h-1)}{6} + \frac{(n-h)(n-h+1)(2n-2h+1)}{6} \right\} = \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{6} - (n+1)h + h^2. \end{aligned}$$

Суммируя это выражение по h от 1 до n , найдем, что в случае независимости между случайными величинами X_1 и X_2

$$\sum_{h=1}^n d_h^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6}. \quad (3.36)$$

Подставляя это значение в (3.35), находим, что в случае независимости между случайными величинами

$$\rho = 0.$$

В качестве примера вычислим показатель корреляции рангов, выражающий связь между объемным весом X_1 (γ , г/см³) и пределом прочности при сжатии X_2 (σ_B , кг/см²) древесины дуба (табл. 3.25 *).

Для проверки вычислений заметим, что сумма рангов должна равняться сумме натуральных чисел от 1 до n , т. е. $\frac{n(n+1)}{2}$.

В рассматриваемом примере $\frac{19(19+1)}{2} = 190$. Кроме того, сумма отрицательных разностей d_n должна равняться сумме положительных разностей.

Применяя формулу (3.35), находим

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 171,5}{19(19^2 - 1)} = +0,85.$$

4. Статистики множественной корреляции. При изучении сложных явлений необходимо принимать во внимание более двух случайных величин. Правильное представление о природе связи между этими величинами можно получить только в том случае, если подвергнуть исследованию сразу все рассматриваемые случайные величины.

Совместное изучение трех или более случайных величин позволяет в то же время выделить влияние на одну из них какой-либо другой случайной величины при некоторых постоянных значениях остальных величин. Этим самым статистическое исчисление намечает путь, следуя которому исследователь может подойти к установлению более или менее обоснованных предположений о причинных зависимостях между изучаемыми явлениями.

Для решения этих вопросов применяются методы множественной и частной корреляции.

Статистиками, характеризующими корреляцию между многими случайными величинами, являются множественные и частные коэффициенты корреляции — в случае линейной корреляции, и множественные и частные корреляционные отношения — в случае нелинейной корреляции.

В случае множественной линейной корреляции статистики, измеряющие степень связи, являются частными случаями определителя корреляции $R^{(N)}$.

Положим, что исследуются три случайные величины X_1 , X_2 , X_3 . Обозначим коэффициент корреляции между X_1 и X_2 через r_{12} , между X_1 и X_3 через r_{13} и между X_2 и X_3 через r_{23} . Коэффициент корреляции между двумя случайными величинами будем называть *простым* коэффициентом корреляции.

*) С. А. Богословский, 1915, стр. 122—125 (VII, 106).

Замечая, что

$$r_{11} = r_{22} = r_{33} = 1, \quad r_{21} = r_{12}, \quad r_{31} = r_{13}, \quad r_{32} = r_{23},$$

мы можем *определитель корреляции* $R^{(3)}$ написать в виде

$$R^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.38)$$

Миноры этого определителя равны

$$\left. \begin{aligned} R_{11}^{(3)} &= \begin{vmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{32} & 1 \end{vmatrix}, & R_{12}^{(3)} = R_{21}^{(3)} &= - \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ r_{32} & 1 \end{vmatrix}, \\ R_{22}^{(3)} &= \begin{vmatrix} 1 & r_{13} \\ r_{31} & 1 \end{vmatrix}, & R_{13}^{(3)} = R_{31}^{(3)} &= \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ 1 & r_{23} \end{vmatrix}, \\ R_{23}^{(3)} = R_{32}^{(3)} &= - \begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{31} & r_{32} \end{vmatrix}, & R_{33}^{(3)} &= \begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Множественный коэффициент корреляции $r_{1.23}$, как мера тесноты линейной связи случайной величины X_1 с двумя другими величинами X_2 и X_3 , определяется следующим образом:

$$r_{1.23} = \left(1 - \frac{R^{(3)}}{R_{11}^{(3)}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}, \quad (3.40)$$

причем перед корнем надо брать всегда положительный знак.

Подобным же образом

$$r_{2.13} = \left(1 - \frac{R^{(3)}}{R_{22}^{(3)}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{r_{21}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}}, \quad (3.41)$$

$$r_{3.12} = \left(1 - \frac{R^{(3)}}{R_{33}^{(3)}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{r_{31}^2 + r_{32}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{12}^2}}. \quad (3.42)$$

Величина множественного коэффициента корреляции заключена в пределах от 0 до 1:

$$0 \leq r_{1.23} \leq 1. \quad (3.43)$$

Если X_1 не находится в линейной корреляционной связи с X_2 и X_3 , то $r_{1.23} = 0$; если же X_1 находится в строгой линейной связи с X_2 и X_3 и связь между X_2 и X_3 строгая, то $r_{1.23} = 1$.

Принимая во внимание (3.43), получим из (3.40)

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} \leq 1 - r_{23}^2. \quad (3.44)$$

Отсюда мы можем найти пределы, между которыми находится коэффициент корреляции r_{23} , если известны r_{12} и r_{13} :

$$r_{12}r_{13} - \sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{13}^2)} < r_{23} < r_{12}r_{13} + \sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{13}^2)}. \quad (3.45)$$

Множественный коэффициент корреляции, выражая степень связи между одной случайной величиной и всеми остальными величинами, служит для определения совокупного влияния на изучаемую величину всех других величин.

Кроме определения этой совокупной статистики корреляционной связи, важно измерить степень связи между двумя какими-либо рассматриваемыми случайными величинами, когда остальные величины имеют некоторые постоянные значения.

Исследователь часто не имеет возможности непосредственно изучать влияние одной величины на другую при сохранении постоянных условий для прочих величин. При помощи же методов корреляционного анализа, — а именно, частной корреляции, — это делается на основании имеющихся данных без дополнительной экспериментальной работы.

Таким образом, понятие частной корреляции представляет весьма важное расширение корреляционного анализа. Частная корреляция позволяет произвести более глубокое исследование связей между случайными величинами, давая возможность выделить влияние различных причин на изучаемое явление.

Частный коэффициент корреляции $r_{12.3}$, как мера тесноты линейной связи случайной величины X_1 с величиной X_2 при постоянном значении X_3 , равен

$$r_{12.3} = - \frac{R_{12}^{(3)}}{[R_{11}^{(3)}R_{22}^{(3)}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}}. \quad (3.46)$$

Подобным же образом

$$r_{13.2} = - \frac{R_{13}^{(3)}}{[R_{11}^{(3)}R_{33}^{(3)}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{23}^2)}}, \quad (3.47)$$

$$r_{23.1} = - \frac{R_{23}^{(3)}}{[R_{22}^{(3)}R_{33}^{(3)}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{13}^2)}}. \quad (3.48)$$

Корень в знаменателях этих выражений берется со знаком плюс.

Между множественными, частными и простыми коэффициентами корреляции имеются важные соотношения

$$r_{1.23} = \sqrt{1 - (1 - r_{13}^2)(1 - r_{12.3}^2)}, \quad (3.49)$$

$$r_{1.23} = \sqrt{1 - (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13.2}^2)}. \quad (3.50)$$

Статистиками множественной нелинейной корреляции являются множественные и частные корреляционные отношения.

Множественное корреляционное отношение $\eta_{1\ 23}$ случайной величины X_1 к X_2 и X_3 дается выражением

$$\eta_{1\ 23}^2 = \sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_3=1}^{k_3} p'_{\cdot | j_2 | j_3} r_{1 | (j_2) | (j_3)}^2, \quad (3.51)$$

или равносильными ему выражениями

$$\eta_{1\ 23}^2 = 1 - \frac{\sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_3=1}^{k_3} p'_{\cdot | j_2 | j_3} \mu_{2 | (j_2) | (j_3)}^*}{\mu_{2 | 0 | 0}}, \quad (3.52)$$

$$\eta_{1\ 23}^2 = \frac{\sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_3=1}^{k_3} p'_{\cdot | j_2 | j_3} (m_{1 | (j_2) | (j_3)} - m_{1 | 0 | 0})^2}{\mu_{2 | 0 | 0}}. \quad (3.53)$$

Частное корреляционное отношение $\eta_{12.3}$ случайной величины X_1 к X_2 при данном значении X_3 вычисляется по формуле

$$\eta_{12.3}^2 = 1 - \frac{\sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{\cdot | j_2 | (j_3)} \mu_{2 | (j_2) | (j_3)}^*}{\mu_{2 | 0 | (j_3)}}, \quad (3.54)$$

или

$$\eta_{12.3}^2 = \frac{\sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{\cdot | j_2 | (j_3)} (m_{1 | (j_2) | (j_3)} - m_{1 | 0 | (j_3)})^2}{\mu_{2 | 0 | (j_3)}}. \quad (3.55)$$

§ 1. Вероятности

1. Вероятности. Статистики распределения и связи являются численными характеристиками свойств случайных величин. Вычислением статистик ограничиваются в тех случаях, когда имеется в виду простое описание данных, полученных при наблюдении.

Но основная задача статистического исчисления состоит в том, чтобы по выборке значений случайной величины, взятой наудачу из некоторой общей совокупности, сделать достаточно надежные выводы об объективных свойствах явлений, выражаемых полно лишь общей совокупностью значений случайной величины (см. гл. I, § 1, п. 1).

Решение этой задачи основывается на одной весьма общей теореме, известной под названием закона больших чисел.

Для доказательства закона больших чисел необходимо, прежде всего, выяснить основное понятие статистического исчисления — понятие вероятности события, понимая под событием всякое явление, которое может совершиться.

Вопрос о вероятности какого-либо события E возникает тогда, когда имеется налицо реальная возможность его, т. е. когда с этим событием связано некоторое число n случаев, или шансов

$$C_1, C_2, \dots, C_n, \quad (4.1)$$

при одних из которых событие появляется, а при всех прочих — не появляется.

Совокупность условий, при которых вопрос о вероятности события получает определенное решение, называется испытанием. Вероятность события устанавливается при определенной совокупности условий; с изменением условий и вероятность события изменяется.

Для того чтобы вероятность события E могла быть выражена в численном виде, необходимо, чтобы случаи (4.1), связанные с этим событием, были единственно возможными, несовместимыми и равновероятными.

Если на верное должен появиться один из возможных случаев, связанных с каким-либо событием и по отношению к этому событию никаких других случаев не имеется, то эти случаи называются единственно возможными.

Если каждый из возможных при данном испытании случаев исключает остальные, так что невозможно одновременное суще-

ствование каких бы то ни было двух из этих случаев, то эти случаи называются несовместимыми.

Если все случаи, связанные с каким-либо событием, являются такими элементарно простыми случаями, появление каждого из которых одинаково возможно, то эти случаи называются равно-возможными.

Равновозможность случаев есть объективное свойство явлений, заключающееся в том, что каждый случай может быть заменен другим без того, чтобы изменилась вероятность соответствующего события. При наличии равновозможности случаев мы можем сравнивать события в отношении возможности их появления, т. е. высчитывать вероятности событий.

Вероятность, определяемая в виде числа, зависит только от двух величин: от общего числа n случаев, могущих произойти при данном испытании, и от числа m случаев, при которых событие появляется. Все равновозможные случаи, могущие произойти при данном испытании, называются случаями, соответствующими вопросу. Те же из соответствующих вопросу случаев, при которых имеет место какое-либо событие, называются случаями, благоприятными для этого события.

Вероятность события p_E (в классическом виде) определяется как отношение числа m случаев, благоприятных этому событию, к числу n всех равновозможных случаев, соответствующих вопросу:

$$p_E = \frac{m}{n}. \quad (4.2)$$

Таким образом, вероятность представляет число, характеризующее степень возможности появления события. Это число является мерой объективно существующей связи между условиями, при которых может произойти рассматриваемое событие, и этим событием.

Так как число m случаев, благоприятных событию, не может быть меньше нуля и больше всего числа n случаев, соответствующих вопросу, то величина вероятности заключается в пределах между нулем и единицей, т. е. представляет правильную положительную дробь:

$$0 \leq p_E \leq 1. \quad (4.3)$$

С уменьшением числителя m дробь m/n уменьшается. В том же случае, когда число m будет равно нулю, т. е. для событий невозможных, которым не благоприятствует ни один случай, вероятность обращается в нуль. Поэтому

$$p_E = 0 \quad (4.4)$$

указывает на невозможность события.

Если же числитель m будет увеличиваться, то и дробь m/n будет увеличиваться, стремясь к единице; когда же число m будет

равно числу всех случаев n , соответствующих вопросу, т. е. когда при каждом из возможных случаев (4.1) появляется событие E , тогда это событие становится достоверным. Поэтому

$$p_E = 1 \quad (4.5)$$

указывает на достоверность события.

2. Общие положения о вероятностях. Пользуясь определением вероятности (4.2), можно во многих случаях находить вероятности непосредственно. В более же сложных случаях применяются основные теоремы относительно вероятностей: теорема сложения вероятностей и теорема умножения вероятностей.

Рассматриваемые основные теоремы дают возможность свести решение сложных вопросов статистического исчисления к решению вопросов более простых. Этим самым устанавливается метод статистического исчисления, для которого вычисление вероятностей служит только одним из средств при решении наиболее важных задач.

Сами по себе эти теоремы крайне просты, но при их применении необходимо всегда строго исследовать природу вопроса и не упускать из виду тех предпосылок, которые лежат в основе этих теорем.

Прежде чем перейти к установлению указанных основных теорем, выясним некоторые положения общего характера.

Одним из таких положений является следующая аксиома Маркова:

Если при известных данных случаи

$$C_1, C_2, \dots, C_m, C_{m+1}, C_{m+2}, \dots, C_n$$

равновозможны и делятся по отношению к событию E на благоприятные ему

$$C_1, C_2, \dots, C_m \quad (*)$$

и неблагоприятные ему

$$C_{m+1}, C_{m+2}, \dots, C_n \quad (**)$$

*то — по присоединении к этим данным указания на появление события E — случаи (**), которые не благоприятствуют событию E , становятся невозможными и, следовательно, отпадают; остальные же случаи (*) остаются по-прежнему равновозможными.*

К положениям общего характера можно отнести также деление вероятностей на полные и условные. Вероятность события называется полной, когда это событие рассматривается самостоятельно, без отношения к другим событиям. Когда же при определении вероятности события принимается во внимание появление или неappearance других событий, то мы будем иметь условную вероятность события.

Условной вероятностью события E_2 относительно другого события E_1 называется вероятность события E_2 , вычисленная в предположении, что событие E_1 имело место. Этой вероятности, которая обозначается через $p_{(E_2) | E_1}$, может быть противопоставлена обратная условная вероятность $p_{E_1 | (E_2)}$ события E_1 , вычисленная в предположении, что появилось событие E_2 .

При помощи этих понятий можно установить признаки независимости и зависимости событий. Под независимыми событиями понимаются такие события, вероятность появления каждого из которых не изменяет своего значения после того, как одно или несколько других событий появились. В случае же зависимости событий появление одних событий приводит к изменению вероятностей других событий.

Признаком зависимости события E_2 от события E_1 является отношение

$$p_{(E_2) | E_1} \neq p_{E_2}, \quad (4.6)$$

а признаком независимости служит равенство

$$p_{(E_2) | E_1} = p_{E_2}. \quad (4.7)$$

3. Теорема сложения вероятностей. Перейдем к выводу основных теорем относительно вероятностей. Доказательство этих теорем весьма несложно; оно соединено лишь с допущением, что все события можно приводить к равновозможным.

Теорема сложения вероятностей устанавливает, что *вероятность*

$$p_{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k}$$

появления одного из нескольких несовместимых событий

$$E_1, E_2, \dots, E_k,$$

без указания какого именно, равна сумме вероятностей этих событий

$$p_{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k} = p_{E_1} + p_{E_2} + \dots + p_{E_k}. \quad (4.8)$$

(Знак \cup читается «или».)

Доказательство этой теоремы основывается на том, что в силу несовместимости событий E_1, E_2, \dots, E_k среди случаев, благоприятных какому-либо отдельному событию, не будет случаев, благоприятных остальным событиям. Поэтому, обозначая через n число всех возможных случаев, а через m_1, m_2, \dots, m_k — число случаев, благоприятных соответственно событиям E_1, E_2, \dots, E_k , находим, что отношение числа

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k$$

различных между собой случаев к числу n всех возможных случаев будет выражать вероятность появления одного из событий E_1, E_2, \dots, E_k , без указания какого именно:

$$P_{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_k}{n}.$$

Но

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_k}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \dots + \frac{m_k}{n};$$

каждая же из дробей в правой части этого равенства представляет вероятность появления отдельного события E_1, E_2, \dots, E_k , т. е. равна $P_{E_1}, P_{E_2}, \dots, P_{E_k}$. Следовательно,

$$P_{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k} = P_{E_1} + P_{E_2} + \dots + P_{E_k}.$$

Одним из следствий теоремы сложения вероятностей можно считать положение о том, что сумма вероятностей единственно возможных и несовместимых событий равна единице:

$$P_{E_1} + P_{E_2} + \dots + P_{E_k} = 1. \quad (4.9)$$

Чтобы получить это положение из (4.8), достаточно заметить, что появление одного из единственно возможных событий представляет событие достоверное, вероятность которого равна единице [см. (4.5)].

Особенно важным является случай двух единственно возможных и несовместимых событий, которые называются *противоположными* и вероятности которых обозначаются через p и q .

На основании (4.9) имеем

$$p + q = 1, \quad (4.10)$$

т. е. сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

Отсюда следует, что если известна вероятность одного из противоположных событий, то можно получить вероятность другого, вычитая вероятность первого события из единицы:

$$p = 1 - q, \quad q = 1 - p. \quad (4.11)$$

Если событие E достоверно, то противоположное ему событие невозможно; если же событие E невозможно, то противоположное ему событие достоверно.

Чем ближе вероятность события к единице, тем с большей уверенностью можно ожидать появления этого события и не ожидать появления события, противоположного ему.

4. Теорема умножения вероятностей. Теорема умножения вероятностей устанавливает, что *вероятность*

$$P_{E_1 | E_2 | \dots | E_k}$$

нескольким событиям появиться вместе (одновременно или последовательно) равна произведению их вероятностей

$$P_{(E_1)|(E_2)|\dots|(E_{j-1})|E_j} \quad \text{при } j = 2, 3, \dots, k,$$

вычисленных для каждого события E_j в предположении, что все предшествующие ему в ряде события имеют место:

$$P_{E_1|E_2|\dots|E_k} = P_{E_1} P_{(E_1)|E_2} \dots P_{(E_1)|(E_2)|\dots|(E_{k-1})|E_k}. \quad (4.12)$$

Докажем сначала эту теорему для двух событий E_1 и E_2 .

Пусть имеется n единственно возможных, несовместимых и равновероятных случаев

$$C_1, C_2, \dots, C_m, C_{m+1}, \dots, C_{m_1}, C_{m_1+1}, \dots, C_n;$$

из них событию E_1 благоприятствуют только первые m_1 случаев, а из этих последних случаев событию E_2 благоприятствуют только первые m случаев

$$\overbrace{C_1, C_2, \dots, C_m, C_{m+1}, \dots, C_{m_1}, C_{m_1+1}, \dots, C_n}^{E_1}_{E_2}.$$

При таких условиях вероятность события E_1 выразится дробью $p_{E_1} = m_1/n$; вероятность же события E_2 , когда известно существование события E_1 , выразится, согласно аксиоме Маркова (п. 2), дробью $p_{(E_1)|E_2} = m/m_1$; наконец, вероятность появления обоих событий E_1 и E_2 вместе равна

$$p_{E_1|E_2} = \frac{m}{n},$$

так как из всех n рассматриваемых случаев совместному появлению обоих событий E_1 и E_2 благоприятствуют только m случаев C_1, C_2, \dots, C_m .

Но $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m}{m_1}$, или

$$p_{E_1|E_2} = p_{E_1} \cdot p_{(E_1)|E_2}. \quad (4.13)$$

Таким образом, вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности первого события на вероятность второго события, вычисленную в предположении, что первое событие имело место.

Подобным же образом находим

$$p_{E_1|E_2} = p_{E_2} \cdot p_{E_1|(E_2)}. \quad (4.14)$$

Переходя последовательно от случая двух событий к случаю трех, от случая трех событий к случаю четырех и т.д., мы можем

распространить теорему умножения вероятностей на случай какого угодно числа событий.

Теорема умножения вероятностей упрощается в важном случае независимых событий. В случае независимых событий условная вероятность события совпадает, согласно (4.7), с полной вероятностью события. В соответствии с этим, теорема умножения вероятностей принимает более простой вид, а именно: вероятность совместного появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$p_{E_1|E_2|\dots|E_k} = p_{E_1} p_{E_2} \dots p_{E_k}. \quad (4.15)$$

В частности, вероятность совместного появления двух независимых событий E_1 и E_2 равна

$$p_{E_1|E_2} = p_{E_1} p_{E_2}. \quad (4.16)$$

Если вероятности всех независимых событий равны между собой

$$p_{E_1} = p_{E_2} = \dots = p_{E_k} = p,$$

то вероятность $p_{E_1|E_2|\dots|E_k}$ появления всех этих событий вместе, или, что одно и то же, — вероятность одному и тому же событию, с одной и той же вероятностью p , появиться k раз подряд, равна k -й степени вероятности p :

$$p_{E_1|E_2|\dots|E_k} = p^k. \quad (4.17)$$

Так как $p < 1$, если событие недостоверно, то с увеличением k величина p^k уменьшается; следовательно, чем больше число испытаний, тем менее вероятно, что событие E будет повторяться при всех испытаниях; при неограниченном же возрастании числа k вероятность p^k повторения события при всех испытаниях стремится к нулю.

Из (4.17) следует, что если q есть вероятность неоявления события, то вероятность появления этого события по крайней мере один раз при k испытаниях будет равна $1 - q^k$.

§ 2. Случайные величины

1. Прерывные случайные величины. Понятие вероятности и теоремы относительно вероятностей лежат в основе изучения случайных величин.

Случайные величины бывают прерывного, непрерывного и произвольного типа. Чтобы достигнуть лучшего понимания предмета, естественно начать изложение с простейшего случая прерывных случайных величин.

Положим, что некоторая величина X может принимать k различных значений

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(j)}, \dots, x_{(k)} \quad (4.18)$$

с определенными вероятностями

$$p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_k, \quad (4.19)$$

так что вероятность величине X иметь значение $x_{(j)}$ равна p_j . Положим, далее, что, кроме указанных значений (4.18), величина X никаких других значений принимать не может, и, следовательно, сумма вероятностей (4.19), на основании теоремы сложения вероятностей (4.9), равна единице:

$$\sum_{j=1}^k p_j = 1. \quad (4.20)$$

Определенная таким образом величина X называется случайной величиной.

Система значений случайной величины X и соответствующих им вероятностей

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(j)}, \dots, x_{(k)} \\ p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_k \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

называется рядом распределения этой случайной величины, или просто ее распределением.

Изучая одновременно две случайные величины X_1 и X_2 , положим, что X_1 принимает k_1 значений, а X_2 принимает k_2 значений.

Обозначим через $p_{j_1 \cdot}$ вероятность того, что величина X_1 примет некоторое значение $x_{1(j_1)}$ из ряда k_1 возможных ее значений, каковы бы ни были значения величины X_2 , а через $p_{\cdot j_2}$ — вероятность того, что величина X_2 примет некоторое значение $x_{2(j_2)}$ из ряда k_2 возможных ее значений, каковы бы ни были значения X_1 .

Пусть, далее, $p_{j_1 j_2}$ обозначает вероятность совместного существования равенств

$$X_1 = x_{1(j_1)} \quad \text{и} \quad X_2 = x_{2(j_2)}, \quad (4.22)$$

т. е. вероятность того, что величина X_1 примет значение $x_{1(j_1)}$, а величина X_2 примет одновременно с этим значение $x_{2(j_2)}$.

Тогда совместное распределение двух величин X_1 и X_2 может быть представлено в виде системы (табл. 4.1).

Система значений двух случайных величин и вероятностей всех возможных сочетаний этих значений называется таблицей распределения этих величин, или просто их совместным распределением.

Т а б л и ц а 4.1

Таблица распределения

| $X_1 \backslash X_2$ | $x_2 (1)$ | $x_2 (2)$ | \dots | $x_2 (j_2)$ | \dots | $x_2 (k_2)$ | \sum_{j_2} |
|----------------------|---------------|---------------|---------|-----------------|---------|-----------------|------------------|
| $x_1 (1)$ | $p_{1 1}$ | $p_{1 2}$ | \dots | $p_{1 j_2}$ | \dots | $p_{1 k_2}$ | $p_{1 \cdot}$ |
| $x_1 (2)$ | $p_{2 1}$ | $p_{2 2}$ | \dots | $p_{2 j_2}$ | \dots | $p_{2 k_2}$ | $p_{2 \cdot}$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | | \vdots | | \vdots | \vdots |
| $x_1 (j_1)$ | $p_{j_1 1}$ | $p_{j_1 2}$ | \dots | $p_{j_1 j_2}$ | \dots | $p_{j_1 k_2}$ | $p_{j_1 \cdot}$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | | \vdots | | \vdots | \vdots |
| $x_1 (k_1)$ | $p_{k_1 1}$ | $p_{k_1 2}$ | \dots | $p_{k_1 j_2}$ | \dots | $p_{k_1 k_2}$ | $p_{k_1 \cdot}$ |
| \sum_{j_1} | $p_{\cdot 1}$ | $p_{\cdot 2}$ | \dots | $p_{\cdot j_2}$ | \dots | $p_{\cdot k_2}$ | 1 |

На основании теоремы сложения вероятностей (4.8) находим, что сумма вероятностей каждой строки таблицы распределения равна вероятностям, помещенным в правом итоговом столбце таблицы:

$$\sum_{j_2=1}^{k_2} p_{j_1|j_2} = p_{j_1| \cdot}, \quad (4.23)$$

а сумма вероятностей каждого столбца таблицы распределения равна вероятностям, помещенным в нижней итоговой строке таблицы:

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1|j_2} = p_{\cdot|j_2}, \quad (4.24)$$

сумма же всех вероятностей таблицы распределения равна единице. Действительно, суммируя (4.23) по j_1 от $j_1 = 1$ до $j_1 = k_1$ и принимая во внимание (4.20), находим

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{j_1|j_2} = \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1| \cdot} = 1. \quad (4.25)$$

Подобным же образом, суммируя (4.24) по j_2 от $j_2 = 1$ до $j_2 = k_2$, получим

$$\sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1|j_2} = \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{\cdot|j_2} = 1.$$

Из (4.25) и (4.26) следует, что

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{j_1 | j_2} = \sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1 | j_2}, \quad (4.27)$$

откуда заключаем, что суммирование вероятностей сначала по строкам, а затем по столбцам таблицы распределения можно заменить суммированием сначала по столбцам, а затем по строкам таблицы.

Обозначим, наконец, через $p_{(j_1) | j_2}$ условную вероятность значения $x_{2(j_2)}$ величины X_2 в предположении, что величина X_1 получила значение $x_{1(j_1)}$, и через $p_{j_1 | (j_2)}$ условную вероятность значения $x_{1(j_1)}$ величины X_1 в предположении, что величина X_2 получила значение $x_{2(j_2)}$. Тогда, на основании теоремы умножения вероятностей (4.13), найдем, что вероятность совместного появления двух событий (4.22) будет равна

$$p_{j_1 | j_2} = p_{j_1} \cdot p_{(j_1) | j_2}, \quad (4.28)$$

или

$$p_{j_1 | j_2} = p_{\cdot | j_2} p_{j_1 | (j_2)}. \quad (4.29)$$

Из (4.28) следует

$$p_{(j_1) | j_2} = \frac{p_{j_1 | j_2}}{p_{j_1}}, \quad (4.30)$$

т. е. условная вероятность значения $x_{2(j_2)}$ случайной величины X_2 равна отношению вероятности совместного появления значений $x_{1(j_1)}$ и $x_{2(j_2)}$ к вероятности значения $x_{1(j_1)}$ случайной величины X_1 .

Подобным же образом, из (4.29) находим

$$p_{j_1 | (j_2)} = \frac{p_{j_1 | j_2}}{p_{\cdot | j_2}}. \quad (4.31)$$

Таблица распределения (табл. 4.1) выражает стохастическую связь между двумя случайными величинами X_1 и X_2 (ср. гл. I, § 2, п. 3). *Стохастическая связь* показывает, что если одна из случайных величин X_1 принимает некоторое определенное значение, то в зависимости от этого другая случайная величина X_2 получает некоторый ряд значений с соответствующими вероятностями. Этот ряд называется *условным рядом распределения* величины X_2 при данном значении X_1 .

2. Независимые и связанные случайные величины. Если условный ряд распределения одной величины X_2 остается неизменным при всех значениях другой величины X_1 , то величина X_2 называется *независимой* от X_1 . В противном случае величина X_2 называется *связанной* с X_1 .

Другими словами, независимость случайной величины X_2 от X_1 определяется системой условий

$$p_{(j_1) | j_2} = p_{\cdot | j_2} \quad (4.32)$$

при всех значениях j_1 и j_2 . Подобным же образом независимость случайной величины X_1 от X_2 определяется системой условий

$$p_{j_1 | (j_2)} = p_{j_1 \cdot} \quad (4.33)$$

при всех значениях j_2 и j_1 .

Несколько случайных величин называются независимыми между собой, если вероятность для каждой из них принимать некоторое определенное значение не зависит от значений, принимаемых прочими случайными величинами.

Если более чем две случайные величины являются независимыми между собой, согласно приведенному выше определению, то ясно, что какие-либо две из них являются независимыми между собой. Какие-либо случайные величины, взятые попарно, могут оказаться независимыми между собой; однако они не будут независимыми, когда будут взяты все вместе. Следовательно, говоря о независимости случайных величин, необходимо точно указывать, являются ли они независимыми все вместе или только попарно.

В случае независимости случайной величины X_2 от X_1 оказывается, что и величина X_1 независима от X_2 . Другими словами, две случайные величины могут быть независимыми только взаимно. Это положение становится ясным из следующих рассуждений.

На основании (4.28) и (4.29) имеем

$$p_{\cdot | j_2} p_{j_1 | (j_2)} = p_{j_1 \cdot} p_{(j_1) | j_2} \quad (4.34)$$

Так как при независимости X_2 от X_1 имеет место равенство (4.32), то, заменяя в (4.34) вероятность $p_{(j_1) | j_2}$ через $p_{\cdot | j_2}$ и сокращая на $p_{\cdot | j_2}$ (считаем, что $p_{\cdot | j_2} \neq 0$), получим

$$p_{j_1 | (j_2)} = p_{j_1 \cdot}$$

при тех же самых значениях j_2 и j_1 .

Таким образом, если имеет место равенство (4.32) при всех значениях j_1 и j_2 , то будет иметь место также и равенство (4.33) при всех значениях j_2 и j_1 , т. е. независимость X_2 от X_1 обуславливает независимость X_1 от X_2 .

Подставляя из равенств (4.32) и (4.33) вероятности $p_{(j_1) | j_2}$ и $p_{j_1 | (j_2)}$ в выражения (4.28) и (4.29), находим, что в случае независимости случайных величин X_1 и X_2

$$p_{j_1 | j_2} = p_{j_1 \cdot} p_{\cdot | j_2} \quad (4.35)$$

при всех значениях j_1 и j_2 .

Обратно, если имеет место равенство (4.35) при всех значениях j_1 и j_2 , то случайные величины X_1 и X_2 взаимно независимы, так как в этом случае будут налицо системы (4.32) и (4.33), определяющие взаимную независимость X_1 и X_2 . Таким образом, равенство (4.35) при всех значениях j_1 и j_2 является не только необходимым, но и достаточным условием взаимной независимости случайных величин X_1 и X_2 .

3. Непрерывные случайные величины. При решении многих вопросов статистического исчисления по самой природе этих вопросов возникает необходимость введения случайных величин, принимающих бесконечно многие значения. Но даже и в тех случаях, когда мы изучаем случайные величины, имеющие конечное, но очень большое число значений, часто оказывается целесообразным для приближенных вычислений заменять их величинами с бесконечно многими значениями. Среди таких величин наиболее важными являются непрерывные случайные величины.

Рассматривая непрерывную случайную величину x , мы должны предположить, что ее размах изменения известен и представлен некоторым промежутком (a, b) , конечным или бесконечным. Кроме того, мы должны ввести понятие вероятности того, что величина x будет заключена в данном промежутке (c, d) , представляющем часть промежутка (a, b) .

Чтобы при этом не впасть в противоречие с основными положениями относительно вероятностей, необходимо, чтобы вероятность $P(c, d)$ для x находиться в промежутке (c, d) удовлетворяла условиям:

$$\begin{aligned} 1) P(c, d) \geq 0, \quad 2) P(a, b) = 1, \quad 3) P(c, d) = P(c, e) + P(e, d), \\ 4) P(c, d) \rightarrow 0, \text{ если } d \rightarrow c. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Первое условие выражает, что вероятность не может быть отрицательной [ср. (4.3)]. Второе условие соответствует тому, что случайная величина x , наверное, примет одно из всех ее возможных значений [ср. (4.20)]. Третье условие показывает, что если промежуток (c, d) разделен на два смежных промежутка (c, e) и (e, d) , то вероятность $P(c, d)$ устанавливается в соответствии с теоремой сложения вероятностей (4.8). Наконец, четвертое условие состоит в том, что в случае непрерывных случайных величин вероятность $P(c, d)$ для бесконечно малого промежутка (c, d) тоже есть величина бесконечно малая.

Свойства 3) и 4) показывают, что $P(c, d)$ есть непрерывная функция от c и d и что

$$P(c, c) = 0, \quad (4.37)$$

т. е. вероятность того, что x принимает какое-либо данное значение, равна нулю.

4. Дифференциальная функция распределения. При определении вероятности $P(c, d)$ в случае непрерывного распределения мы поступаем по аналогии с определением массы неоднородного стержня. Действительно, распределение массы стержня удовлетворяет всем условиям, установленным выше для вероятностей. В частности, масса Δm , содержащаяся в бесконечно малом участке стержня $(z, z + \Delta z)$, является также бесконечно малой, и средняя плотность данного участка стержня $\Delta m / \Delta z$ при $\Delta z \rightarrow 0$ вообще предполагается стремящейся к некоторому пределу, называемому плотностью стержня в точке z .

Если эта плотность $\rho(z)$ известна, то масса, содержащаяся в каком-либо участке стержня (c, d) , выражается интегралом

$$\int_c^d \rho(z) dz.$$

Следуя этой аналогии, примем, что средняя плотность вероятности

$$\frac{P(z, z + \Delta z)}{\Delta z}$$

стремится к пределу $f(z)$, представляющему *плотность вероятности* в точке z , когда длина промежутка Δz стремится к нулю:

$$f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P(z, z + \Delta z)}{\Delta z}. \quad (4.38)$$

Отсюда вероятность, соответствующая промежутку (c, d) , будет выражена интегралом

$$P(c, d) = \int_c^d f(z) dz. \quad (4.39)$$

Это выражение удовлетворяет всем условиям (4.36), если плотность вероятности $f(z)$ подвержена двум условиям:

$$1) f(z) \geq 0 \text{ для всех } z \text{ в промежутке } (a, b), \quad (4.40)$$

$$2) \int_a^b f(z) dz = 1. \quad (4.41)$$

Второе условие подразумевает, конечно, существование самого интеграла. Но в сколько-нибудь важных случаях плотность является непрерывной, за исключением прерывностей простейшего вида, которые не вызывают сомнения относительно существования рассматриваемого интеграла.

Из общего выражения вероятности (4.39), соответствующей промежутку (c, d) , следует, что для бесконечно малого промежут-

ка $(z, z + dz)$ вероятность равна $f(z)dz$, если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка.

Функция $f(x)$ называется *дифференциальной функцией распределения* случайной величины x , а кривая, изображающая эту функцию, — *дифференциальной кривой* распределения. Ординаты $f(x)$ этой кривой не представляют вероятности случайной величине иметь определенное значение x , так как, согласно (4.37), вероятность такого точного совпадения равна нулю. Для графического изображения вероятности $P(c, d)$ случайной величине иметь значение, находящееся в промежутке (c, d) , надо, согласно (4.39), измерить площадь, заключенную между кривой

$$y = f(x),$$

осью абсцисс и прямыми $x = c$ и $x = d$ (рис. 4.1).

5. Интегральная функция распределения. Промежуток, содержащий все возможные значения случайной величины, может быть конечным или бесконечным, в согласии с природой этой величины. Однако во всех случаях мы можем взять наибольший возможный промежуток от $-\infty$ до $+\infty$; для этого достаточно принять плотность вероятности вне первоначально данного промежутка равной нулю. Тогда плотность вероятности будет определена для всех действительных значений x и будет удовлетворять условиям (4.40) и (4.41). Последнее условие соответствует тому, что вероятность величине x принять хотя бы какое-либо одно значение в промежутке $(-\infty, +\infty)$ приводится к достоверности.

Кроме того, вероятность для x быть в промежутке (c, d) будет дана выражением

$$\int_c^d f(z) dz.$$

В частности, взяв $c = -\infty$ и написав t вместо d , получим, что

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(z) dz \quad (4.42)$$

представляет вероятность неравенства $x < t$:

$$F(t) = P(x < t). \quad (4.43)$$

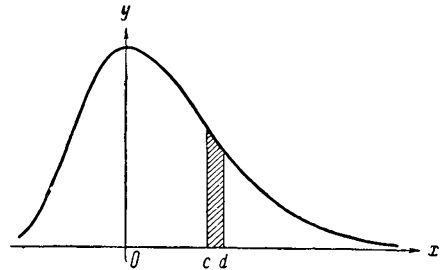


Рис. 4.1. Дифференциальная кривая распределения.

Функция $F(t)$ называется *интегральной функцией распределения* случайной величины x , а кривая, изображающая эту функцию, — *интегральной кривой распределения*.

Функция $F(t)$ нигде не убывает и изменяется от $F(-\infty) = 0$ до $F(+\infty) = 1$ (рис. 4.2). В самом деле, приращение интегральной функции распределения $F(t_2) - F(t_1)$ равно вероятности того, что значение случайной величины x будет находиться в промежутке $t_1 \leq x < t_2$; это следует из условия 3 (4.36), в силу чего

$$P(x < t_2) = P(x < t_1) + P(t_1 \leq x < t_2),$$

откуда

$$F(t_2) - F(t_1) = P(x < t_2) - P(x < t_1) = P(t_1 \leq x < t_2). \quad (4.44)$$

Таким образом, приращение функции $F(t)$ неотрицательно и, следовательно, $F(t)$ является неубывающей функцией.

Кроме того, функция $F(t)$, как вероятность, заключена между 0 и 1. Действительно, в силу невозможности неравенства $x < -\infty$ имеем $F(-\infty) = 0$, а в силу достоверности неравенства $x < +\infty$ имеем $F(+\infty) = 1$. Таким образом,

$$0 \leq F(t) \leq 1. \quad (4.45)$$

Из равенства (4.44) видно, что если функция $F(x)$ непрерывна, то

$$P(t_1 \leq x < t_2) \rightarrow 0,$$

если $t_2 \rightarrow t_1$. Следовательно, в случае непрерывности функции $F(x)$

$$P(x = t_1) = 0.$$

Наоборот, если вероятность точного равенства $x = t_1$ не равна нулю, то значение t_1 является точкой разрыва непрерывности для функции $F(x)$.

Между интегральной и дифференциальной кривыми распределения имеется тесная связь, позволяющая по одной из этих кривых восстановить другую. Действительно, из того, что $f(x) = F'(x)$, следует, что ордината точки $M(x; y)$ дифференциальной кривой равна тангенсу угла наклона касательной в точке $M(x; y)$ к интегральной кривой.

Величина

$$P(x \leq X < x + dx) = f(x) dx \quad (4.46)$$

называется *дифференциалом распределения* и выражает вероятность, что X находится в промежутке от x до $x + dx$.

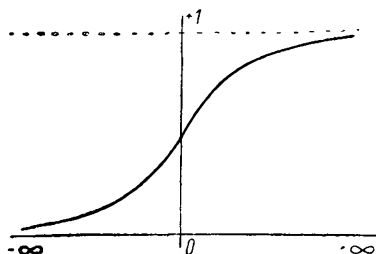


Рис. 4.2. Интегральная кривая распределения.

Вопрос об установлении вида функции распределения принадлежит к одному из наиболее важных вопросов статистического исчисления.

Для прерывной случайной величины интегральная функция распределения может быть определена как сумма

$$F(t) = \sum_{x < t} p(x), \quad (4.47)$$

где $p(x) = p_j$ ($j = \overline{1, k}$) являются соответствующими вероятностями всех возможных значений $x_{(j)}$ ($j = \overline{1, k}$) случайной величины x . Обозначением $x < t$ имеется в виду показать, что суммирование распространяется на все значения x , меньшие чем t .

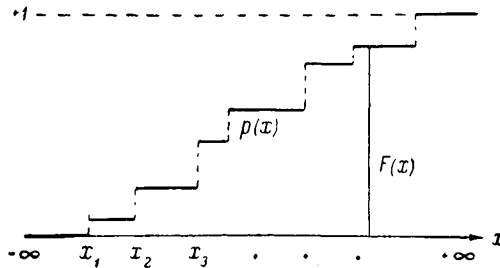


Рис. 4.3. Ступенчатая линия.

В выражении (4.47), так же как и в (4.43), функция $F(t)$ для какой угодно действительной переменной t представляет вероятность неравенства $x < t$: $F(t) = P(x < t)$. Так как

$$P(x = t) = P(x \leq t) - P(x < t),$$

то

$$p(x) = F(x + 0) - F(x). \quad (4.48)$$

Подставляя в (4.47), имеем

$$F(t) = \sum_{x < t} [F(x + 0) - F(x)]. \quad (4.49)$$

Отсюда видно, что функция распределения прерывной случайной величины — прерывная; ее разрывы расположены в точках x_1, x_2, \dots, x_k и являются такими, что имеют место соотношения (4.48); в этих точках, которые соответствуют возможным значениям данной случайной величины, функция возрастает скачками (рис. 4.3).

Таким образом, в случае непрерывной случайной величины интегральная функция распределения дается интегралом, а в случае прерывной случайной величины — суммой. Но так как случайные величины могут быть не только непрерывного или прерывного типа, а и более общего — произвольного — типа, то крайне важно

рассматривать непосредственно интегральную функцию распределения $F(x)$, которую можно построить для случайной величины любого типа. Благодаря этому при изложении теорем, одинаково верных для непрерывных и прерывных случайных величин, отпадает необходимость различать каждый раз эти два типа.

6. Интеграл Стильеса. Чтобы получить возможность при исследовании случайных величин вести изложение в общем виде, требуется — для представления функций распределения и аналогичных им количеств — введение новых символов, одинаково приложимых к случайным величинам любого типа. Такими символами являются интегралы, известные под названием интегралов Стильеса.

Положим, что в промежутке (a, b) определены две функции $\psi(x)$ и $f(x)$, причем $f(x)$ есть функция, непрерывная в этом промежутке, а $\psi(x)$ — какая-нибудь функция, неубывающая в том же промежутке. Разобьем промежуток (a, b) на n частичных промежутков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{h-1} < x_h < \dots < x_n = b \quad (*)$$

и составим сумму

$$S = \sum_{h=1}^n f(\xi_h) [\psi(x_h) - \psi(x_{h-1})], \quad (**)$$

где ξ_h — числа, удовлетворяющие неравенствам

$$x_{h-1} \leq \xi_h \leq x_h \quad (h = \overline{1, n}).$$

Обозначим наибольшую из разностей $x_h - x_{h-1}$ ($h = \overline{1, n}$) через Δ :

$$\Delta = \max(x_h - x_{h-1}).$$

Пусть число n точек x_h неограниченно возрастает, притом так, что $\Delta \rightarrow 0$; тогда, если сумма S стремится к пределу I , то этот предел носит название интеграла Стильеса от функции $f(x)$ с интегрирующей функцией $\psi(x)$:

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{h=1}^n f(\xi_h) [\psi(x_h) - \psi(x_{h-1})] = \int_a^b f(x) d\psi(x). \quad (4.50)$$

Отличие определения интеграла Стильеса (4.50) от обычного определения интеграла состоит в том, что $f(\xi_h)$ умножается не на приращение независимой переменной x , а на приращение второй функции $\psi(x)$.

Если функция $\psi(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\psi'(x) \equiv p(x) \geq 0$, то интеграл Стильеса приводится к обыкновенному интегралу

$$\int_a^b f(x) d\psi(x) = \int_a^b f(x) p(x) dx, \quad (4.51)$$

причем интеграл в левой части равенства существует тогда и только тогда, когда интеграл в правой части — абсолютно сходящийся.

В частности, если в качестве функции $\psi(x)$ взята сама независимая переменная x : $\psi(x) \equiv x$, то

$$\int_a^b f(x) d\psi(x) = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.52)$$

Таким образом, обыкновенный интеграл есть частный случай интеграла Стильеса.

Если $\psi(x)$ есть ступенчатая функция, делающая в точках c_h скачки

$$C_h = \psi(c_h + 0) - \psi(c_h - 0) \quad (h = \overline{1, k}), \quad (* *)$$

а в промежутке между этими точками постоянна и, следовательно, разности $(*)$ исчезают, то интеграл Стильеса приводится к сумме

$$\int_a^b f(x) d\psi(x) = \sum_{h=1}^k C_h f(c_h), \quad (4.53)$$

где c_h — возможные значения данной независимой переменной, причем интеграл в левой части равенства существует тогда и только тогда, когда ряд в правой части — абсолютно сходящийся. Таким образом, сумма (4.53) есть частный случай интеграла Стильеса.

В общем же случае произвольных функций интеграл Стильеса представляет собой образование, не приводящееся ни к обыкновенному интегралу, ни к сумме.

Интеграл Стильеса обладает многими свойствами обыкновенных интегралов; точно так же многие теоремы обыкновенного интегрирования верны для интеграла Стильеса.

При помощи интеграла Стильеса мы можем вероятность того, что случайная величина x произвольного типа будет иметь значение в промежутке (t_1, t_2) , представить формулой

$$P(t_1 \leq x < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dF(x). \quad (4.54)$$

В частности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1. \quad (4.55)$$

Когда даны непрерывная интегральная функция распределения $F(x)$ и соответствующая дифференциальная функция распределения $f(x)$, то

$$P(t_1 \leq x < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx. \quad (4.56)$$

7. Производящая функция вероятностей. В связи с функцией распределения введем понятие производящей функции вероятностей.

Производящей функцией вероятностей называется такая функция $G(t)$, в разложении которой коэффициент при t^x равен искомой вероятности $f(x)$.

Производящая функция вероятностей для случайных величин произвольного типа определяется равенством

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t^x dF(x); \quad (4.57)$$

для непрерывных случайных величин производящая функция вероятностей будет равна

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t^x f(x) dx; \quad (4.58)$$

для прерывных случайных величин будем иметь

$$G(t) = \sum_{x(j)} t^{x(j)} f(x(j)), \quad (4.59)$$

где суммирование распространяется на весь промежуток возможных значений x .

Из определения производящей функции вероятностей следует, что нахождение ее равносильно вычислению вероятностей; этим объясняется и само название производящей функции.

§ 3. Математические ожидания

1. Математическое ожидание случайной величины. Исследование случайных величин было начато Чебышевым и продолжено затем Марковым и Ляпуновым. Ими же были введены и развиты методы исследования этих величин: метод моментов или матема-

тических ожиданий — Чебышев и Марков — и метод характеристических функций — Ляпунов.

Моментом, или математическим ожиданием, $M[\theta(x)]$ некоторой функции $\theta(x)$ случайной величины X называется сумма произведений каждого значения этой функции на соответствующую вероятность.

Для произвольной случайной величины X момент $M[\theta(x)]$ выражается интегралом Стильтьеса:

$$M[\theta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) dF(x). \quad (4.60)$$

Если функция $\theta(x)$ ограничена, то $M[\theta(x)]$ существует и содержится между низшей и высшей границей этой функции. Функция $\theta(x)$ называется ограниченной, если существуют два числа l и L такие, что

$$l \leq \theta(x) \leq L.$$

В этом случае

$$l = l \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) dF(x) \leq L \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = L,$$

т. е.

$$l \leq M[\theta(x)] \leq L.$$

При этом предполагается, что $\theta(x)$ является действительной функцией.

Переходя к рассмотрению частных случаев математического ожидания (4.60), заметим, что, согласно определению интеграла Стильтьеса (4.50),

$$M[\theta(x)] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{h=1}^n \theta(\xi_h) [F(x_h) - F(x_{h-1})], \quad (4.61)$$

где через x_h обозначены точки деления основного промежутка.

Если X — прерывная случайная величина, то функция $F(x)$ является ступенчатой и имеет точки разрыва $x_{(j)}$ со скачками p_j ($j = \overline{1, k}$). Положим, что точки x_h расставлены уже настолько часто, что в каждом промежутке (x_{h-1}, x_h) содержится не более одной точки разрыва $x_{(j)}$. Тогда возможны два случая: 1) если в промежутке (x_{h-1}, x_h) нет точек разрыва, то в этом промежутке функция $F(x)$ имеет постоянное значение, и потому

$$F(x_h) - F(x_{h-1}) = 0,$$

и соответствующие члены суммы в правой части формулы (4.61) исчезают; 2) если же промежуток (x_{h-1}, x_h) содержит точку

разрыва $x_{(j)}$, то, очевидно, $F(x_h) - F(x_{h-1}) = p_j$. Значение же ξ_h при этом отличается от $x_{(j)}$ не больше чем на длину промежутка (x_{h-1}, x_h) . Отсюда следует, что

$$M[\theta(x)] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{h=1}^n \theta(\xi_h) [F(x_h) - F(x_{h-1})] = \sum_{j=1}^k \theta(x_{(j)}) p_j. \quad (4.62)$$

Если X — непрерывная случайная величина, то функция $F(x)$ имеет непрерывную производную $F'(x) = f(x)$, представляющую плотность вероятности. В этом случае, по теореме о конечном приращении Лагранжа,

$$F(x_h) - F(x_{h-1}) = F'(\xi_h)(x_h - x_{h-1}) = f(\xi_h) \Delta x_h.$$

Здесь ξ_h удовлетворяет неравенству $x_{h-1} < \xi_h < x_h$, и то значение ξ_h , которое имеется в формуле (4.61), можно выбрать ему равным. Тогда получим

$$M[\theta(x)] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{h=1}^n \theta(\xi_h) [F(x_h) - F(x_{h-1})] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) f(x) dx. \quad (4.63)$$

Если, наконец, функция $F(x)$ имеет непрерывную производную $f(x)$ везде, кроме точек $x_{(j)}$, где рассматриваемая функция терпит разрыв и делает скачок p_j ($j = 1, k$), то при этом допущении переход к пределу дает

$$\begin{aligned} M[\theta(x)] &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{h=1}^n \theta(\xi_h) [F(x_h) - F(x_{h-1})] = \\ &= \sum_{j=1}^k \theta(x_{(j)}) p_j + \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) f(x) dx. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Если в (4.60) вместо $\theta(x)$ будет взята сама случайная величина X , то получим

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x). \quad (4.65)$$

В случае прерывной случайной величины имеем

$$M(X) = \sum_{j=1}^k x_{(j)} p_j, \quad (4.66)$$

г. е. математическое ожидание случайной величины равно сумме произведений каждого значения этой величины на соответствующую

щую вероятность. В случае непрерывной случайной величины получим

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx. \quad (4.67)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна, то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы $M(x)$ имело определенное значение, состоит в том, чтобы интеграл

$$\int_a^b xf(x) dx$$

стремился к пределу при $a = -\infty$, $b = +\infty$, т. е. чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

имел смысл.

Среди различных видов моментов наибольшее значение при исследованиях случайных величин имеют обыкновенные и факториальные моменты.

Полагая в (4.60)

$$\theta(x) = x^h,$$

где h — целое положительное число, получим обыкновенный начальный момент h -го порядка

$$m_h = \int_{-\infty}^{\infty} x^h dF(x); \quad (4.68)$$

в частности, для непрерывных случайных величин имеем

$$m_h = \int_{-\infty}^{\infty} x^h f(x) dx; \quad (4.69)$$

для прерывных случайных величин

$$m_h = \sum_{j=1}^k x_{(j)}^h p_j. \quad (4.70)$$

Полагая в (4.60)

$$\theta(x) = (x - m_1)^h,$$

получим обыкновенный центральный момент h -го порядка μ_h .

Для непрерывных распределений

$$\mu_h = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^h f(x) dx; \quad (4.71)$$

для прерывных распределений

$$\mu_h = \sum_{j=1}^k (x_{(j)} - m_1)^h p_j. \quad (4.72)$$

Полагая в (4.70) факториал $x^{[h]}$ вместо степени x^h , получим факториальный момент

$$m_{[h]} = \sum_{j=1}^k x_{(j)}^{[h]} p_j. \quad (4.73)$$

В некоторых случаях рассматриваются абсолютные моменты

$$M_h = \mathbf{M} \{ |x|^h \} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^h dF(x). \quad (4.74)$$

В частности, для непрерывных распределений абсолютный момент равен

$$M_h = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^h f(x) dx. \quad (4.75)$$

Очевидно, что

$$m_{2h} = M_{2h}, \quad |m_{2h+1}| \leq M_{2h+1}. \quad (4.76)$$

2. Теоремы о математических ожиданиях. Соотношения между математическими ожиданиями устанавливаются при помощи следующих теорем.

1. *Математическое ожидание случайной величины $a + bX$, где a и b постоянные, равно*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[a + bX] &= \int_{-\infty}^{\infty} (a + bx) dF(x) = \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) + b \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = a + b\mathbf{M}(X). \end{aligned} \quad (4.77)$$

В случае прерывной случайной величины имеем

$$\mathbf{M}[a + bX] = \sum_{j=1}^k (a + bx_{(j)}) p_j = a \sum_{j=1}^k p_j + b \sum_{j=1}^k x_{(j)} p_j = a + b\mathbf{M}(X). \quad (4.78)$$

В частности,

$$\mathbf{M}(a) = a, \quad (4.79)$$

$$\mathbf{M}(bX) = b\mathbf{M}(X). \quad (4.80)$$

Таким образом, 1) математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной; 2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$\mathbf{M}\left(\sum_{h=1}^n X_h\right) = \sum_{h=1}^n \mathbf{M}(X_h). \quad (4.81)$$

В случае двух случайных величин X_1 и X_2 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(X_1 + X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2) dF(x_1, x_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 d \int_{-\infty}^{\infty} d_{x_2} F(x_1, x_2) + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 d \int_{-\infty}^{\infty} d_{x_1} F(x_1, x_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 d_{x_1} F(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 d_{x_2} F(x_2) = \mathbf{M}(X_1) + \mathbf{M}(X_2). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Здесь $F(t_1, t_2) = \sum_{\substack{x_{1(j_1)} < t_1 \\ x_{2(j_2)} < t_2}} p_{j_1 | j_2}$ — функция распределения двух случайных величин X_1 и X_2 .

Если случайные величины X_1 и X_2 прерывные, то

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(X_1 + X_2) &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} (x_{1(j_1)} - x_{2(j_2)}) p_{j_1 | j_2} = \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} x_{1(j_1)} p_{j_1 | j_2} + \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} x_{2(j_2)} p_{j_1 | j_2} = \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} x_{1(j_1)} \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{j_1 | j_2} + \sum_{j_2=1}^{k_2} x_{2(j_2)} \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1 | j_2} = \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} x_{1(j_1)} p_{j_1 \cdot} + \sum_{j_2=1}^{k_2} x_{2(j_2)} p_{\cdot j_2} = \mathbf{M}(X_1) + \mathbf{M}(X_2). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Переходя к случаю какого угодно числа случайных величин, применим способ перехода от $n-1$ к n . Пусть

$$X' = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} \quad (*)$$

и

$$\mathbf{M}(X') = \mathbf{M}(X_1) + \mathbf{M}(X_2) + \dots + \mathbf{M}(X_{n-1}). \quad (**)$$

Тогда $X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} + X_n = X' + X_n$. Но в силу (4.83)

$$\mathbf{M}(X' + X_n) = \mathbf{M}(X') + \mathbf{M}(X_n).$$

Подставляя в это равенство выражения (*) и (**), получим (4.81)

Рассматриваемая теорема относится к каким угодно случайным величинам, как независимым, так и связанным.

Применяя теорему сложения математических ожиданий и замечая, что постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, находим

$$\mathbf{M}(X_1 - X_2) = \mathbf{M}[X_1 + (-1)X_2] = \mathbf{M}(X_1) + (-1)\mathbf{M}(X_2) = \mathbf{M}(X_1) - \mathbf{M}(X_2).$$

В силу этого равенства, замечая, что $\mathbf{M}(X)$ есть постоянная величина, получим

$$\mathbf{M}[X - \mathbf{M}(X)] = \mathbf{M}(X) - \mathbf{M}[\mathbf{M}(X)] = \mathbf{M}(X) - \mathbf{M}(X) = 0. \quad (4.84)$$

3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left(\prod_{h=1}^n X_h\right) &= \prod_{h=1}^n \mathbf{M}(X_h) \\ &= \left(\prod_{h=1}^n a_h = a_1 a_2 \dots a_n\right). \end{aligned} \quad (4.85)$$

В случае двух независимых случайных величин X_1 и X_2 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(X_1 X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dF(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dd[F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 dF_{X_1}(x_1) \right] dF_{X_2}(x_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 dF_{X_1}(x_1) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2 dF_{X_2}(x_2) = \mathbf{M}(X_1) \cdot \mathbf{M}(X_2). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Если независимые случайные величины X_1 и X_2 являются прерывными, то

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(X_1 X_2) &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} x_{1(j_1)} x_{2(j_2)} p_{j_1 | j_2} = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} x_{1(j_1)} x_{2(j_2)} p_{j_1 | \cdot} \cdot p_{\cdot | j_2} = \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} x_{1(j_1)} p_{j_1 | \cdot} \cdot \sum_{j_2=1}^{k_2} x_{2(j_2)} p_{\cdot | j_2} = \mathbf{M}(X_1) \cdot \mathbf{M}(X_2). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Переходя к случаю какого угодно числа независимых случайных величин, положим, что

$$X' = X_1 X_2 \dots X_{n-1} \quad (***)$$

и

$$\mathbf{M}(X') = \mathbf{M}(X_1) \mathbf{M}(X_2) \dots \mathbf{M}(X_{n-1}). \quad (****)$$

Тогда $X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n = X' X_n$. Но в силу (4.86)

$$\mathbf{M}(X' X_n) = \mathbf{M}(X') \mathbf{M}(X_n).$$

Подставляя в это равенство выражения (***) и (****), получим (4.85).

В качестве примера применения формулы (4.87) рассмотрим две независимые случайные величины x_1 и x_2 , математические ожидания которых соответственно равны a_1 и a_2 . Так как при этом случайные величины $x_1 - a_1$ и $x_2 - a_2$ будут также независимыми, то мы получим

$$M[(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)] = M(x_1 - a_1) M(x_2 - a_2).$$

Но $M(x_1 - a_1) = M(x_1) - a_1 = a_1 - a_1 = 0$. Следовательно, в случае двух независимых случайных величин

$$M[(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)] = 0. \quad (4.88)$$

3. Дисперсия и коэффициент корреляции. Математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной X и ее математическим ожиданием $M(X)$ называется *дисперсией* случайной величины и обозначается через σ^2 :

$$\sigma^2 = M\{[X - M(X)]^2\}. \quad (4.89)$$

Так как

$$M\{[X - M(X)]^2\} = M(X^2) - M^2(X),$$

то, введя обозначения $M(X) = m_1$, $M(X^2) = m_2$, получим

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2. \quad (4.90)$$

Квадратный корень из дисперсии, взятый с положительным знаком, называется *основным отклонением*

$$\sigma = + \sqrt{m_2 - m_1^2}. \quad (4.91)$$

Наряду с дисперсией будем рассматривать математическое ожидание произведения разностей между каждой из двух случайных величин X_s и X_t и их математическими ожиданиями

$$M\{[X_s - M(X_s)][X_t - M(X_t)]\}.$$

Отношение этого математического ожидания к произведению основных отклонений рассматриваемых случайных величин называется *коэффициентом корреляции* между этими величинами и обозначается через r_{st} :

$$r_{st} = \frac{M\{[X_s - M(X_s)][X_t - M(X_t)]\}}{\sigma_s \sigma_t}. \quad (4.92)$$

Числитель этого выражения можно представить в следующем виде, пользуясь приведенными выше (п. 2) тремя теоремами:

$$M\{[X_s - M(X_s)][X_t - M(X_t)]\} = M(X_s X_t) - M(X_s) M(X_t).$$

Таким образом,

$$r_{st} = \frac{M(X_s X_t) - M(X_s) M(X_t)}{\sigma_s \sigma_t}. \quad (4.93)$$

Когда величины X_s и X_t независимы между собой, то, согласно (4.86), $M(X_s X_t) = M(X_s) M(X_t)$. Следовательно, в случае независимости величин X_s и X_t коэффициент корреляции между ними равен нулю:

$$r_{st} = 0. \quad (4.93')$$

Найдем теперь дисперсию B суммы n случайных величин x_s , где $s = \overline{1, n}$.

Введем обозначения

$$M(x_s) = a_s, \quad M(x_s^2) = b_s.$$

На основании (4.81) имеем

$$M\left(\sum_{s=1}^n x_s\right) = \sum_{s=1}^n a_s.$$

Следовательно, дисперсия суммы n случайных величин x_s ($s = \overline{1, n}$) будет равна

$$B = M\left\{\left(\sum_{s=1}^n x_s - \sum_{s=1}^n a_s\right)^2\right\}. \quad (4.94)$$

Но

$$\left(\sum_{s=1}^n x_s - \sum_{s=1}^n a_s\right)^2 = \sum_{s=1}^n (x_s - a_s)^2 + \sum_{s \neq t} (x_s - a_s)(x_t - a_t)$$

(последняя сумма распространяется на все индексы s и t , для которых $s \neq t$).

Так как математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, то мы должны найти математические ожидания членов $(x_s - a_s)^2$ и $(x_s - a_s)(x_t - a_t)$. Математическое ожидание первого из этих членов представляет дисперсию величины x_s и может быть найдено из (4.90):

$$M\{(x_s - a_s)^2\} = b_s - a_s^2 = \sigma_s^2. \quad (4.95)$$

Математическое ожидание второго члена может быть выражено при помощи коэффициента корреляции (4.92):

$$M\{(x_s - a_s)(x_t - a_t)\} = r_{st} \sigma_s \sigma_t. \quad (4.96)$$

Таким образом, искомая дисперсия будет равна

$$B = \sum_{s=1}^n \sigma_s^2 + \sum_{s \neq t} r_{st} \sigma_s \sigma_t. \quad (4.97)$$

В случае, когда величины x_s ($s = \overline{1, n}$) будут попарно независимыми, все коэффициенты корреляции будут, согласно (4.93'), равны нулю и мы получим

$$B = \sum_{s=1}^n \sigma_s^2, \quad (4.98)$$

т. е. дисперсия суммы n попарно независимых величин равна сумме дисперсий этих величин.

Наконец, если каждая из n попарно независимых величин x_s ($s = \overline{1, n}$) будет умножена на постоянный множитель c_s , то будем иметь для дисперсии суммы новых величин

$$B = \sum_{s=1}^n c_s^2 \sigma_s^2. \quad (4.99)$$

4. Математическое ожидание и дисперсия среднего значения. Теоремы сложения математических ожиданий (4.81) и сложения дисперсий (4.98) дают возможность сделать заключения о математическом ожидании среднего значения \bar{x} , полученного в результате n независимых испытаний, связанных со случайной величиной x , и о дисперсии $\sigma_{\bar{x}}^2$ этого среднего значения. Так как результат каждого из n испытаний $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, очевидно, можно рассматривать как случайную величину x_h , одинаково распределенную с x , то мы имеем на основании (4.81)

$$M(\bar{x}) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h\right) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n M(x_h) = \frac{nM(x)}{n} = M(x) \quad (4.100)$$

и на основании (4.98)

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_{h=1}^n \left(\frac{\sigma_{x_h}}{n}\right)^2 = \frac{n\sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}. \quad (4.101)$$

Для получения (4.101) достаточно в формуле (4.99) положить $c_h = 1/n$.

Соотношения (4.100) и (4.101) имеют совершенно общее значение: распределение случайной величины может быть каким угодно; необходимо только, чтобы существовала дисперсия σ_x^2 случайной величины x , а испытания были бы по крайней мере попарно независимыми (независимость испытаний эквивалентна независимости соответствующих случайных величин).

В качестве примера рассмотренных теорем найдем математическое ожидание и дисперсию числа m появлений события E при n независимых испытаниях, при каждом из которых вероятность появления события E равна p , а вероятность неоявления равна q .

Будем с событием E соединять случайную величину x_h , которая принимает значение 1 и 0 в соответствии с тем, появилось или не появилось событие E при h -м испытании. Тогда число появлений события E будет представлять сумму независимых случайных величин

$$m = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Математическое ожидание каждого слагаемого этой суммы равно

$$M(x_h) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p. \quad (4.102)$$

Поэтому согласно (4.81)

$$M(m) = np.$$

Для определения дисперсии σ_h^2 величины x_h заметим, что наряду с (4.102) имеем $M(x_h^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p^*$). Следовательно, согласно (4.90) получим

$$\sigma_h^2 = p - p^2 = pq,$$

и на основании (4.98) находим

$$M[(m - np)^2] = npq. \quad (4.103)$$

5. Производящие функции моментов. Моменты распределения находятся при помощи производящей функции моментов.

Производящей функцией моментов называется такая функция, в разложении которой коэффициент при той или иной степени переменной определяет момент соответствующего порядка.

Полагая в производящей функции вероятностей (4.59) $t = 1 + u$, получим производящую функцию факториальных моментов

$$G(u) = \sum_x (1+u)^x f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} m_{[h]} \frac{u^h}{h!}. \quad (4.104)$$

В разложении функции $G(u)$ коэффициенты при $u^h/h!$ равны $m_{[h]}$.

Если в производящей функции вероятностей положим $t = e^v$, то получим производящую функцию обыкновенных моментов

$$G(v) = \sum_x e^{vx} f(x) = \int e^{vx} f(x) dx, \quad (4.105)$$

причем предполагается, что $f(x)$ есть такая функция распределения, для которой сумма или интеграл сходится на всем промежутке из-

*) Вообще $M(x_h^k) = 1^k \cdot p + 0^k \cdot q = p$.

менения x ; тогда e^{vx} может быть разложено в ряд и допустимо последовательное интегрирование. Имеем

$$G(v) = \int e^{vx} f(x) dx = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{v^h}{h!} \int x^h f(x) dx = \sum_{h=0}^{\infty} m_h \frac{v^h}{h!}, \quad (4.106)$$

т. е. коэффициенты при $v^h/h!$ в разложении функции $G(v)$ равны m_h .

Понятие производящей функции обыкновенных моментов может быть обобщено, если в показателе степени вместо переменной x возьмем некоторую произвольную функцию $\theta(x)$ от этой переменной:

$$G_{\theta}(v) = \int e^{v\theta(x)} f(x) dx. \quad (4.107)$$

Ввиду произвольности функции $\theta(x)$ мы можем выбрать ее, положив

$$\theta(x) = \Theta(x) + c, \quad \text{или} \quad \theta(x) = c\Theta(x),$$

где c — некоторое постоянное.

В первом случае будем иметь

$$G_{\Theta+c}(v) = \int e^{v[\Theta(x)+c]} f(x) dx = e^{cv} \int e^{v\Theta(x)} f(x) dx = e^{cv} G_{\Theta}(v); \quad (4.108)$$

во втором случае

$$G_{c\Theta} = \int e^{vc\Theta(x)} f(x) dx = G_{\Theta}(cv). \quad (4.109)$$

Формулы (4.108) и (4.109) выражают основные свойства производящей функции моментов: при изменении начала отсчета на величину c надо производящую функцию моментов умножить на e^{cv} ; при изменении же масштаба в c раз величина v в производящей функции моментов заменяется через cv .

Применяя основные свойства производящей функции моментов, мы можем, зная производящую функцию начальных моментов, найти производящую функцию центральных моментов. Для этого надо в формуле (4.107) положить $\theta(x) = x - m_1$, где m_1 — первый начальный момент распределения. Имеем

$$\bar{G}(v) = \int e^{v(x-m_1)} f(x) dx. \quad (4.110)$$

На основании (4.108) находим

$$\bar{G}(v) = e^{-m_1 v} G(v). \quad (4.111)$$

Таким образом, для получения производящей функции центральных моментов надо производящую функцию начальных моментов умножить на $e^{-m_1 v}$.

Подобным же образом на основании (4.109) мы заключаем, что если значения переменной x будут умножены на c , то прежние моменты m_h увеличатся в c^h раз.

Производящая функция моментов распределения двух случайных величин определяется как математическое ожидание функции $e^{t_1 x_1 + t_2 x_2}$, где t_1 и t_2 не зависят от x_1 и x_2 . Таким образом, в случае непрерывного распределения производящая функция моментов относительно начала равна

$$G(t_1, t_2) = \int \int e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Когда этот интеграл имеет смысл, показательная функция может быть разложена по степеням t_1 и t_2 и коэффициент при $\frac{t_1^{h_1} t_2^{h_2}}{h_1! h_2!}$ будет начальным смешанным моментом $m_{h_1 | h_2}$.

Когда случайные величины x_1 и x_2 являются независимыми, имеем

$$G(t_1, t_2) = M(e^{t_1 x_1 + t_2 x_2}) = M(e^{t_1 x_1}) M(e^{t_2 x_2}).$$

И обратно, когда производящая функция моментов будет этого вида, то случайные величины являются независимыми.

§ 4. Характеристические функции

1. Характеристические функции. Если в производящей функции вероятностей (4.57) вместо t возьмем e^{it} , то получим характеристическую функцию распределения

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad (4.112)$$

т. е. характеристическая функция представляет математическое ожидание случайной величины e^{itx} :

$$\varphi(t) = M\{e^{itx}\}. \quad (4.113)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (4.112), существует для всякого распределения и при всяком значении действительной переменной t , так как

$$e^{itx} = \cos tx + i \sin tx,$$

а $\cos tx$ и $\sin tx$ непрерывны и ограничены на всей прямой $-\infty < x < +\infty$.

Таким образом, каждая функция распределения имеет характеристическую функцию, определенную для всех действительных значений t .

Характеристическая функция является непрерывной и по модулю не больше единицы на всей прямой $-\infty < t < \infty$. В самом деле

$$|\varphi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| dF(x) \leq \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = 1. \quad (4.114)$$

Если x — прерывная случайная величина, могущая принимать k значений $x_{(j)}$ с вероятностями p_j ($j = \overline{1, k}$), то интеграл (4.112) заменяется суммой

$$\varphi(t) = \sum_j p_j e^{itx_{(j)}}. \quad (4.115)$$

Если же x — непрерывная случайная величина, имеющая дифференциальную функцию распределения $f(x)$, то формула (4.112) примет вид

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx. \quad (4.116)$$

Так как

$$f(x) \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

то интеграл, определяющий характеристическую функцию, является всегда сходящимся и

$$|\varphi(t)| \leq 1. \quad (4.117)$$

2. Свойства характеристических функций. Характеристические функции обладают следующими свойствами:

1. Если характеристическая функция случайной величины x равна

$$\varphi_x(t) = M\{e^{itx}\},$$

то характеристическая функция величины

$$u = ax + b,$$

где a и b — какие угодно действительные числа, равна

$$\varphi_u(t) = \varphi_x(at) e^{ibt}. \quad (4.118)$$

В самом деле,

$$\varphi_u(t) = M\{e^{itu}\} = M\{e^{it(ax+b)}\} = M\{e^{ib t} e^{iatx}\} = e^{ibt} M\{e^{iatx}\} = \varphi_x(at) e^{ibt}.$$

В частности,

$$\varphi_{ax}(t) = M\{e^{iatx}\} = M\{e^{i(at)x}\} = \varphi_x(at). \quad (4.119)$$

2. Если характеристические функции независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n равны соответственно

$\varphi_{x_1}(t), \varphi_{x_2}(t), \dots, \varphi_{x_n}(t)$, то характеристическая функция величины $u = \sum_{h=1}^n x_h$ равна

$$\varphi_u(t) = \prod_{h=1}^n \varphi_{x_h}(t), \quad (4.120)$$

т. е. характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций.

В самом деле, так как случайные величины x_1, x_2, \dots, x_n являются независимыми, то и величины $e^{itx_1}, e^{itx_2}, \dots, e^{itx_n}$ будут также независимыми случайными величинами. Следовательно, на основании (4.85) получим

$$\begin{aligned} \varphi_u(t) &= M \{e^{itu}\} = M \{e^{it(x_1+x_2+\dots+x_n)}\} = \\ &= M \left\{ \prod_{h=1}^n e^{itx_h} \right\} = \prod_{h=1}^n M \{e^{itx_h}\} = \prod_{h=1}^n \varphi_{x_h}(t). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\ln \varphi_u(t) = \sum_{h=1}^n \ln \varphi_{x_h}(t), \quad (4.121)$$

т. е. логарифм характеристической функции суммы независимых случайных величин равен сумме логарифмов характеристических функций этих величин.

3. Если a_1, a_2, \dots, a_n — некоторые постоянные, а x_1, x_2, \dots, x_n — независимые случайные величины и $u = \sum_{h=1}^n a_h x_h$, то

$$\varphi_u(t) = \prod_{h=1}^n \varphi_{a_h x_h}(t) = \prod_{h=1}^n \varphi_{x_h}(a_h t). \quad (4.122)$$

В частности, если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$, то

$$\varphi_{\bar{x}}(t) = \prod_{h=1}^n \varphi_{x_h}\left(\frac{t}{n}\right); \quad (4.123)$$

если же, кроме того, распределение всех x_1, x_2, \dots, x_n будет одним и тем же, то

$$\varphi_{\bar{x}}(t) = \left[\varphi_{x_h}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n. \quad (4.124)$$

3. Определение моментов при помощи характеристических функций. При помощи характеристических функций можно определить моменты случайных величин.

Положим, что x есть такая случайная величина, что существует ее момент порядка h :

$$m_h = M\{x^h\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^h dF(x).$$

В соответствии с интегралом Стильеса этот момент существует только в том случае, когда существует и абсолютный момент

$$M_h = M\{|x|^h\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^h dF(x).$$

В таком случае, очевидно, существуют и моменты всех порядков $g \leq h$.

Отсюда следует, что характеристическую функцию можно дифференцировать $g \leq h$ раз. Имеем

$$\varphi^{(g)}(t) = i^g \int_{-\infty}^{\infty} x^g e^{itx} dF(x). \quad (4.125)$$

Полагая здесь $t = 0$, получим

$$\varphi^{(g)}(0) = i^g m_g.$$

Из этого равенства находим формулу для определения моментов при помощи характеристической функции:

$$m_g = \frac{1}{i^g} \varphi^{(g)}(0). \quad (4.126)$$

Характеристическую функцию можно рассматривать также как производящую функцию моментов.

В самом деле, если момент h -го порядка существует, то характеристическая функция $\varphi(t)$ может быть разложена по степеням t по крайней мере до члена, содержащего $(it)^h$, и мы будем иметь

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \sum_{g=1}^h m_g \frac{(it)^g}{g!} + o(t^h). \quad (4.127)$$

4. Полуинварианты. Обозначим логарифм характеристической функции $\varphi(t)$ через $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \ln \varphi(t). \quad (4.128)$$

Производные логарифма характеристической функции $\psi^{(g)}(t)$ при $t = 0$, деленные на i^g , называются полуинвариантами λ_g соответствующей случайной величины:

$$\lambda_g = \frac{1}{i^g} \psi^{(g)}(0). \quad (4.129)$$

В частности, замечая, что $\varphi(0) = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{i} \psi'(0) = \frac{1}{i} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \Big|_{t=0} = \frac{1}{i} \varphi'(0) = m_1, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{i^2} \psi''(0) = \frac{1}{i^2} \frac{\varphi(t) \varphi''(t) - [\varphi'(t)]^2}{[\varphi(t)]^2} \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{i^2} \{\varphi''(0) - [\varphi'(0)]^2\} = m_2 - m_1^2 = \mu_2. \end{aligned}$$

Подобным же образом

$$\lambda_3 = \mu_3, \quad \lambda_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2,$$

и т. д. Таким образом, каждый полуинвариант λ_g есть рациональная функция от моментов порядка $\leq g$.

Функцию (4.128) можно рассматривать как производящую функцию полуинвариантов. В самом деле, если полуинвариант h -го порядка существует, то функцию $\psi(t)$ можно разложить по степеням t по крайней мере до члена, содержащего $(it)^h$, и мы будем иметь

$$\psi(t) = \ln \varphi(t) = \sum_{g=1}^h \lambda_g \frac{(it)^g}{g!} + o(t^h). \quad (4.130)$$

При сложении независимых случайных величин их полуинварианты тоже складываются.

Пусть $u = x_1 + x_2$, где x_1 и x_2 — независимые случайные величины. Так как

$$\varphi_u(t) = \varphi_{x_1}(t) \varphi_{x_2}(t),$$

то

$$\psi_u(t) = \psi_{x_1}(t) + \psi_{x_2}(t). \quad (4.131)$$

Дифференцируя, находим

$$\psi'_u(t) = \psi'_{x_1}(t) + \psi'_{x_2}(t).$$

Полагая $t = 0$ и деля левую и правую части на i , получим

$$\lambda_1(u) = \lambda_1(x_1) + \lambda_1(x_2).$$

Подобным же образом

$$\lambda_2(u) = \lambda_2(x_1) + \lambda_2(x_2)$$

и т. д. Вообще дифференцируя (4.131) g раз в точке 0 и деля на i^g , находим

$$\lambda_{g}(u) = \lambda_{g}(x_1) + \lambda_{g}(x_2). \quad (4.132)$$

5. Формула обращения Фурье. Для каждой функции распределения можно найти ее характеристическую функцию (4.112).

Обратно, зная характеристическую функцию какого-либо распределения, можно определить само распределение. Для этого служит *формула обращения Фурье*.

В случае прерывного распределения, когда случайная величина x может принимать только целые неотрицательные значения, формула обращения Фурье имеет вид

$$p_x(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ith} \varphi_x(t) dt, \quad (4.133)$$

где

$$p_x(h) = P(x=h), \quad \varphi_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} p(x)$$

[ср. (4.115)].

Приведем доказательство формулы (4.133). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ith} \varphi_x(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ith} \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} p(x) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{x=0}^{\infty} e^{it(x-h)} p(x) dt. \end{aligned}$$

Этот ряд сходится равномерно; поэтому можно переставить знаки суммирования и интегрирования:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{x=0}^{\infty} e^{it(x-h)} p(x) dt &= \frac{1}{2\pi} \sum_{x=0}^{\infty} p(x) \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it(x-h)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{x=0}^{h-1} p(x) \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it(x-h)} dt + p_x(h) \int_{-\pi}^{+\pi} dt + \sum_{x=h+1}^{\infty} p(x) \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it(x-h)} dt \right). \end{aligned}$$

Здесь первый и третий интегралы равны нулю. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ith} \varphi_x(t) dt = p_x(h).$$

В случае непрерывного распределения формула обращения Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt. \quad (4.134)$$

Для характеристических функций имеет место также следующая теорема Леви — Крамера:

Если последовательность характеристических функций $\varphi_n(x)$ распределений $F_n(x)$ сходится к характеристической функции $\varphi(x)$ некоторого распределения $F(x)$, то и последовательность распределений $F_n(x)$ сходится к $F(x)$:

если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x),$$

то и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x). \quad (4.135)$$

§ 5. Закон больших чисел

1. Лемма Маркова. Перейдем теперь к рассмотрению закона больших чисел. Сначала установим основную лемму статистического исчисления, известную под названием леммы Маркова.

Лемма Маркова. Если случайная величина X может принимать только положительные значения, то вероятность P того, что эта величина не превзойдет своего математического ожидания $M(x)$, умноженного на некоторое положительное число t^2 , больше разности между единицей и числом, обратным данному положительному числу.

Обозначая через $P\{\}$ вероятность соотношения, заключенного в фигурные скобки, мы можем лемму Маркова записать в следующем виде:

$$P\{X \leq M(X) t^2\} > 1 - \frac{1}{t^2}. \quad (4.136)$$

Положим, что величина X может принимать только положительные значения

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(j)}, x_{(j+1)}, \dots, x_{(k)} \quad (4.137)$$

с определенными вероятностями

$$p_1, p_2, \dots, p_j, p_{j+1}, \dots, p_k, \quad (4.138)$$

причем

$$p_1 + p_2 + \dots + p_j + p_{j+1} + \dots + p_k = 1 \quad (4.139)$$

[ср. (4.9)].

Тогда математическое ожидание величины X будет равно

$$M(X) = p_1 x_{(1)} + p_2 x_{(2)} + \dots + p_j x_{(j)} + p_{j+1} x_{(j+1)} + \dots + p_k x_{(k)}. \quad (4.140)$$

Взяв какое угодно положительное число t^2 , положим, что значения (4.137) расположены так, что первые j этих значений не больше $M(X)t^2$, остальные же значения больше $M(X)t^2$.

В таком случае, на основании теоремы сложения вероятностей (4.8), будем иметь

$$P\{X \leq M(X)t^2\} = p_1 + p_2 + \dots + p_j; \quad (4.141)$$

подобным же образом

$$Q\{X > M(X)t^2\} = p_{j+1} + \dots + p_k. \quad (4.142)$$

И, следовательно, на основании (4.10)

$$P + Q = 1. \quad (4.143)$$

Так как вероятности (4.138) представляют, по определению (4.3), числа положительные, равно как и между значениями (4.137), по условию, нет отрицательных чисел, то, опуская в правой части равенства (4.140) члены с подписными значками 1, 2, ..., j , мы получим неравенство

$$M(X) \geq p_{j+1} x_{(j+1)} + \dots + p_k x_{(k)}. \quad (4.144)$$

Так как, далее, все значения

$$x_{(j+1)}, \dots, x_{(k)} \quad (4.145)$$

больше $M(X)t^2$, то, подставляя в (4.144) эту последнюю величину вместо каждого из значений (4.145), получим более строгое неравенство

$$M(X) > M(X)t^2[p_{j+1} + \dots + p_k],$$

т. е.

$$M(X) > M(X)t^2Q.$$

Разделив левую и правую части этого неравенства на положительную величину $M(X)t^2$, находим $\frac{1}{t^2} > Q$. И так как, на основании (4.143), $Q = 1 - P$, то $1/t^2 > 1 - P$, т. е.

$$P\{X \leq M(X)t^2\} > 1 - \frac{1}{t^2},$$

что и выражает лемму Маркова.

Заметим, что хотя лемма Маркова имеет место при любом положительном числе t^2 , однако в силу того, что величина вероятности не может быть меньше нуля, мы, рассматривая (4.136),

закключаем, что имеет смысл брать лишь те t^2 , которые не меньше 1. При $t^2 = 1$ имеем

$$P\{X \leq M(X)\} > 0.$$

Чем больше t^2 , тем больше будет вероятность того, что $X \leq M(X) t^2$.

Как следствие из леммы Маркова находим, что

$$Q\{X > M(X) t^2\} \leq \frac{1}{t^2}, \quad (4.146)$$

т. е. вероятность неравенства $X > M(X) t^2$ не больше $1/t^2$.

Написав неравенство (4.136) в виде

$$P\{X \leq M(X) t^2\} > 1 - \frac{M(X)}{M(X) t^2}$$

и положив $M(X) t^2 = \tau$, имеем

$$P\{X \leq \tau\} > 1 - \frac{M(X)}{\tau}. \quad (4.147)$$

Поэтому лемма Маркова может быть выражена также следующим образом:

Если случайная величина X может принимать только положительные значения, то вероятность получить этой величине значения, не превосходящие некоторого положительного числа τ , больше разности между единицей и отношением математического ожидания случайной величины X к данному числу τ .

Приведем геометрическую иллюстрацию леммы Маркова.

Левая часть неравенства (4.147) выражает вероятность, что величина X не превосходит некоторого положительного числа τ . По определению, вероятность изменяется от нуля для событий невозможных до единицы для событий достоверных [см. (4.3)]. Так как, по условию, величина X может принимать только положительные значения, то при $\tau = 0$ очевидно, что $P\{X \leq \tau\} = 0$, как вероятность невозможного события. При возрастании τ вероятность P будет возрастать, стремясь к 1 при стремлении τ к бесконечности. На рис. 4.4 вероятность P будет изображена линией, которая при $\tau \leq 0$ будет совпадать с осью абсцисс, а при $\tau > 0$ будет подниматься над этой осью, стремясь слиться с прямой, параллельной этой оси и проходящей на расстоянии, равном единице.

Правая часть неравенства (4.147) представляет при $\tau > 0$ ветвь гиперболы, которая при $\tau < M(X)$ расположена под осью абсцисс, при $\tau = M(X)$ пересекает эту ось, при $\tau > M(X)$ проходит над осью абсцисс и при неограниченном увеличении τ стремится слиться с прямой, указанной выше.

На основании неравенства (4.147) кривая вероятностей P расположена над ветвью гиперболы; следовательно, эта кривая не может проникать в области, заштрихованные на рисунке.

Лемма Маркова является основным предложением статистического исчисления. Замечательным свойством этой леммы является ее независимость от природы распределения положительной случайной величины. На лемме Маркова основано доказательство многих теорем статистического исчисления и, в частности, важнейшей из этих теорем — закона больших чисел.

2. Неравенство Чебышева. Лемма Маркова дает возможность, найти вероятность, что положительная случайная величина примет значение, не превышающее некоторого данного числа; при этом требуется только знание математического ожидания этой величины.

Определенное заключение о случайной величине дает также неравенство Чебышева, которое приложимо к какому угодно (не обязательно положительным) случайным величинам, причем требуется только знание математического ожидания и дисперсии случайной величины.

Неравенство Чебышева. Если случайная величина X может принимать и положительные, и отрицательные значения, то, каким бы ни было положительное число τ ,

$$P\{-\tau \leq X \leq \tau\} > 1 - \frac{M(X^2)}{\tau^2}. \quad (4.148)$$

При установлении этого неравенства применяется лемма Маркова.

Действительно, неравенство $-\tau \leq X \leq \tau$ равносильно неравенству $|X| \leq \tau$, которое равносильно неравенству $X^2 \leq \tau^2$.

Ввиду равносильности этих неравенств, вероятности их равны между собой.

Поэтому, применяя лемму Маркова (4.147) к положительной величине X^2 , получим (4.148).

Полагая в (4.148) $X = x - M(x)$, где x — случайная величина, а $M(x)$ — ее математическое ожидание, и замечая, что $M\{[x - M(x)]^2\} = \sigma^2$, найдем

$$P\{-\tau \leq x - M(x) \leq \tau\} > 1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}. \quad (4.149)$$

Неравенство (4.149) можно доказать иначе.

Обозначая через $F(x)$ функцию распределения случайной величины x , имеем

$$P\{|x - M(x)| > \tau\} = \int_{|x - M(x)| > \tau} dF(x).$$

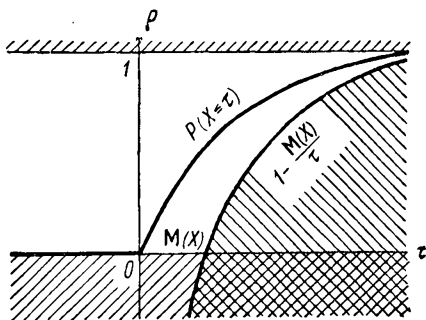


Рис. 4.4. Геометрическая иллюстрация леммы Маркова.

Так как в области интегрирования $|x - M(x)|/\tau > 1$, то

$$\int_{|x - M(x)| > \tau} dF(x) \leq \frac{1}{\tau^2} \int_{|x - M(x)| > \tau} [x - M(x)]^2 dF(x).$$

Это неравенство только усилится, если интегрирование в правой части будет распространено на все значения x :

$$\int_{|x - M(x)| > \tau} dF(x) \leq \frac{1}{\tau^2} \int [x - M(x)]^2 dF(x) = \frac{\sigma^2}{\tau^2}.$$

Таким образом,

$$P\{|x - M(x)| > \tau\} \leq \frac{\sigma^2}{\tau^2},$$

и, следовательно,

$$P\{|x - M(x)| \leq \tau\} > 1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2},$$

что равносильно (4.149).

Обобщением неравенства Чебышева является неравенство Колмогорова.

Неравенство (4.149) дает нижнюю границу $1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}$ вероятности того, что отклонение значений случайной величины от ее математического ожидания не превзойдет некоторого заданного числа $\pm\tau$. Если дисперсия σ^2 уменьшается, то нижняя граница вероятностей этих отклонений возрастает. Это показывает, что значения случайной величины тем более сосредоточиваются около ее математического ожидания, чем меньше дисперсия. Таким образом, выясняется смысл дисперсии σ^2 как меры рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания.

Полагая в неравенстве (4.149) $\tau = t\sigma$, имеем

$$P\{-t\sigma \leq x - M(x) \leq t\sigma\} > 1 - \frac{1}{t^2}, \quad (4.150)$$

и, следовательно,

$$Q\{|x - M(x)| > t\sigma\} \leq \frac{1}{t^2}. \quad (4.151)$$

Эти неравенства справедливы для любого распределения случайной величины.

При постоянном основном отклонении σ неравенство (4.150) показывает, что если t будет увеличиваться, то вероятность того, что значения случайной величины будут находиться в увеличивающемся промежутке $(-t\sigma, +t\sigma)$, будет увеличиваться. В частности, если $t = 2$, то

$$P\{-2\sigma \leq x - M(x) \leq 2\sigma\} > 0,75;$$

если $t = 3$, то

$$P\{-3\sigma \leq x - M(x) \leq 3\sigma\} > 0,889.$$

Пусть теперь величина t будет постоянной. Тогда при уменьшающемся основном отклонении σ , т. е. уменьшающемся промежутке $(-t\sigma, +t\sigma)$, нижняя граница вероятности значений $x - M(x)$, заключающихся в этом промежутке, будет оставаться постоянной. Отсюда опять-таки следует, что чем меньше основное отклонение, тем теснее отдельные значения случайной величины сосредоточиваются около ее математического ожидания.

Таким образом, при любом распределении основное отклонение служит мерой рассеяния значений случайной величины.

3. Теорема Маркова. Перейдем теперь к доказательству теоремы Маркова, представляющей наиболее общее выражение закона больших чисел.

Так как случайные величины x_1, x_2, \dots, x_n могут принимать разные значения с разными вероятностями, то среднее арифметическое этих величин может оказаться в одних случаях меньше, в других случаях больше среднего арифметического их математических ожиданий. В силу этого возникает задача — определить границы, в которых заключается среднее арифметическое величин x_1, x_2, \dots, x_n .

Рассматривая разность между средним арифметическим этих величин и средним арифметическим их математических ожиданий, мы можем относительно границ, в которых заключена эта разность, сформулировать следующую весьма общую теорему, доказанную Марковым.

Теорема Маркова. Если число n случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n можно увеличивать беспредельно и дисперсия B суммы этих величин подчиняется условию, что при возрастании n отношение B/n^2 стремится к нулю, то при достаточно большом числе этих величин будет сколь угодно близкой к достоверности вероятность, что их среднее арифметическое отличается произвольно мало от среднего арифметического их математических ожиданий.

Обозначим математические ожидания величин x_1, x_2, \dots, x_n соответственно через a_1, a_2, \dots, a_n .

Дисперсия B суммы этих величин представляет, по определению (4.94), математическое ожидание величины $X = \left(\sum_{s=1}^n x_s - \sum_{s=1}^n a_s \right)^2$.

Применяя лемму Маркова (4.136) к этой величине X , находим, что

$$P\left\{\left(\sum_{s=1}^n x_s - \sum_{s=1}^n a_s\right)^2 \leq B t^2\right\} > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Неравенство, заключенное в фигурных скобках этого выражения, равносильно неравенству

$$\left| \sum_{s=1}^n x_s - \sum_{s=1}^n a_s \right| \leq t \sqrt{B}.$$

Разделив обе части его на n , получим равносильное неравенство

$$\left| \frac{\sum_{s=1}^n x_s}{n} - \frac{\sum_{s=1}^n a_s}{n} \right| \leq t \sqrt{\frac{B}{n^2}}. \quad (4.152)$$

Остановимся на рассмотрении последнего неравенства (4.152). Возьмем два наперед заданных произвольно малых положительных числа ε и η и положим $1/t^2 = \eta$, т. е. $t = 1/\sqrt{\eta}$.

Так как, далее, по условию теоремы, число n может быть увеличиваемо беспрестанно, то мы можем найти такое число n_0 , что при $n > n_0$ будет иметь место неравенство

$$\frac{B}{n^2} < \varepsilon^2 \eta. \quad (4.153)$$

Это неравенство, несомненно, осуществимо, так как, по предположению, $B/n^2 \rightarrow 0$ с возрастанием n .

Заменяя в неравенстве (4.152) t через $1/\sqrt{\eta}$, а B/n^2 через $\varepsilon^2 \eta$ и замечая, что

$$t \sqrt{\frac{B}{n^2}} < \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\varepsilon^2 \eta} = \varepsilon,$$

мы получим более широкое неравенство

$$\left| \frac{\sum_{s=1}^n x_s}{n} - \frac{\sum_{s=1}^n a_s}{n} \right| < \varepsilon. \quad (4.154)$$

Следовательно, тем более вероятность неравенства (4.154) должна превысить $1 - \frac{1}{t^2} = 1 - \eta$.

Таким образом, при достаточно большом числе n и соблюдении условия, что

$$\frac{B}{n^2} \rightarrow 0, \quad \text{когда} \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.155)$$

мы нашли, что, какими бы малыми ни были два наперед заданных положительных числа ε и η ,

$$P \left\{ -\varepsilon < \frac{\sum_{s=1}^n x_s}{n} - \frac{\sum_{s=1}^n a_s}{n} < \varepsilon \right\} > 1 - \eta, \quad (4.156)$$

что и выражает теорему Маркова, или закон больших чисел в его достаточно общем виде.

4. Теорема Чебышева. Существует важный частный случай, при котором закон больших чисел, наверное, имеет место; а именно, когда случайные величины x_1, x_2, \dots, x_n являются попарно независимыми и математические ожидания их квадратов все не превосходят одного и того же числа.

В таком случае существует постоянное, не зависящее от n , число L такое, что $b_s = \mathbf{M}(x_s^2) < L$ при $s = \overline{1, n}$. С другой стороны, для попарно независимых случайных величин

$$B = \sum_{s=1}^n (b_s - a_s^2) \leq \sum_{s=1}^n b_s < nL,$$

и, следовательно, $B/n^2 < L/n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$, т. е. оказывается выполненным условие (4.155) для осуществления закона больших чисел, причем неравенство (4.153) примет вид

$$\frac{L}{\varepsilon^2 n} < \eta. \quad (4.157)$$

Таким образом, мы имеем следующую теорему, доказанную Чебышевым.

Теорема Чебышева. Если число n попарно независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n можно увеличивать беспредельно и математические ожидания их квадратов все не превосходят одного и того же постоянного числа, то при достаточно большом числе этих величин будет сколь угодно близкой к достоверности вероятность того, что их среднее арифметическое отличается произвольно мало от среднего арифметического их математических ожиданий:

$$\mathbf{P} \left\{ -\varepsilon < \frac{\sum_{s=1}^n x_s}{n} - \frac{\sum_{s=1}^n a_s}{n} < \varepsilon \right\} > 1 - \eta. \quad (4.158)$$

Одним из важных следствий теоремы Чебышева является применение ее к случаю, когда все попарно независимые величины x_1, x_2, \dots, x_n имеют одно и то же математическое ожидание, т. е. когда все

$$a_s = a \quad (s = \overline{1, n}) \quad (4.159)$$

и, кроме того, все

$$\mathbf{M}(x^2) = b_s = b \quad (s = \overline{1, n}), \quad (4.160)$$

причем b существует, т. е. конечно. Иначе говоря, независимые величины x_1, x_2, \dots, x_n можно рассматривать как возможные значения величины x в n независимых испытаниях.

В таком случае, согласно теореме Чебышева (4.158), имеем

$$P \left\{ -\varepsilon < \frac{\sum_{s=1}^n x_s}{n} - a < \varepsilon \right\} > 1 - n. \quad (4.161)$$

Таким образом, из теоремы Чебышева получается как следствие важная теорема:

Если с величиной x , имеющей конечную дисперсию, производится достаточно большое число независимых испытаний, то с вероятностью, сколь угодно близкой к достоверности, можно ожидать, что среднее арифметическое наблюдаемых значений величины x будет произвольно мало отличаться от ее математического ожидания.

Рассмотрим несколько иной частный случай.

Положим, что производится n независимых измерений некоторой неизвестной физической постоянной a . Результат каждого из этих измерений x_1, x_2, \dots, x_n будет случайной величиной. Допустим, что производимые измерения свободны от постоянных погрешностей, т. е. что математические ожидания этих величин одинаковы и как раз равны измеряемой постоянной: $M(x_s) = a$ ($s = \overline{1, n}$). Допустим, кроме того, что при измерениях обеспечена хотя бы и небольшая, но не беспредельно убывающая точность, так что рассеяния результатов измерений около измеряемой величины не могут беспредельно возрастать, т. е. пусть $\sigma_s^2 < L$ ($s = \overline{1, n}$), где L — некоторое постоянное число.

При таких допущениях может быть применена теорема Чебышева, которая приводится к виду (4.161). Эта формула показывает, что, производя достаточно большое число измерений, можно практически быть вполне уверенным, что среднее арифметическое из результатов измерений будет сколь угодно мало отличаться от измеряемой постоянной.

5. Теорема Пуассона. Частным случаем теоремы Чебышева является теорема Пуассона.

Положим, что рассматривается неограниченный ряд независимых по отношению к событию E испытаний, которые обозначим номерами $1, 2, \dots, s, \dots, n$; пусть вероятности события E при этих испытаниях будут соответственно $p_1, p_2, \dots, p_s, \dots, p_n$, а вероятности противоположного события будут $q_1, q_2, \dots, q_s, \dots, q_n$, так что

$$p_s + q_s = 1 \quad (s = \overline{1, n}).$$

Положим, далее, что с рассматриваемыми испытаниями связаны величины $x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_n$ таким образом, что каждая из них, например x_s , принимает значение $x_s = 1$, если при испытании с номером s появится событие E , и значение $x_s = 0$ в противоположном случае.

При таких условиях математические ожидания рассматриваемых величин и математические ожидания квадратов их имеют одно и то же значение, а именно,

$$a_s = M(x_s) = 1 \cdot p_s + 0 \cdot q_s = p_s, \quad b_s = M(x_s^2) = 1^2 \cdot p_s + 0^2 \cdot q_s = p_s.$$

Далее, сумма $\sum_{s=1}^n x_s$ при всяком n будет выражать число m появлений события E при рассматриваемых n испытаниях, а отношение

$$\frac{\sum_{s=1}^n x_s}{n},$$

представляющее среднее арифметическое величин x_1, x_2, \dots, x_n , совпадает с отношением числа появлений события E при испытаниях с номерами $1, 2, \dots, n$ к числу испытаний, т. е. будет равно m/n . Среднее же арифметическое математических ожиданий величин x_1, x_2, \dots, x_n равно среднему арифметическому соответственных вероятностей события, т. е.

$$\frac{\sum_{s=1}^n p_s}{n}.$$

Наконец, в рассматриваемом случае

$$\sigma_s^2 = M[(x_s - a_s)^2] = p_s - p_s^2 = p_s(1 - p_s) = p_s q_s.$$

Но $p_s q_s \leq 1/4$. В самом деле, произведение двух положительных чисел, сумма которых равна 1, можно представить в виде

$$\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{4} - \alpha^2.$$

Когда оба числа равны между собой и, следовательно, равны $1/2$, произведение их будет равно $1/4$; во всех же иных случаях это произведение меньше $1/4$.

Итак,

$$\sigma_s^2 = p_s q_s \leq \frac{1}{4},$$

т. е. дисперсия каждой из величин x_s является ограниченной.

Таким образом, величины x_s ($s = \overline{1, n}$) удовлетворяют всем условиям, требуемым теоремой Чебышева. При этом неравенство (4.157) примет вид

$$\frac{1}{4\epsilon^2 n} < \eta, \quad (4.162)$$

откуда

$$n > \frac{1}{4\epsilon^2\eta}. \quad (4.163)$$

Произведя соответствующую замену в выражении теоремы Чебышева (4.158), мы приходим к теореме Пуассона:

При $n > \frac{1}{4\epsilon^2\eta}$,

$$P \left\{ -\epsilon \leq \frac{m}{n} - \frac{\sum_{s=1}^n p_s}{n} \leq \epsilon \right\} > 1 - \eta, \quad (4.164)$$

т. е. при достаточно большом числе независимых испытаний следует с вероятностью, сколь угодно близкой к достоверности, ожидать, что отношение числа появлений события к числу испытаний будет сколь угодно близко к среднему арифметическому вероятностей события.

6. Теорема Бернулли. В частном случае, когда все вероятности p_1, p_2, \dots, p_n равны между собой, т. е. равны одному и тому же числу p , теорема Пуассона обращается в теорему Бернулли.

Так как в этом случае $\sigma_s^2 = pq$, то неравенство (4.162) обращается в

$$\frac{pq}{\epsilon^2 n} < \eta, \quad (4.165)$$

откуда

$$n > \frac{pq}{\epsilon^2 \eta}. \quad (4.166)$$

Таким образом, выражение (4.164) примет вид: при $n > \frac{pq}{\epsilon^2 \eta}$

$$P \left\{ -\epsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \epsilon \right\} > 1 - \eta, \quad (4.167)$$

что и выражает теорему Бернулли:

Если имеется неограниченный ряд независимых испытаний, при каждом из которых вероятность некоторого события остается постоянной, то при достаточно большом числе этих испытаний будет сколь угодно близка к достоверности вероятность того, что отношение числа появлений события к числу испытаний произвольно мало отличается от вероятности события при отдельном испытании.

Теорема Бернулли может быть доказана также непосредственно при помощи леммы Маркова.

Неравенство

$$-\epsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \epsilon, \quad (4.168)$$

вероятность которого устанавливается теоремой Бернулли, равносильно неравенству $\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \epsilon$, что в свою очередь равносильно неравенству $\left(\frac{m}{n} - p \right)^2 \leq \epsilon^2$, или

$$(m - np)^2 \leq \epsilon^2 n^2. \quad (4.169)$$

Ввиду равносильности этих неравенств все они имеют одну и ту же вероятность. Поэтому, установив вероятность неравенства (4.169), мы тем самым устанавливаем вероятность неравенства (4.168).

При определении вероятности неравенства (4.169) мы можем применить лемму Маркова (4.147), так как случайная величина $(m - np)^2$, как квадрат, принимает только положительные значения, равно как и $\epsilon^2 n^2$ есть число положительное. Поэтому, полагая в выражении (4.147)

$$X = (m - np)^2, \quad \tau = \epsilon^2 n^2,$$

имеем

$$P\{(m - np)^2 \leq \epsilon^2 n^2\} > 1 - \frac{M(m - np)^2}{\epsilon^2 n^2},$$

или, так как $M(m - np)^2 = npq$ [см. (4.103)], получим

$$P\{(m - np)^2 \leq \epsilon^2 n^2\} > 1 - \frac{pq}{\epsilon^2 n}.$$

Так как, по условию теоремы, число испытаний n может быть увеличиваемо беспречно, то при данных сколь угодно малых положительных числах ϵ и η мы всегда можем взять число n достаточно большим для того, чтобы имело место неравенство $1 - \frac{pq}{\epsilon^2 n} > 1 - \eta$, и, следовательно, тем более будет иметь место неравенство

$$P\{(m - np)^2 \leq \epsilon^2 n^2\} > 1 - \eta.$$

Но так как вероятность неравенства (4.169) равна вероятности неравенства (4.168), то мы окончательно получаем, что при достаточно большом числе испытаний

$$P\left\{-\epsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \epsilon\right\} > 1 - \eta.$$

7. Значение закона больших чисел. Теорема Бернулли устанавливает вероятностное соотношение между частостью и вероятностью события. Другими словами, теорема Бернулли не утверждает того, что с увеличением числа испытаний разность между частостью и вероятностью события будет как угодно мала, а говорит только о том, что вероятность этого утверждения будет как угодно мало отличаться от достоверности.

Это замечание относится ко всем видам закона больших чисел.

Закон больших чисел представляет исключительно важное значение при научных исследованиях. Имея возможность на основании этого закона с практически полной уверенностью ожидать приближенного равенства между установленными из наблюдений частотами некоторых событий и их вероятностями, мы можем с достаточной степенью надежности по вероятностям события судить о том, как часто событие будет повторяться, и обратно — по частоте события заключать о вероятности его.

Основное положение закона больших чисел, ясно выраженное в самом его названии, вскрывает сущность методов статистического исчисления. Для отдельного исхода испытания, для отдельного результата наблюдения этот закон ничего не утверждает. Но при достаточно большом числе испытаний частоты появления того или иного события приближенно равны их вероятностям. Другими словами, закон больших чисел показывает, что наши заключения, неприменимые в отношении определенного события, связанного с отдельным испытанием, оказываются вполне основательными в отношении того же события, связанного с каждым из достаточно большого количества однородных испытаний, проводившихся в неизменных условиях.

Отсюда следует, что для обеспечения возможности применения методов статистического исчисления к изучению тех или иных явлений необходимо, чтобы соответствующие события имели не единственный, а массовый характер. Иначе говоря, необходимо, чтобы или данное событие осуществлялось в некоторой части большого числа единиц совокупности, или же комплекс условий, при котором появляется или не появляется событие, мог быть повторен достаточно большое число раз.

§ 1. Биномиальное распределение Бернулли

1. Биномиальное распределение. Конечной целью при исследовании распределения случайной величины является установление уравнения кривой распределения значений этой величины.

Основными типами распределения являются биномиальное распределение Бернулли, нормальное распределение Лапласа — Гаусса и распределение Пуассона.

Биномиальным распределением называется распределение числа m появлений события E при n независимых испытаниях, при каждом из которых вероятность появления события остается постоянной, т. е. равна одной и той же величине p , а вероятность противоположного события равна $q = 1 - p$.

Вероятность $p_{n,m}$ того, что при данном числе n независимых испытаний событие E появится определенное число m раз, может быть найдена при помощи производящей функции вероятностей (4.59), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$G_n(t) = \sum_{m=0}^n p_{n,m} t^m. \quad (5.1)$$

Для установления функции $G_n(t)$ заметим, что появление события E определенное число m раз при n испытаниях возможно только в двух взаимно исключающих случаях: или событие может появиться $m-1$ раз при $n-1$ первых испытаниях и появиться при n -м испытании, — вероятность этого случая равна $pp_{n-1,m-1}$, — или же событие может появиться m раз при $n-1$ первых испытаниях и не появиться при n -м испытании, — вероятность этого случая равна $qp_{n-1,m}$. Следовательно,

$$p_{n,m} = pp_{n-1,m-1} + qp_{n-1,m} \quad (*)$$

для всех целых положительных чисел n и m .

На основании уравнения (*) можно вычислить вероятность $p_{n,m}$ при следующих вполне очевидных начальных условиях:

$$p_{0,m} = 0, \text{ если } m > 0, \quad p_{n,0} = q^n, \text{ если } n \geq 0. \quad (**)$$

Возьмем теперь в производящей функции (5.1) $n-1$ вместо n , отделим в правой ее части член $p_{n-1,0}$ и умножим левую и правую части на q ; тогда будем иметь

$$qG_{n-1}(t) = qp_{n-1,0} + \sum_{m=1}^n qp_{n-1,m}t^m;$$

подобным же образом

$$ptG_{n-1}(t) = \sum_{m=1}^n pp_{n-1,m-1}t^m.$$

Складывая два последних равенства и принимая во внимание (*), получим

$$(pt + q)G_{n-1}(t) = G_n(t) + qp_{n-1,0} - p_{n,0};$$

но, согласно (**),

$$qp_{n-1,0} - p_{n,0} = q^n - q^n = 0;$$

поэтому

$$G_n(t) = (pt + q)G_{n-1}(t)$$

для всякого положительного числа n .

Взяв $n = 1, 2, 3, \dots$ и производя последовательные подстановки, получим

$$G_n(t) = (pt + q)^n G_0(t).$$

Для определения $G_0(t) = \sum_{m=0}^n p_{0,m}t^m$ заметим, что, согласно (**), $p_{0,m} = 0$, если $m > 0$, в то время как $p_{0,0} = 1$. Таким образом, $G_0(t) = 1$. Следовательно,

$$G_n(t) = \sum_{m=0}^n p_{n,m}t^m = (pt + q)^n. \quad (5.2)$$

Разлагая бином, стоящий в правой части равенства (5.2) по степеням t и беря коэффициент при t^m , имеем

$$p_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^n q^{n-m}. \quad (5.3)$$

Поэтому распределение числа m называется биномиальным распределением.

Полагая в (5.2) $t = 1$, получим

$$\sum_{m=0}^n p_{n,m} = (p + q)^n = 1. \quad (5.4)$$

2. Моменты биномиального распределения. Применяя метод производящих функций, можно найти моменты биномиального распределения относительно нулевого значения этого распределения.

Найдем сначала факториальные моменты биномиального распределения

$$m_{[h]} = \sum_{m=0}^n m^{[h]} p_{n,m}. \quad (5.5)$$

Полагая $t = 1 + u$ в производящей функции вероятностей (5.2), получим, согласно (4.104), производящую функцию факториальных моментов биномиального распределения

$$G_n(u) = (1 + pu)^n = \sum_{h=0}^n n^{[h]} p^h \frac{u^h}{h!}. \quad (5.6)$$

Следовательно,

$$m_{[h]} = n^{[h]} p^h. \quad (5.7)$$

Производящая функция обыкновенных моментов биномиального распределения будет, согласно (4.106), равна

$$G_n(v) = (pe^v + q)^n. \quad (5.8)$$

Разлагая эту функцию в ряд и принимая во внимание (5.4), получим обыкновенные начальные моменты:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= 1, \\ m_1 &= np, \\ m_2 &= npq + n^2 p^2, \\ m_3 &= npq(q - p) + 3n^2 p^2 q + n^3 p^3, \\ m_4 &= npq(1 - 6pq) + n^2 p^2 q(7q - 4p) + 6n^3 p^3 q + n^4 p^4, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Обыкновенные начальные моменты могут быть найдены также при помощи факториальных моментов по формуле (2.30).

Наконец, замечая, что в биномиальном распределении $m_1 = np$ [см. (5.9)], находим, согласно (4.111), производящую функцию обыкновенных центральных моментов

$$\bar{G}_n(v) = e^{-npv} (pe^v + q)^n = (pe^{vq} + qe^{-vp})^n. \quad (5.10)$$

При помощи этой функции определяем обыкновенные центральные моменты биномиального распределения.

Обыкновенные центральные моменты биномиального распределения можно найти также по обыкновенным начальным моментам, применяя формулу (2.52). Имеем

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = npq, \\ \mu_3 &= npq(q - p), \quad \mu_4 = npq[3(n - 2)pq + 1], \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

От центральных моментов легко перейти к основным моментам биномиального распределения:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= 1, & r_1 &= 0, & r_2 &= 1, \\ r_3 &= \frac{q-p}{\sqrt{npq}}, & r_4 &= 3 + \frac{1-6pq}{npq}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

При $n \rightarrow \infty$

$$r_3 \rightarrow 0, \quad r_4 \rightarrow 3.$$

Подставляя в производящую функцию вероятностей (5.2) величину e^{it} вместо t , получим характеристическую функцию биномиального распределения

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^n p_{n,m} e^{itm} = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} (pe^{it})^m q^{n-m} = (pe^{it} + q)^n. \quad (5.13)$$

При помощи характеристической функции (5.13) мы можем найти моменты биномиального распределения, применяя соотношение (4.126).

Логарифмируя (5.13), получим характеристическую функцию полуинвариантов биномиального распределения:

$$\psi(t) = n \ln(pe^{it} + q), \quad (5.14)$$

откуда, принимая во внимание (4.129), находим полуинварианты биномиального распределения:

$$\lambda_1 = np, \quad \lambda_2 = npq, \quad \lambda_3 = npq(q-p), \quad \lambda_4 = npq(1-6pq), \dots$$

Таким образом, для биномиального распределения

$$\lambda_1 = m_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \lambda_3 = \mu_3, \quad \lambda_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \dots \quad (5.15)$$

3. Вычисление членов биномиального распределения. При вычислении отдельных членов биномиального распределения (5.3) — в случае небольших значений n — биномиальные коэффициенты

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (5.16)$$

получаются непосредственно из соответствующих диагоналей арифметического треугольника.

Арифметическим треугольником называется система чисел, получаемых из (5.16) при тех или иных значениях n и m .

Числа арифметического треугольника могут быть составлены также по следующему правилу: для образования каждого числа арифметического треугольника надо сложить два числа, одно из

которых стоит рядом с образуемым числом слева, а другое — непосредственно над образуемым числом, причем составление арифметического треугольника начинается с 1 и в каждом столбце выписывание чисел прекращается на одну строку раньше, чем в предыдущем столбце. Выполнение последнего требования и приводит к тому, что числа располагаются в виде треугольника.

Составленный по этому правилу арифметический треугольник имеет вид, показанный в табл. 5.1. В этой таблице числа в скобках обозначают номера столбцов, а также номера диагоналей, начинающихся с единиц, стоящих под этими числами.

Таблица 5.1

Арифметический треугольник

| (0) | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) | (12) |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | 220 | | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | 495 | | | | |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 | | | | | |
| 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 | | | | | | |
| 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | | | | | | | |
| 1 | 9 | 45 | 165 | 495 | | | | | | | | |
| 1 | 10 | 55 | 220 | | | | | | | | | |
| 1 | 11 | 66 | | | | | | | | | | |
| 1 | 12 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | |

Числа арифметического треугольника обладают важными свойствами, из которых отметим следующие:

1. Сумма чисел каждой диагонали арифметического треугольника равна 2 в степени номера диагонали.

Это свойство получается из равенства (5.4), которое можно написать в виде

$$\sum_{m=0}^n p_{n,m} = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m! (n-m)!} p^m q^{n-m} = 1,$$

При $p = q = 1/2$ имеем

$$\frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m! (n-m)!} = 1,$$

откуда следует

$$\sum_{m=0}^n \frac{n!}{m! (n-m)!} = 2^n. \quad (5.17)$$

Например, сумма чисел шестой диагонали арифметического треугольника равна

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6.$$

2. Сумма чисел каждого столбца арифметического треугольника равна сумме последних чисел данного столбца и следующего за ним столбца.

Это свойство непосредственно видно из табл. 2.4, которая составлена по тому же правилу, как и арифметический треугольник. Действительно, сопоставляя равенства

$$N_j^{(h)} = N_j^{(h-1)} + N_{j-1}^{(h)} \quad \text{и} \quad N_j^{(h)} = \sum_{i=1}^k N_i^{(h-1)}$$

[ср. (2.36) и (2.37)], имеем

$$\sum_{i=1}^k N_i^{(h-1)} = N_j^{(h-1)} + N_{j-1}^{(h)}. \quad (5.18)$$

Например, сумма чисел столбца (8) равна

$$1 + 9 + 45 + 165 + 495 = 715 = 495 + 220.$$

При использовании арифметического треугольника для составления биномиального распределения числа n указывают номер диагонали, а числа m — номер столбца.

Пусть произведено $n = 12$ испытаний, при каждом из которых вероятность появления некоторого события равна $p = 1/3$. Тогда распределение вероятностей числа m появлений этого события будет дано членами разложения бинома $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{12}$. Беря числа из 12-й диагонали арифметического треугольника, мы видим, что биномиальный коэффициент, например, для $m = 4$ равен 495. Поэтому, на основании (5.3), получим

$$p_{12,4} = 495 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{495 \cdot 256}{531 \cdot 441} = 238\%.$$

Поступая подобным же образом для всех $m = 0, 1, \dots, 12$, получим нужное распределение в виде ряда

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|---|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|---|----|----|----|----------|
| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Σ |
| $p_{n,m}$ | 8 | 46 | 127 | 212 | 238 | 191 | 111 | 43 | 15 | 3 | 1 | — | — | 1000 |

Изображение этого ряда дано на рис. 5.1.

Математическое ожидание и дисперсия биномиального распределения находятся по формулам

$$M(m) = m_{1(0)} = np, \quad M\{(m - np)^2\} = \mu_2 = npq$$

[см. (5.9) и (5.11)]. Для приведенного выше ряда имеем

$$M(m) = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4, \quad M\{(m - np)^2\} = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 2 \frac{2}{3}.$$

Для облегчения вычислений $p_{n,m}$ при большом n составлена семизначная таблица логарифмов факториалов $\lg n!$ от $n = 1$ до $n = 1000$ (табл. V).

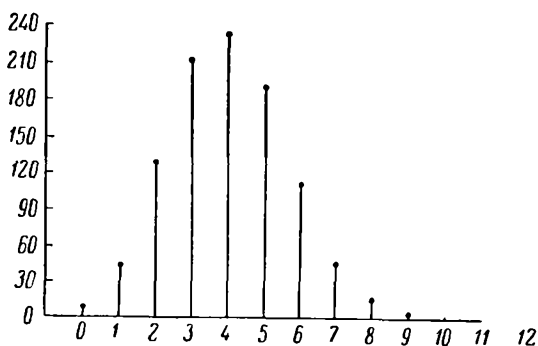


Рис. 5.1. Биномиальное распределение для $n = 12$ и $p = 1/3$.

В тех случаях, когда число n весьма большое, точное вычисление членов биномиального распределения становится практически невозможным; в этих случаях применяется приближенная формула Муавра — Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \quad (5.19)$$

или

$$\lg n! \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \lg n - n \lg e + \lg \sqrt{2\pi}. \quad (5.20)$$

4. Применение биномиального распределения. Биномиальное распределение представляет решение следующей важной задачи.

Положим, что имеется общая совокупность, состоящая из N экземпляров, из которых $M = pN$ экземпляров обладают некоторым

признаком A , а остальные $N - M = qN$ не обладают им, так что $pN + qN = N$ и, следовательно, $p + q = 1$.

Пусть из этой совокупности составлена частичная совокупность путем независимого случайного выбора одного за другим n экземпляров, причем каждый раз взятый из общей совокупности экземпляр возвращается в нее обратно для того, чтобы состав экземпляров в этой совокупности сохранялся неизменным перед каждым следующим выбором. В таком случае вероятность того, что из общего числа n экземпляров частичной совокупности m экземпляров будут обладать признаком A , будет равна общему члену биномиального распределения (5.3).

Положим, например, что продолжительные наблюдения над качеством продукции, выпускаемой заводом, показали, что доля брака равна p -й части выпускаемой продукции. Мы выражаем это, говоря, что вероятность для данного взятого наудачу изделия оказаться бракованным равна p . Требуется вычислить вероятность, что в партии, содержащей n изделий, количество бракованных изделий равно $m = 0, 1, \dots, n$.

Обратимся к формуле (5.3). Пусть, например, $p = 0.02$, $m = 25$, $n = 1000$. Тогда

$$p_{1000; 25} = \frac{1000!}{25! 975!} \cdot 0,02^{25} \cdot 0,98^{975}.$$

Применяя таблицу логарифмов факториалов (табл. V), находим

$$\begin{aligned} \lg p_{1000; 25} &= \lg 1000! - \lg 25! - \lg 975! + 25 \lg 0,02 + 975 \lg 0,98 = \\ &= 2567,604\,6442 + 25 \times \bar{2},301\,0300 \\ &\quad - 25,190\,6457 + 975 \times \bar{1},991\,2261 \\ &\quad - 2492,7360098 \\ &\quad \hline &49,6779887 + \bar{43},525\,7500 \\ &\quad \quad + \bar{9},445\,4475 \\ &\quad \hline \lg p_{1000; 25} &= \bar{2},649\,1862 \end{aligned}$$

Следовательно, $p_{1000; 25} = 0,045$.

5. Теорема Муавра — Лапласа. Предельным случаем биномиального распределения (5.3), когда число испытаний неограниченно возрастает, причем ни одна из вероятностей p и q не очень мала, является нормальное распределение Лапласа — Гаусса.

В основе перехода от прерывного биномиального распределения к непрерывному нормальному распределению лежит теорема Муавра — Лапласа.

Теорема Муавра — Лапласа. Если производится неограниченное число n независимых испытаний, при каждом из которых

вероятность появления события E равна p , то при беспределном возрастании числа испытаний вероятность $P(n, t_1, t_2)$, что число t появлений события E удовлетворит неравенствам

$$t_1 \sqrt{npq} < m - np < t_2 \sqrt{npq}, \quad (5.21)$$

стремится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt, \quad (5.22)$$

где t_1 и t_2 — какие-нибудь два числа ($t_1 < t_2$).

Переходя к доказательству этой теоремы, заметим, что вероятность $P(n, t_1, t_2)$ неравенств (5.21) представляет не что иное, как вероятность, что число m появлений события E имеет одно из значений, лежащих в промежутке от $np + t_1 \sqrt{npq}$ до $np + t_2 \sqrt{npq}$. Поэтому, на основании теоремы сложения вероятностей, вероятность $P(n, t_1, t_2)$ равна сумме вероятностей того, что число m окажется равным какому-либо целому числу, удовлетворяющему неравенствам (5.21). Таким образом,

$$P(n, t_1, t_2) = \sum p_{n, m},$$

где

$$p_{n, m} = \frac{n!}{m! (n-m)!} p^m q^{n-m}, \quad (a)$$

и суммирование распространяется на все значения целого числа m , удовлетворяющего неравенствам (5.21); все эти значения m можно представить в виде

$$m = np + t \sqrt{npq} \quad (б)$$

при условии, что $t_1 < t < t_2$.

Так как при беспределном возрастании n все рассматриваемые значения m и значения

$$n - m = nq - t \sqrt{npq} \quad (в)$$

также беспределно возрастают, то к каждому из факториалов чисел, входящих в выражение (а), можно применить формулу Муавра — Стирлинга (5.19). Имеем

$$\begin{aligned} p_{n, m} &= \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m} m^m e^{-m} \sqrt{2\pi (n-m)} (n-m)^{n-m} e^{-(n-m)}} = \\ &= \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}} \sqrt{\frac{n}{2\pi m (n-m)}} = \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} \sqrt{\frac{n}{2\pi m (n-m)}}. \end{aligned}$$

Это выражение можно представить в виде

$$p_{n,m} = \frac{1}{H} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi K}}, \quad (г)$$

если положить

$$H = \left(\frac{m}{np}\right)^m \left(\frac{n-m}{nq}\right)^{n-m} \quad \text{и} \quad K = -\frac{m(n-m)}{n}.$$

Рассмотрим сначала величину H .

Принимая во внимание (б) и (в), имеем

$$H = \left(1 + t \sqrt{\frac{q}{np}}\right)^m \left(1 - t \sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{n-m},$$

откуда

$$\begin{aligned} \ln H &= m \ln \left(1 + t \sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (n-m) \ln \left(1 - t \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = \\ &= (np + t \sqrt{npq}) \ln \left(1 + t \sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (nq - t \sqrt{npq}) \ln \left(1 - t \sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \end{aligned}$$

Но для любого x , заключенного между -1 и $+1$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (5.23)$$

Поэтому, придавая t определенное значение и полагая n достаточно большим, чтобы имели место неравенства $|t \sqrt{q/np}| < 1/2$ и $|t \sqrt{p/nq}| < 1/2$, находим

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + t \sqrt{\frac{q}{np}}\right) &= t \sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{t^2}{2} \frac{q}{np} + \rho, \\ \ln \left(1 - t \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) &= -t \sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{t^2}{2} \frac{p}{nq} - \rho', \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |\rho| &< \frac{1}{3} \left| t \sqrt{\frac{q}{np}} \right|^3 + \frac{1}{4} \left| t \sqrt{\frac{q}{np}} \right|^4 - \dots < \frac{A |t^3|}{n^{3/2}}, \\ |\rho'| &< \frac{A |t^3|}{n^{3/2}}, \end{aligned}$$

если через A обозначим некоторое определенное положительное число, не зависящее ни от n , ни от t .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \ln H &= (np + t \sqrt{npq}) \left(t \sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{t^2}{2} \frac{q}{np} + \rho \right) - \\ &\quad - (nq - t \sqrt{npq}) \left(-t \sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{t^2}{2} \frac{p}{nq} + \rho' \right) = \\ &= t \sqrt{npq} - \frac{t^2}{2} q + t^2 q - \frac{t^3}{2} q \sqrt{\frac{q}{np}} + \rho(np + t \sqrt{npq}) - \\ &\quad - t \sqrt{npq} - \frac{t^2}{2} p + t^2 p + \frac{t^3}{2} p \sqrt{\frac{p}{nq}} - \rho'(nq - t \sqrt{npq}) = \frac{t^2}{2} + \delta, \end{aligned}$$

причем $|\delta| < \frac{h|t^3|}{n^{1/2}}$, где h — не зависящая ни от n , ни от t постоянная величина.

Следовательно, при неограниченном возрастании n имеем в пределе $\ln H = \frac{t^2}{2}$, откуда $H = e^{t^2/2}$ и

$$\frac{1}{H} = e^{-t^2/2}. \quad (д)$$

Рассмотрим теперь величину K . Имеем

$$\begin{aligned} K &= \frac{m(n-m)}{n} = \frac{1}{n} (np + t\sqrt{npq})(nq - t\sqrt{npq}) = \\ &= n \left(p + t\sqrt{\frac{pq}{n}} \right) \left(q - t\sqrt{\frac{pq}{n}} \right) = npq \left(1 + t\sqrt{\frac{q}{np}} \right) \left(1 - t\sqrt{\frac{p}{nq}} \right) = \\ &= npq \left(1 + t\sqrt{\frac{q}{np}} - t\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{t^2}{n} \right) = npq (1 + \beta), \end{aligned}$$

где β стремится к нулю при всяком значении t , когда n неограниченно возрастает. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$K = npq. \quad (е)$$

Принимая во внимание (д) и (е), мы можем при неограниченно большом n написать $p_{n,m}$ в виде

$$p_{n,m} = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi npq}} (1 + \epsilon), \quad (ж)$$

где ϵ стремится равномерно к нулю с возрастанием n для всех целых значений $m = np + t\sqrt{npq}$, каково бы ни было число t в любом определенном промежутке (t_1, t_2) .

Выражению для $p_{n,m}$ можно придать иной вид, исходя из следующих соображений.

Двум последовательным значениям t и $t + \Delta t$ должны соответствовать два последовательных же числа m и $m + 1$. В согласии с этим приращение Δt определяется вычитанием равенства $m = np + t\sqrt{npq}$ из равенства $m + 1 = np + (t + \Delta t)\sqrt{npq}$. Т. е. $1 = \Delta t\sqrt{npq}$ и, следовательно,

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{npq}}. \quad (з)$$

Таким образом, при беспредельном возрастании n приращение Δt , т. е. разность каждых двух последовательных значений t , стремится к нулю.

Подставляя Δt в выражение для $p_{n,m}$, получим

$$p_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \Delta t (1 + \epsilon).$$

Эту формулу можно пояснить геометрически.
Построим кривую

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \quad (5.24)$$

(рис. 5.2). Эта кривая называется нормальной кривой. Отметим на кривой точку M с абсциссой t , соответствующей определенному числу

$$m = np + t \sqrt{npq},$$

и затем точку M_1 с абсциссой $t + \Delta t$, соответствующей следующему целому числу:

$$m + 1 = np + (t + \Delta t) \sqrt{npq}.$$

Из рис. 5.2. видно, что

$$\Delta s = f(t) \Delta t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \Delta t$$

представляет площадь прямоугольника, имеющего высотой ординату точки M , а основанием — промежуток Δt .

Таким образом, вероятность $p_{n,m}$ с точностью до множителя $(1 + \epsilon)$ измеряется площадью Δs ; иначе говоря,

$$p_{n,m} = \Delta s (1 + \epsilon).$$

В силу этого вероятность $P(n, t_1, t_2)$ неравенств (5.21) равна

$$\sum p_{n,m} = \sum_{t_1}^{t_2} \Delta s (1 + \epsilon),$$

где суммирование распространяется на смежные указанные выше прямоугольники с равными основаниями Δt , занимающими отрезок оси абсцисс от $t_1 + \delta'$ до $t_2 + \delta''$, причем $\delta' < \Delta t$ и $\delta'' < \Delta t$.

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_1}^{t_2} \Delta s$, т. е. предел суммы площадей рассматриваемых прямоугольников, когда число их беспредельно увеличивается, а основания стремятся к нулю, представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, кривой (5.24) и прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$. Эта площадь аналитически выражается определенным интегралом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_1}^{t_2} \Delta s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt. \quad (5.25)$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что вероятность $P(n, t_1, t_2)$ неравенств

$$t_1 \sqrt{npq} < m - np < t_2 \sqrt{npq}$$

при неограниченном возрастании n стремится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt.$$

В частности, при $-t_1 = +t_2 = x$ имеем

$$P(n, -x, +x) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \quad (5.26)$$

§ 2. Нормальное распределение Лапласа — Гаусса

1. Нормальное распределение. Теорема Муавра — Лапласа устанавливает, что в результате предельного перехода прерывное биномиальное распределение преобразуется в распределение непрерывного типа, называемое нормальным распределением.

Дифференциальная функция (плотность) нормального распределения $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2} \quad (5.27)$$

[см. (5.24), (5.25)].

При исследованиях применяются также другие виды дифференциальной функции нормального распределения.

Неравенства (5.21) можно написать в виде

$$t_1 < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < t_2,$$

где $m - np$ есть отклонение от среднего значения, а \sqrt{npq} — основное отклонение биномиального распределения [ср. (5.9) и (5.11)]. Поэтому величину $t = (m - np) / \sqrt{npq}$ можно представить в виде x/σ .

Подставляя эту величину в (5.25), находим дифференциальную функцию нормального распределения в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (5.28)$$

где x представляет отклонение от среднего значения, а σ — основное отклонение.

Полагая в (5.25) $t = z\sqrt{2}$, находим дифференциальную функцию нормального распределения в виде

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}. \quad (5.29)$$

Построение нормальной кривой можно выполнить при помощи таблицы значений дифференциальной функции нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad (5.30)$$

т. е. таблицы ординат нормальной кривой для аргумента, выраженного в единицах основного отклонения [см. (5.27)].

Для составления этой таблицы логарифмируем функцию (5.30):

$$\lg f(x) = \lg \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2} \lg e,$$

или, подставляя значения

$$\lg \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \bar{1},600\,9101 \quad \text{и} \quad \lg e = 0,434\,2945,$$

получим

$$\lg f(x) = \bar{1},600\,9101 - \frac{x^2}{2} \cdot 0,434\,2945.$$

Давая аргументу x те или иные значения, найдем соответствующие значения функции $f(x)$.

Найдем, например, значение $f(x)$ при $x = 1,2$:

$$\begin{aligned} \lg f(1,2) &= \bar{1},600\,9101 - 0,72 \cdot 0,434\,2945 = \\ &= \bar{1},600\,910 - 0,312\,692 = \bar{1},288\,208; \end{aligned}$$

следовательно,

$$f(1,2) = 0,19419.$$

Таблица значений функции $f(x)$ приведена в конце книги (табл. VI). В первом столбце этой таблицы указаны единицы и десятые, а в заголовке — сотые доли аргумента x ; на пересечении же тех или иных строк и столбцов дается соответствующее значение функции $f(x)$. В табл. VI, как и во всех других таблицах вероятностей, помещенных в конце книги, показаны десятичные знаки, а нуль целых опущен.

Выписывая значения $f(x)$ из этой таблицы, мы можем изобразить нормальную кривую при любом масштабе для оси абсцисс и ординат. Однако в целях исследования необходимо иметь некоторую образцовую нормальную кривую, с которой можно было бы сравнивать все другие нормальные кривые. В качестве такой кривой берется основная нормальная кривая

$$f^*(x) = e^{-x^2/2}, \quad (5.31)$$

в которой значения x (абсциссы) — это отклонения значений нормальной случайной величины от своего среднего значения, выра-

женных в единицах основного отклонения, а значения $f^*(x)$ (ординаты) выражены в единицах центральной ординаты.

Значения $f^*(x)$ получаются из таблицы значений $f(x)$ путем умножения последних на $\sqrt{2\pi} = 2,506628$, т. е. на величину, обратную величине центральной ординаты кривой (5.30) при $x = 0$:

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$
 Например,

$$f^*(1, 2) = 0,194186 \cdot 2,506628 = 0,48675$$

(табл. VII).

Исследуя функцию (5.28), мы можем составить полное представление о характере ее изменения.

1. Определим сначала область существования функции (5.28). Так как эта функция имеет действительные значения при любых значениях независимой переменной x , то, следовательно, область ее существования будет

$$-\infty < x < +\infty. \quad (5.32)$$

2. Какие бы при этом значения — положительные или отрицательные — ни принимала переменная x , функция (5.28), представляющая плотность распределения, остается всегда положительной:

$$f(x) > 0 \quad (5.33)$$

[(см. 4.40)].

Неравенство (5.33) показывает, что нормальная кривая распределения расположена над осью OX .

3. Функция (5.28) является четной, т. е. от замены $+x$ на $-x$ функция не изменяется:

$$f(-x) = f(+x). \quad (5.34)$$

Следовательно, нормальная кривая, изображающая функцию (5.28), симметрична относительно оси OY . Ось OY делит площадь кривой на две равные части, и, значит, срединное значение \bar{X} совпадает с началом координат. Так как в уравнении (5.28) за начало отсчета взято среднее значение \bar{X} , то в нормальном распределении $\bar{X} = \bar{X}$.

4. Приравнивая $f(x)$ нулю, получим уравнение

$$e^{-x^2/2\sigma^2} = 0,$$

которое не имеет решений; таким образом, нормальная кривая не пересекается с осью OX . Так как показатель степени исследуемой функции отрицателен, причем переменная x входит во второй степени, то с увеличением x в положительном или отрицательном направлении функция $f(x)$ очень быстро убывает. При стремлении

x к $+\infty$ или $-\infty$ показатель степени стремится к $-\infty$ и все выражение стремится к нулю; таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0. \quad (5.35)$$

Следовательно, при беспредельном удалении вправо и влево от начала кривая асимптотически приближается к оси OX .

5. При $x = 0$, т. е. в точке, соответствующей среднему значению, имеем

$$f(0) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}. \quad (5.36)$$

Так как при всех x значениях $f(x) < f(0)$, то величина (5.36) представляет наибольшую ординату нормальной кривой (5.28).

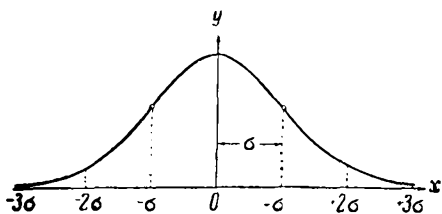


Рис 5.3. Среднее значение и основное отклонение нормального распределения.

К тому же выводу мы приходим, применяя общий способ нахождения максимума функции. Дифференцируя $f(x)$, получим

$$f'(x) = -\frac{x}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}. \quad (5.37)$$

Так как эта производная обращается в нуль при $x = 0$ и переходит от положительных значений, при $x < 0$, к отрицательным, при $x > 0$, то, следовательно, функция $f(x)$ возрастает при $x < 0$, убывает при $x > 0$ и имеет максимум при $x = 0$.

Таким образом, среднее значение в нормальном распределении является наиболее вероятным значением случайной величины.

Отсюда мы заключаем, что в нормальном распределении все три меры положения — среднее значение, срединное значение и наиболее частое значение — совпадают между собой:

$$\bar{X} = \hat{X} = \hat{X}. \quad (5.38)$$

6. Определим теперь области, в которых нормальная кривая вогнута вниз и вогнута вверх, а также точки перегиба нормальной кривой.

Для этого найдем вторую производную функции (5.28). Дифференцируя (5.37), имеем

$$f''(x) = \frac{1}{\sigma^5 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} (x^2 - \sigma^2). \quad (5.39)$$

Так как множитель перед скобкой в правой части этого выражения при любом значении x есть величина положительная, то знак второй производной определяется величиной второго множителя $x^2 - \sigma^2$.

Если $|x| < \sigma$, т. е. $-\sigma < x < +\sigma$, то $f''(x) < 0$; следовательно, внутри промежутка от $-\sigma$ до $+\sigma$ кривая вогнута вниз.

Если же $|x| > \sigma$, т. е. $x < -\sigma$ или $x > +\sigma$, то $f''(x) > 0$; следовательно, вне промежутка от $-\sigma$ до $+\sigma$ кривая вогнута вверх.

Наконец, приравнивая вторую производную нулю, получим $x^2 - \sigma^2 = 0$, откуда

$$x = \pm \sigma. \quad (5.40)$$

Так как при переходе через эти значения x вторая производная меняет знак, то при этих значениях x кривая имеет точки перегиба.

Таким образом, точки перегиба нормальной кривой находятся вправо и влево от начала, соответствующего среднему значению, на расстоянии, равном основному отклонению.

Приведенное исследование дает возможность составить представление о форме нормальной кривой; эта кривая расположена над осью абсцисс симметрично оси ординат; имеет максимальную ординату при $x=0$; в промежутке от $x=-\sigma$ до $x=+\sigma$ кривая вогнута

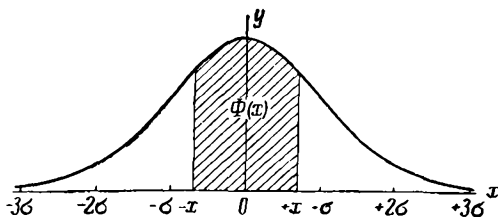


Рис. 5.4. Интеграл вероятностей $\Phi(x)$.

вниз, а вне этого промежутка вогнута вверх; при $x = \pm \sigma$ кривая имеет точки перегиба; с увеличением абсолютного значения x кривая быстро падает, причем ось абсцисс является асимптотой к кривой (рис. 5.3).

2. Интеграл вероятностей. Площадь под нормальной кривой (5.27), заключенная внутри промежутка от среднего значения до $\pm x\sigma$ (рис. 5.4), выражается интегралом

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-t^2/2} dt, \quad (5.41)$$

или ввиду симметричности нормальной кривой

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \quad (5.42)$$

[см. (5.26)].

Функция $\Phi(x)$ называется *интегралом вероятностей*. Этот интеграл представляет вероятность того, что значение отклонения от среднего (или математического ожидания) \bar{X} случайной величины X , выраженное в единицах основного отклонения, будет находиться внутри определенных пределов от $-x$ до $+x$:

$$P\left\{-x < \frac{X - \bar{X}}{\sigma} < +x\right\} = \Phi(x). \quad (5.43)$$

Исследование интеграла вероятностей (5.42) начнем с определения величины интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz, \quad (5.44)$$

причем из хода рассуждений будет следовать и самое существование этого несобственного интеграла.

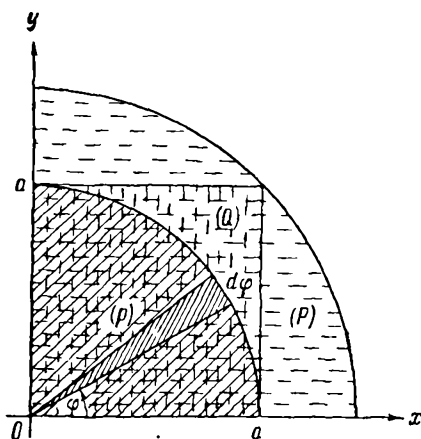


Рис. 5.5. Вычисление интеграла.

Рассмотрим функцию $e^{-(x^2+y^2)}$ и возьмем от нее двойные интегралы по следующим трем областям: 1) квадрат (Q) , ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = a$; 2) четверть круга (p) , вписанная в квадрат (Q) и ограниченная осями координат и дугой окружности $x^2 + y^2 = a^2$, и, наконец, 3) четверть круга (P) , описанная около квадрата (Q) и ограниченная осями координат и дугой окружности $x^2 + y^2 = 2a^2$ (рис. 5.5).

Так как рассматриваемая функция положительна, то

$$\iint_{(p)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy < \iint_{(Q)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy < \iint_{(P)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Но легко видеть, что

$$\begin{aligned} \iint_{(Q)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^a dy \int_0^a e^{-(x^2+y^2)} dx = \\ &= \int_0^a e^{-y^2} dy \int_0^a e^{-x^2} dx = \left[\int_0^a e^{-z^2} dz \right]^2, \end{aligned}$$

так как величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования.

Для вычисления интеграла по области (p) применим полярные координаты.

Так как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то якобиан будет равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому, применяя формулу замены переменных в двойных интегралах

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(D')} f[x(u, v), y(u, v)] J(u, v) du dv,$$

находим

$$\begin{aligned} \iint_{(P)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a e^{-r^2} r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^a = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

Подобным же образом вычисляется интеграл по области (P) . Он отличается от найденного только тем, что вместо a надо взять $a\sqrt{2}$. Поэтому

$$\iint_{(P)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2a^2}).$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-a^2}} < \int_0^a e^{-z^2} dz < \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2a^2}}.$$

Когда $a \rightarrow \infty$, крайние члены этого неравенства имеют общий предел $\sqrt{\pi}/2$; следовательно, на основании известной теоремы о пределах и средний член стремится к тому же пределу. Таким образом, интеграл (5.44) существует и равен

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (5.45)$$

Так как этот интеграл есть величина положительная, то перед квадратным корнем в формуле (5.45) надо взять знак плюс.

Из (5.45) находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}. \quad (5.46)$$

Подставляя в (5.46) $z = t/\sqrt{2}$, $z = x/\sigma \sqrt{2}$, получим соответственно

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}, \quad (5.47)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \sigma \sqrt{2\pi}. \quad (5.48)$$

3. Теорема Бернулли — доказательство Лапласа — Маркова. Интеграл вероятностей входит как составная часть при доказательстве теоремы Бернулли, данном Лапласом и Марковым.

Теорема Бернулли утверждает, что при достаточно большом числе n независимых испытаний

$$P\left\{-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon\right\} > 1 - \eta, \quad (5.49)$$

где ε и η — сколь угодно малые положительные числа.

Для доказательства этой теоремы рассмотрим, при некоторой величине t , вероятность $P(t)$ неравенств

$$np - t\sqrt{npq} < m < np + t\sqrt{npq},$$

равносильных неравенствам

$$-t\sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{m}{n} - p < t\sqrt{\frac{pq}{n}}. \quad (a)$$

Согласно теореме Муавра — Лапласа (5.26), вероятность $P(t)$ этих неравенств, при заданном t и беспредельном возрастании n , стремится к пределу

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt.$$

Но, как следует из (5.47), при достаточно большом значении t разность

$$1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$$

будет сколь угодно мала.

Поэтому, разбив число η на два положительных слагаемых η' и η'' , т. е. положив $\eta = \eta' + \eta''$ ($\eta' > 0$, $\eta'' > 0$), мы можем взять число t таким, чтобы было

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt = 1 - \eta', \quad (б)$$

и затем назначить число n_0 настолько большим, чтобы при всех значениях n , удовлетворяющих неравенству

$$n > n_0, \quad (\text{в})$$

разность

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt - P(t)$$

была по абсолютному значению меньше η'' :

$$\left| \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt - P(t) \right| < \eta''. \quad (\text{г})$$

Придав, таким образом, числу t определенное значение, установим, кроме неравенства (в), еще следующее неравенство:

$$n > \frac{pq t^2}{\epsilon^2}. \quad (5.50)$$

Тогда будем иметь $\epsilon > t \sqrt{pq/n}$, и, следовательно, вероятность неравенств

$$-\epsilon < \frac{m}{n} - p < \epsilon \quad (\text{д})$$

будет больше вероятности $P(t)$ неравенств (а), и поэтому все значения m , удовлетворяющие неравенствам (а), удовлетворяют и неравенствам (д).

Вероятность же $P(t)$ неравенств (а), на основании (б) и (г), больше $1 - \eta' - \eta'' = 1 - \eta$.

Следовательно, при всех значениях n , удовлетворяющих неравенствам (в) и (5.50),

$$P\left\{-\epsilon < \frac{m}{n} - p < \epsilon\right\} > 1 - \eta.$$

4. Таблица значений интеграла вероятностей. Таблица значений интеграла вероятностей приведена в конце книги (табл. VIII).

Ввиду того, что отклонения от среднего значения в (5.30) выражены в единицах основного отклонения, табл. VIII применима для всего семейства нормальных распределений.

На основании табл. VIII мы заключаем, что в случае нормального распределения случайной величины X

$$\left. \begin{aligned} P\{-\sigma < x - \bar{x} < +\sigma\} &= 0,683, \\ P\{-2\sigma < x - \bar{x} < +2\sigma\} &= 0,954, \\ P\{-3\sigma < x - \bar{x} < +3\sigma\} &= 0,997 \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

(ср. гл. III, § 1, п. 2).

Отсюда мы видим, что, хотя значения случайной величины, следующей нормальному распределению, могут изменяться неограниченно, однако в действительности почти все эти значения располагаются в пределах утроенного основного отклонения, откладываемого в положительном и отрицательном направлении от среднего значения.

Таким образом, в нормальном распределении размах распределения (3.11) приближенно равен шестикратному основному отклонению. Поэтому, принимая на основании (2.63) величину разряда равной половине основного отклонения, мы находим, что в нормальном распределении число разрядов равно 12. Этим числом разрядов и рекомендуется руководствоваться при сводке наблюдаемых значений случайных величин [см. (1.2)].

Наряду с таблицей интеграла вероятностей $\Phi(x)$ крайне важное значение имеет таблица значений интегральной функции нормального распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \quad (5.52)$$

Функция $F(x)$ выражает вероятность того, что значение случайной величины X , распределенной нормально, будет меньше назначенного значения x :

$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (5.53)$$

Функция $F(x)$ является положительной. Так как $F'(x) = f(x)$, а $f(x) > 0$ [см. (5.33)], то функция $F(x)$ монотонно возрастает на всем промежутке от $x = -\infty$, когда $F(x) = 0$, до $x = +\infty$, когда $F(x) = +1$. Действительно, полагая в (5.52) $x = +\infty$, т. е. расширяя интегрирование на все возможные значения t , получим, как следствие теоремы сложения вероятностей (4.9),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1. \quad (5.54)$$

Этот же результат получается непосредственно из (5.47).

Замечая, далее, что $F''(x) = f'(x)$, находим, что интегральная кривая, изображающая функцию $F(x)$, имеет точку перегиба при $x = 0$ (рис. 5.6).

Интеграл (5.52) дает значения площади нормальной кривой (5.27) на протяжении от $-\infty$ до x (рис. 5.7). Так как вся площадь нормальной кривой, как видно из (5.54), равна 1, то незаштрихованная площадь на рис. 5.7 равна $1 - F(x)$. Но ввиду симметричности нормальной кривой эта незаштрихованная площадь равна

$$\int_{-\infty}^{-x} e^{-t^2/2} dt = F(-x).$$

Таким образом,

$$F(-x) = 1 - F(x). \quad (5.55)$$

Поэтому для вычисления интеграла (5.52) достаточно иметь таблицу значений функции $F(x)$ лишь для $x \geq 0$ (табл. IX). Значения $F(x)$ для положительного аргумента даются таблицей непосредственно, например, $F(+1,15) = 0,87493$; для отрицательного же аргумента берется дополнение до 1, например, $F(-1,15) = 0,12507$.

Таблица значений интеграла вероятностей (табл. VIII) применяется при решении многих вопросов статистического исчисления.

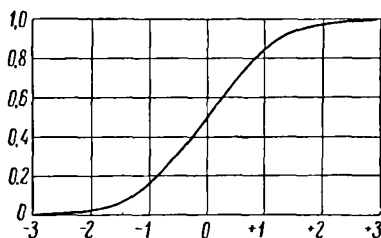


Рис. 5.6. Интегральная функция нормального распределения.

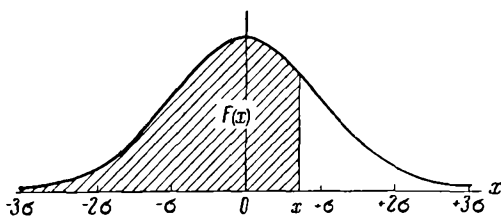


Рис. 5.7. Интеграл $F(x)$.

В частности, она может иметь большое значение в производственной технике. На основании этой таблицы можно, например, определить процент материала, не удовлетворяющего техническим условиям.

Пусть среднее значение некоторого свойства материала равно \bar{X} , а минимальное значение, допускаемое техническими условиями, равно X_h . Тогда отклонение браковочного предела, выраженное в единицах основного отклонения, будет

$$\xi_h = \frac{\bar{X} - X_h}{\bar{\sigma}}.$$

Предполагая, что распределение рассматриваемого свойства материала является нормальным, найдем по табл. VIII величину $Q(\xi_h) = 1 - \Phi(\xi_h)$. Разделив эту величину на 2 и выразив результат в процентах, получим искомый процент B материала, не удовлетворяющего техническим условиям по рассматриваемому свойству:

$$B = \frac{Q(\xi_h)}{2} \cdot 100\%. \quad (5.56)$$

Практически приведенная задача решается, разумеется, приближенно, так как \bar{X} и $\bar{\sigma}$ случайной величины обычно неизвестны и мы вынуждены заменять их средним значением и основным отклонением, вычисленными на основании частичных совокупностей.

Таблица значений интеграла вероятностей дает возможность вычислить в том же смысле приближенно вероятность того, что значение случайной величины X лежит в определенных пределах

$$P\{\xi_1 < \xi < \xi_2\} = 1 - [\Phi(\xi_1) + \Phi(\xi_2)]. \quad (5.57)$$

Здесь

$$\xi = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}, \quad \xi_1 = \frac{x_1 - \bar{X}}{\sigma}, \quad \xi_2 = \frac{x_2 - \bar{X}}{\sigma},$$

а x_1 и x_2 — пределы для X .

При помощи таблицы значений интеграла вероятностей можно решить также вопрос о критерии отбрасывания крайних значений.

Критерий, основанный на применении таблицы значений интеграла вероятностей, состоит в следующем. Предполагая, что распределение изучаемой величины является нормальным, определяют среднее значение и основное отклонение из наблюдаемой частичной совокупности. Взяв отношение разности между рассматриваемым крайним значением и найденным средним значением к основному отклонению, получают из таблицы значений интеграла вероятностей приближенную вероятность

$$Q = 1 - \Phi(x) \quad (5.58)$$

появления экземпляра совокупности с данным или же большим отклонением. Если эта вероятность окажется практически малой, то рассматриваемое крайнее значение может быть отброшено.

При помощи таблицы значений интеграла вероятностей составлена таблица достаточно больших чисел на основании формулы

$$n > \frac{pqx^2}{\epsilon^2}, \quad (5.59)$$

устанавливаемой при доказательстве теоремы Бернулли, данном Лапласом и Марковым (5.50). В этой формуле p и q — вероятности появления и не появления события при отдельном испытании, ϵ — допустимая ошибка; наконец, x — при той или иной вероятности предположения $P(x)$ — находится по таблице значений интеграла вероятностей.

При $p = q = 0,5$ формула (5.59) примет вид

$$n > \frac{x^2}{4\epsilon^2}. \quad (5.60)$$

Пусть, например, $p = q = 0,5$, $\epsilon = 0,05$, $P = 0,99$. Из таблицы значений интеграла вероятностей для $\Phi(x) = 0,99000$ находим $x = 2,5758$. Подставляя в (5.59), получим

$$n > \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot (2,5758)^2}{(0,05)^2} = 663,47;$$

следовательно, достаточно большое число, при указанных условиях, равно 663 (см. табл. I).

В случае, когда $p = q = 0,5$, произведение pq достигает своего наибольшего значения. Этому случаю соответствует мера изменчивости, равная 50%. Таблица достаточно больших чисел (табл. I) вычислена в предположении, что $p = q = 0,5$, и дает максимальный объем частичной совокупности. Когда мера изменчивости меньше 50%, объем частичной совокупности может быть значительно снижен и может быть определен по номограмме достаточно больших чисел (табл. II).

5. Моменты нормального распределения. При исследовании нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

[см. (5.28)] одной из наиболее важных задач является нахождение моментов этого распределения.

Так как в нормальном распределении значения переменной x представляют отклонения от среднего значения, то мы будем находить центральные моменты распределения

$$\mu_h = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^h e^{-x^2/2\sigma^2} dx. \quad (5.61)$$

Нулевой момент нормального распределения равен

$$\mu_0 = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx. \quad (5.62)$$

Так как, согласно (5.48),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \sigma \sqrt{2\pi},$$

то

$$\mu_0 = 1. \quad (5.63)$$

Первый центральный момент нормального распределения равен

$$\mu_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2\sigma^2} dx. \quad (5.64)$$

Имеем

$$\int x e^{-x^2/2\sigma^2} dx = -\sigma^2 \int d(e^{-x^2/2\sigma^2}) = -\sigma^2 e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Следовательно,

$$\mu_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} [-\sigma^2 e^{-x^2/2\sigma^2}]_{-\infty}^{\infty}.$$

Так как выражение, стоящее в скобках, равно нулю при верхнем и нижнем пределе, то

$$\mu_1 = 0. \quad (5.65)$$

Найдем теперь центральные моменты h -го порядка нормального распределения.

Интегрируя (5.61) по частям, полагая

$$u = x^{h-1}, \quad du = (h-1) x^{h-2} dx, \\ dv = x e^{-x^2/2\sigma^2} dx, \quad v = -\sigma^2 e^{-x^2/2\sigma^2},$$

имеем

$$\mu_h = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left\{ [-\sigma^2 x^{h-1} e^{-x^2/2\sigma^2}]_{-\infty}^{+\infty} + (h-1) \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^{h-2} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \right\}.$$

Так как показательная функция возрастает быстрее всякой степенной, то первый член правой части этого равенства исчезает, и мы получим

$$\mu_h = (h-1) \sigma^2 \mu_{h-2}. \quad (5.66)$$

Равенство (5.66) называется статистическим уравнением нормальной кривой.

Рассмотрим отдельно нечетные и четные центральные моменты.

Полагая в (5.61) $h = 2g + 1$, получим

$$\begin{aligned} \mu_{2g+1} &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2g+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 2g\sigma^2 \mu_{2g-1} = \\ &= 2g(2g-2)\sigma^4 \mu_{2g-3} = \dots = 2g(2g-2) \dots 4 \cdot 2\sigma^{2g} \mu_1 \end{aligned}$$

Но, как показано выше (5.65), $\mu_1 = 0$. Следовательно,

$$\mu_{2g+1} = 0 \quad (5.67)$$

при всех значениях $g = 0, 1, 2, \dots$

Полагая в (5.61) $h = 2g$, находим

$$\begin{aligned} \mu_{2g} &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2g} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = (2g-1) \sigma^2 \mu_{2g-2} = \\ &= (2g-1)(2g-3) \sigma^4 \mu_{2g-4} = \dots = (2g-1)(2g-3) \dots 3 \cdot 1 \sigma^{2g} \mu_0. \end{aligned}$$

Но, как показано выше (5.63), $\mu_0 = 1$. Следовательно,

$$\mu_{2g} = (2g-1)!! \sigma^{2g}, \quad (5.68)$$

или

$$\mu_{2g} = \frac{(2g)!}{2^g \cdot g!} \sigma^{2g} \quad (5.69)$$

при всех значениях $g = 0, 1, 2, \dots$

Равенство (5.69) показывает, что все моменты нормального распределения выражаются при помощи основного отклонения.

В частности,

$$\mu_2 = \sigma^2. \quad (5.70)$$

Введем нормированное значение $\xi = \frac{x}{\sigma}$. Тогда выражение (5.61) примет вид

$$p_h = \sigma^h \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^h e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi,$$

или

$$r_h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^h e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, \quad (5.71)$$

где $r_h = \frac{\mu_h}{\sigma^h}$ есть основной момент нормального распределения.

Принимая во внимание (5.67) — (5.69), найдем

$$r_{2g+1} = 0, \quad r_{2g} = (2g-1)!! = \frac{(2g)!}{2^g \cdot g!}. \quad (5.72)$$

Полагая в этих формулах $g = 0, 1, 2, \dots$, получим

$$\begin{aligned} r_1 &= r_3 = \dots = 0, \\ r_0 &= 1, \quad r_2 = 1, \quad r_4 = 3, \\ r_6 &= 15, \quad r_8 = 105, \quad r_{10} = 945, \\ r_{12} &= 10395, \quad r_{14} = 135135, \quad r_{16} = 2027025. \end{aligned}$$

Отсюда мы заключаем, что в нормальном распределении мера косости и мера крутости равны нулю:

$$\alpha = r_3 = 0, \quad \iota = r_4 - 3 = 0. \quad (5.73)$$

Равенство (5.73) служат критерием того, что исследуемый ряд распределения, полученный из наблюдений, представляет нормальное распределение случайной величины.

Найдем, наконец, нечетные моменты из абсолютных значений отклонений от среднего значения нормального распределения

$$\theta_{2g+1} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2g+1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (5.74)$$

В силу симметричности нормального распределения эти моменты можно представить в виде

$$\theta_{2g+1} = \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{2g+1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Для вычисления моментов θ_{2g+1} будем исходить из тождества

$$2 \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{a}. \quad (5.75)$$

Дифференцируя это тождество g раз по a , получим

$$(-1)^g \cdot 2 \int_0^{\infty} x^{2g+1} e^{-ax^2} dx = \frac{(-1)(-2) \dots (-g)}{a^{g+1}}.$$

Отсюда, принимая во внимание коэффициент $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$ в (5.74) и производя замену $a = \frac{1}{2\sigma^2}$, находим

$$\theta_{2g+1} = (2g)!! \sigma^{2g+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (5.76)$$

В частности,

$$\theta_1 = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (5.77)$$

6. Характеристические функции нормального распределения.

Кроме моментов, рассмотрим также характеристические функции и полуинварианты нормального распределения.

В нормальном распределении $f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$ [см. (5.29)] характеристическая функция равна

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz - z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(z - \frac{it}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4}} dz = \\ &= e^{-\frac{t^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(z - \frac{it}{2}\right)^2} dz. \end{aligned}$$

Полагая $z - \frac{it}{2} = u$ и, следовательно, $dz = du$ и принимая во внимание (5.46), находим

$$\varphi(t) = e^{-t^2/4} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = e^{-t^2/4} \quad (5.78)$$

В нормальном распределении $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}$ [см. (5.27)] характеристическая функция равна

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi - \frac{\xi^2}{2}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\xi - it)^2 - \frac{t^2}{2}} d\xi = e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (5.79)$$

Подобным же образом в нормальном распределении $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ [см. (5.28)] характеристическая функция равна

$$\Phi(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2}. \quad (5.80)$$

Переходя к общему случаю, заметим, что если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m_1 и μ_2 , то ее нормированное значение

$$\xi = \frac{X - m_1}{\sqrt{\mu_2}}$$

тоже имеет нормальное распределение с параметрами $r_1 = 0$ и $r_2 = 1$ [ср. (5.27)] и, следовательно, имеет характеристическую функцию

$$\Phi_\xi(t) = e^{-t^2/2}.$$

Поэтому сама случайная величина $X = \sqrt{\mu_2}\xi + m_1$, на основании первого свойства характеристических функций (4.118), имеет характеристическую функцию

$$\Phi_X(t) = \Phi_\xi(\sqrt{\mu_2}t) e^{im_1 t} = e^{-\frac{\mu_2 t^2}{2}} e^{im_1 t} = e^{im_1 t - \frac{\mu_2 t^2}{2}}.$$

Положим, далее, что

$$U = aX + b,$$

где a и b — постоянные, а X — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами m_1 и μ_2 . Тогда, на основании первого свойства характеристических функций,

$$\Phi_U(t) = \Phi_X(at) e^{ibt} = e^{i(am_1 + b)t - \frac{a^2 \mu_2 t^2}{2}}.$$

Таким образом, и величина U имеет нормальное распределение с параметрами $am_1 + b$ и $a^2 \mu_2$.

Положим, наконец, что имеется n независимых случайных величин x_h ($h = 1, n$), каждая из которых имеет нормальное распределение

$$f(x_h) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_h^2}{2\sigma_h^2}}. \quad (5.81)$$

Покажем, что, какими бы ни были числа a_h ($h = \overline{1, n}$), распределение величины

$$u = \sum_{h=1}^n a_h x_h \quad (5.82)$$

будет нормальным с дисперсией

$$\sigma^2 = \sum_{h=1}^n a_h^2 \sigma_h^2. \quad (5.83)$$

Так как, по условию, случайные величины x_h имеют нормальное распределение, то характеристические функции этих величин, на основании (5.80), будут равны

$$\varphi_{x_h}(t) = e^{-t^2 \sigma_h^2 / 2}.$$

Найдем теперь характеристическую функцию величины (5.82). На основании второго свойства характеристических функций (4.122) имеем

$$\varphi_u(t) = \prod_{h=1}^n e^{-\frac{a_h^2 t^2 \sigma_h^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2} \sum_{h=1}^n a_h^2 \sigma_h^2}. \quad (5.84)$$

Отсюда, принимая во внимание (5.80), мы заключаем, что величина (5.82) имеет нормальное распределение с дисперсией (5.83).

В частности, полагая в (5.84) $a_h = 1$ ($h = \overline{1, n}$), находим, что сумма независимых случайных величин, распределенных нормально, имеет нормальное распределение с дисперсией, равной сумме дисперсий этих величин.

Полагая в (5.84)

$$a_h = \frac{1}{n}, \quad \sigma_h = \sigma \quad (h = \overline{1, n}),$$

находим, что среднее значение n независимых случайных величин, распределенных нормально, с одной и той же дисперсией σ^2 , имеет нормальное распределение с дисперсией

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (5.85)$$

Формула (5.85) показывает, что если из нормально распределенной совокупности значений случайной величины путем n -кратного независимого выбора возьмем частичные совокупности объема n , то средние значения этих совокупностей будут тоже распределены нормально с тем же самым средним значением, но с меньшей дисперсией.

Это положение можно видеть на рис. 5.8, на котором изображено распределение средних значений в частичных совокупностях объема $n = 4$ и $n = 16$ сравнительно с распределением самой случайной величины ($n = 1$).

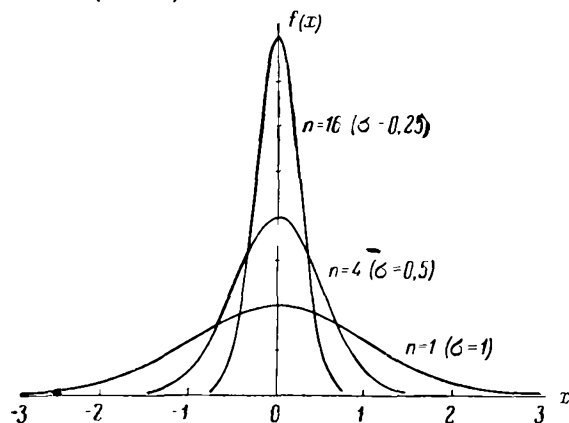


Рис. 5.8. Распределение средних значений в частичных совокупностях различного объема.

Рассмотрим, например, средние значения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели в частичных совокупностях объема $n = 5$, найденные на основании данных табл. 1.2 (табл. 5.2).

Т а б л и ц а 5.2

Средние значения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели в частичных совокупностях объема

$n = 5$ ($E \cdot 10^{-3}$)

| | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 130,72 | 120,12 | 122,38 | 135,76 | 118,00 | 131,38 | 112,14 | 133,62 |
| 130,92 | 129,00 | 122,62 | 120,78 | 120,20 | 130,64 | 129,42 | 117,46 |
| 122,40 | 132,78 | 108,12 | 130,34 | 156,50 | 118,20 | 135,72 | 144,26 |
| 138,88 | 124,96 | 127,20 | 129,88 | 121,08 | 139,12 | 127,42 | 126,50 |
| 119,80 | 117,10 | 132,34 | 123,84 | 119,18 | 141,44 | 132,42 | 141,88 |
| 130,48 | 127,68 | 131,88 | 125,32 | 138,56 | 120,10 | 115,42 | 135,96 |
| 126,92 | 140,50 | 103,96 | 136,56 | 135,00 | 139,36 | 124,40 | 141,06 |
| 131,16 | 132,26 | 134,26 | 129,98 | 112,52 | 140,02 | 130,38 | 120,24 |
| 132,44 | 113,40 | 129,46 | 132,18 | 118,56 | 132,82 | 130,02 | 123,18 |
| 139,14 | 130,22 | 129,10 | 128,04 | 125,88 | 137,30 | 144,78 | 125,62 |

Составив ряд распределения этих средних значений, сравним его с рядом распределения отдельных значений модуля упругости (табл. 5.3, в которой частоты рассматриваемых рядов выражены в %).

Средние значения этих рядов практически равны между собой, а дисперсия ряда средних значений приблизительно в пять раз меньше дисперсии ряда отдельных значений (рис. 5.9).

При помощи характеристической функции нормального распределения $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$ можно найти моменты этого распределения.

Таблица 5.3

Распределение модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели: (1) отдельные значения, (2) средние значения в частичных совокупностях объема $n = 5$ (в $\text{°}/_{00}$)

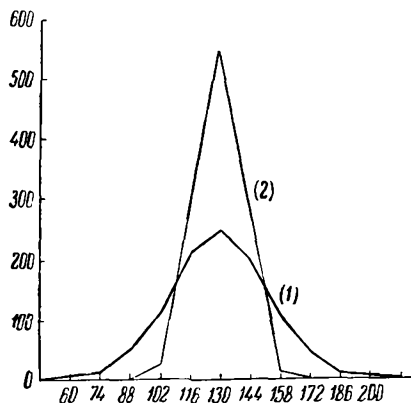


Рис. 5.9. Распределение модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели: (1) отдельные значения, (2) средние значения в частичных совокупностях объема $n = 5$ (в $\text{°}/_{00}$).

| $E \cdot 10^{-3}$ | (1) | (2) |
|-------------------|---------|---------|
| 60 | 5 | — |
| 74 | 12 | — |
| 88 | 50 | — |
| 102 | 110 | 25 |
| 116 | 218 | 238 |
| 130 | 250 | 550 |
| 144 | 198 | 175 |
| 158 | 105 | 12 |
| 172 | 40 | — |
| 186 | 10 | — |
| 200 | 2 | — |
| n | 1000 | 1000 |
| \bar{X} | 128,838 | 128,754 |
| σ | 2,6257 | 0,5531 |

Применяя теорему Лейбница о производных произведения, имеем

$$\varphi^{(h)}(t) = \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(h)} = \left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(h-1)} = -t \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(h-1)} - (h-1) \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(h-2)}.$$

Полагая здесь $t = 0$, получим

$$\varphi^{(h)}(0) = -(h-1) \varphi^{(h-2)}(0),$$

или

$$\varphi^{(h)}(0) = i^2 (h-1) \varphi^{(h-2)}(0).$$

Разделив на i^h , находим

$$\frac{\varphi^{(h)}(0)}{i^h} = (h-1) \frac{\varphi^{(h-2)}(0)}{i^{h-2}},$$

или, на основании формулы для определения моментов при помощи характеристической функции (4.126),

$$r_h = (h-1) \bar{r}_{h-2}. \quad (5.86)$$

Следовательно,

$$r_{2g+1} = 0, \quad r_{2g} = \frac{(2g)!}{2^g \cdot g!}$$

[(см. 5.72)].

Найдем теперь полуинварианты λ_g нормального распределения. Логарифмируя (5.79), имеем

$$\psi(t) = \ln \varphi(t) = -\frac{t^2}{2}, \quad (5.87)$$

откуда [см. (4.129)] находим

$$\lambda_g = \frac{1}{i^g} \left(-\frac{t^2}{2} \right)^{(g)} \Big|_{t=0}. \quad (5.88)$$

В частности,

$$\lambda_1 = \frac{1}{i} (-t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{i^2} (-1) = 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \dots = 0.$$

Таким образом, полуинварианты нормального распределения, начиная с третьего, равны нулю.

Зная характеристическую функцию (5.79), мы можем, на основании формулы обращения Фурье (4.134), найти функцию распределения. Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+ix)^2/2} e^{(ix)^2/2} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+ix)^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \end{aligned}$$

что представляет нормальное распределение с основным отклонением, равным единице (5.27).

7. Теорема Ляпунова. Общие условия, при которых распределение суммы случайных величин имеет пределом нормальное распределение, указываются теоремой Ляпунова.

Теорема Ляпунова утверждает, что *если значения независимых случайных величин будут малы в сравнении с их суммой, то при неограниченном возрастании числа этих величин распределение их суммы становится приближенно нормальным.*

При доказательстве теоремы Ляпунова применяется метод характеристических функций. Установив, что характеристическая функция суммы неограниченно возрастающего числа независимых случайных величин сходится к характеристической функции

нормального распределения, мы на основании теоремы Леви — Крамера (4.135) заключаем, что и распределение суммы рассматриваемых случайных величин сходится к нормальному распределению.

Теорема Ляпунова доказана при весьма общих условиях, какими бы ни были распределения случайных величин.

Мы рассмотрим простейший случай теоремы Ляпунова для одинаково распределенных случайных величин:

Если n независимых случайных величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (5.89)$$

имеют одно и то же распределение с математическим ожиданием m_1 и дисперсией σ^2 , то при неограниченном возрастании числа n этих величин распределение суммы

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (5.90)$$

сходится к нормальному распределению.

Теорема будет доказана, если мы установим, что при неограниченном возрастании числа n случайных величин характеристическая функция отношения

$$u = \frac{s_n}{\sigma_{s_n}} \quad (5.91)$$

сходится к характеристической функции нормированного нормального распределения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_u(t) = e^{-t^2/2}. \quad (5.92)$$

Для доказательства теоремы заметим, что одинаково распределенные случайные величины (5.89) имеют одну и ту же плотность $f(x)$ и, следовательно, одну и ту же характеристическую функцию

$$\varphi_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx. \quad (5.93)$$

Характеристическая функция суммы (5.90), на основании (4.120), будет равна

$$\varphi_{s_n}(t) = [\varphi_x(t)]^n.$$

Наконец, принимая во внимание, что на основании (4.98) для одинаково распределенных случайных величин $\sigma_{s_n}^2 = n\sigma^2$ и, следовательно, $\sigma_{s_n} = \sigma\sqrt{n}$, находим, что, согласно (4.119),

$$\varphi_u(t) = \varphi_{s_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

т. е.,

$$\varphi_u(t) = \left[\varphi_x\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n. \quad (5.94)$$

Характеристическую функцию $\varphi_x(t)$ можно, при малых значениях t , разложить в ряд

$$\varphi_x(t) = \varphi_x(0) + \varphi'_x(0)t + \left[\frac{\varphi''_x(0)}{2} + \varepsilon(t) \right] t^2, \quad (5.95)$$

где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Для определения $\varphi_x(0)$, $\varphi'_x(0)$, $\varphi''_x(0)$ положим $t = 0$ в функции $\varphi_x(t)$ и ее производных.

Имеем [см. (5.93)]

$$\varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Дифференцируя (5.93) по t , находим

$$\varphi'_x(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} f(x) dx,$$

откуда

$$\varphi'_x(0) = i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = im_1;$$

не нарушая общности, можно начало координат перенести в точку m_1 , т. е. положить $m_1 = 0$; тогда

$$\varphi'_x(0) = 0.$$

Дифференцируя (5.93) еще раз, находим

$$\varphi''_x(t) = i^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{itx} f(x) dx,$$

откуда

$$\varphi''_x(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx;$$

при $m_1 = 0$ будем иметь

$$\varphi''_x(0) = -\sigma^2.$$

Подставляя в (5.95)

$$\varphi_x(0) = 1, \quad \varphi'_x(0) = 0, \quad \varphi''_x(0) = -\sigma^2,$$

получим

$$\varphi_x(t) = 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \varepsilon(t) \right] t^2 \quad (5.96)$$

и, следовательно,

$$\Phi_u(t) = \left\{ 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \varepsilon \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) \right] \frac{t^2}{n\sigma^2} \right\}^n. \quad (5.97)$$

Логарифмируя (5.97), находим

$$\ln \Phi_u(t) = n \ln \left\{ 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \varepsilon \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) \right] \frac{t^2}{n\sigma^2} \right\},$$

или $\ln \Phi_u(t) = n \ln(1 - h)$, где

$$h = \left[\frac{\sigma^2}{2} - \varepsilon \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) \right] \frac{t^2}{n\sigma^2}. \quad (5.98)$$

При $n \rightarrow \infty$ величина h , согласно (5.98), стремится к нулю, и следовательно, при достаточно большом n величина h будет весьма малой. Поэтому, применяя (5.23), получим $\ln(1 - h) = -h - \rho$, где $n\rho \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \Phi_u(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(-h) - n\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{t^2}{2} + \varepsilon \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) \frac{t^2}{\sigma^2} \right\} - n\rho = \\ &= -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{\sigma^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) = 0$. Следовательно,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \Phi_u(t) = -t^2/2$, откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_u(t) = e^{-t^2/2},$$

т. е. мы получили характеристическую функцию нормированного нормального распределения [см. (5.79)]. Отсюда, на основании (4.135), следует, что и распределение величины u , а значит, и распределение связанной с u линейной зависимостью (5.91) суммы s_n , сходится к нормальному распределению.

8. Объяснение нормального распределения. Условия теоремы Ляпунова являются настолько широкими, что во многих случаях их можно предполагать выполняющимися. Поэтому, когда есть основание рассматривать изучаемую случайную величину как сумму многих независимых случайных величин, влияние каждой из которых на эту сумму практически ничтожно, то, если даже распределения составляющих величин нам неизвестны, можно заранее быть уверенным, что изучаемая случайная величина имеет нормальное распределение.

Благодаря этому становится ясным, что, например, распределение случайных ошибок при измерениях будет нормальным. Точно так же нормальным будет распределение физических признаков людей, распределение механических свойств материалов и т. д.

Этот вывод полностью подтверждается многочисленными исследованиями.

Таким образом, теорема Ляпунова дает объяснение тому важному положению, что во многих случаях величины имеют нормальное распределение.

Причину такого соответствия нормальной кривой полученным при наблюдении рядом распределения можно видеть в выполнении тех самых условий, на основании которых выводится уравнение нормальной кривой. Можно предположить, что отдельные наблюдаемые значения являются результатом бесчисленного множества весьма незначительных независимых между собой причин, каждая из которых может произвести очень малое положительное или отрицательное отклонение от среднего значения исследуемой величины.

Для наглядного выяснения тех условий, при которых возникает нормальное распределение, построен прибор Гальтона. Этот прибор представляет ящик, изображенный на рис. 5.10. Вверху прибора устроено отверстие в виде воронки, которое ведет в узкое пространство между доской и стеклом. Внизу прибора помещены перегородки, образующие несколько отделений. Все пространство между воронкой и отделениями занято рядом игл, расположенных в шахматном порядке.

Если прибор поставить в наклонном положении и сыпать в воронку мелкую дробь, то иглы будут делить эту дробь на отдельные потоки. Вследствие этого дробинки расположатся не равномерно, а образуют в своей совокупности нормальную кривую.

Рассматриваемый прибор ясно показывает то действие, какое оказывает множественность причин на возникновение явления. В самом деле, при отсутствии игл в приборе весь поток дробы шел бы без отклонений вниз, и в результате дробь скопилась бы между двумя-тремя соседними вертикальными полосками против отверстия воронки. Однако препятствия в виде игл отклоняют дробинки в разные стороны, причем для большей части дробинки эти отклонения взаимно уравниваются, и все распределение принимает характерный вид: в отделении против воронки скопляется наибольшее

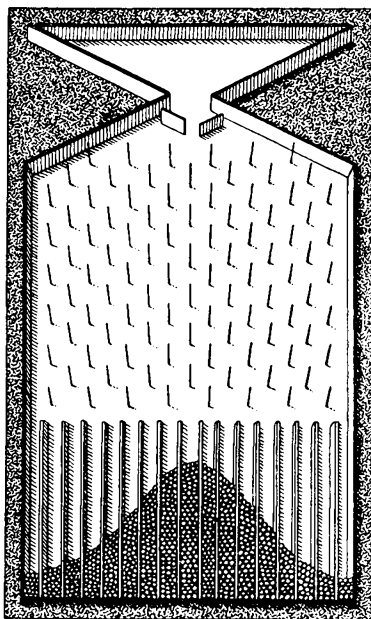


Рис. 5.10. Прибор Гальтона.

шее количество дробы, а в остальных отделениях будет дробы тем меньше, чем дальше они отстоят от среднего отделения, так как для того, чтобы отклониться от него далеко, необходимо встретить много односторонних препятствий, а это случается только с небольшим числом дробин.

Картина распределения, подобная описанной выше, наблюдается при изучении случайных величин, взятых из любой области.

Например, в процессе массового производства в какой-либо отрасли промышленности изготавливается большое количество одинаковых экземпляров того или иного изделия. Так как при производстве устанавливаются определенные технические нормы, то в случае контролируемого, т. е. правильно поставленного производственного процесса, отдельные экземпляры изделия могут по некоторым признакам отклоняться от нормы только в силу случайных причин. Каждая из таких причин производит лишь незначительное действие, однако в общей сложности может получиться заметное случайное отклонение от нормы. Таким образом, здесь имеются условия, приводящие к нормальному распределению исследуемого количественного признака данного изделия.

Подобным же образом распределение различных механических свойств материалов очень близко подходит к нормальному распределению. Объясняется это тем, что на механические свойства материалов опять-таки оказывают влияние многочисленные и независимые между собой причины, совокупное действие которых приводит к нормальному распределению.

Таким образом, в множественности причин находит объяснение общее и наиболее характерное свойство явлений — изменчивость, выражаемая рядом распределения случайной величины (1.4).

Заметим при этом, что характер распределения случайных величин не остается всегда одним и тем же, а изменяется в зависимости от изменения условий. Так, в производственной технике изменчивость тех или иных свойств выпускаемого изделия зависит от условий производства, норм, технических допусков, требований технического контроля и т. д. (ср. гл. III, § 1, пп. 2 и 3).

9. Основные ошибки. Из теоремы Ляпунова следует важный случай: распределение среднего значения, полученного из независимых испытаний, относительно одной и той же случайной величины всегда стремится к нормальному распределению со средним значением, равным среднему значению случайной величины, и основным отклонением $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, каким бы ни было распределение

самой случайной величины, лишь бы это распределение имело конечную, отличную от нуля, дисперсию.

Это положение можно рассматривать как обоснование обычного способа, применяющегося при исследованиях, когда при измерении некоторой величины в качестве ее действительного значения бе-

рется среднее значение из значений, полученных при измерениях. При этом необходимо только, чтобы измерения были произведены достаточно тщательно с соблюдением одинаковых условий и устранением систематических ошибок измерения.

Ряд исследований показывает также, что в случае нормального распределения рассматриваемых случайных величин многие статистики с увеличением объема частичных совокупностей тоже имеют или нормальное распределение, или приближенно нормальное.

Основное отклонение распределения той или иной статистики называется *основной ошибкой* этой статистики.

Так как нормальное распределение случайной величины в виде (5.28) вполне определяется ее основным отклонением, то для оценки параметров на основании статистик достаточно знать основные ошибки этих статистик. Основная ошибка статистики указывает (приближенно, если распределение не нормально) те границы, которые с вероятностью 0,683 заключают неизвестное значение соответствующего параметра [см. (5.51)].

Приведем формулы основных ошибок.

Основная ошибка частоты равна

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}}; \quad (5.99)$$

при этом предполагается, что при каждом из n независимых испытаний вероятность появления исследуемого признака остается постоянной, равной p . Это будет в том случае, когда при составлении частичной совокупности каждый экземпляр, взятый из общей совокупности, возвращается в нее обратно до следующего испытания.

Основная ошибка разности между двумя частотами равна

$$\sigma_{p'_1 - p'_2} = \sqrt{pq \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}, \quad (5.100)$$

где p'_1 — частота появления признака в частичной совокупности объема n_1 , взятой из первой общей совокупности; p'_2 — частота появления признака в частичной совокупности объема n_2 , взятой из второй общей совокупности; вероятность p признака не изменяется от испытания к испытанию, и последние независимы; наконец, так как p обычно неизвестно, то можно положить

$$p = \frac{n_1 p'_1 + n_2 p'_2}{n_1 + n_2}.$$

Если $|p'_1 - p'_2| > 2\sigma_{p'_1 - p'_2}$, вероятность чего при больших n_1 и n_2 приближенно равна 0,05, то расхождение между частотами p'_1 и p'_2 признается существенным.

Основные ошибки статистик равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\bar{X}} &= \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}, & \sigma_{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}, & [\text{ср. (5.85)}], \\ \sigma_v &= \frac{v}{\sqrt{2n}} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{v}{100} \right)^2 \right\}^{1/2}, \\ \sigma_a &= \sqrt{\frac{6}{n}}, & \sigma_t &= 2\sigma_{\sigma}, & \sigma_r &= \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}, & \sigma_{\eta} &= \frac{1-\eta^2}{\sqrt{n}} \end{aligned} \right\} \quad (5.101)$$

Отметим, что почти все эти равенства являются приближенными, тем более, что при вычислении приходится пользоваться статистиками, найденными на основании наблюдаемых частичных совокупностей.

При вычислениях каждая статистика должна сопровождаться соответствующей основной ошибкой. Например, среднее значение предела прочности при разрыве осевой стали (гл. II, § 1, п. 3) равно

$$\bar{X} = 56,048 \pm 0,098 \text{ кг/мм}^2;$$

коэффициент корреляции между объемным весом при влажности 10% и модулем упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели (гл. III, § 2, п. 1) равен

$$r = +0,880 \pm 0,011.$$

Как видно из формул (5.101), основные ошибки статистик обратно пропорциональны квадратному корню из числа наблюдений, или объема частичной совокупности. Отсюда становится ясным, насколько важное значение при исследованиях имеет большое число наблюдений. При числе наблюдений достаточно большом основная ошибка становится настолько малой, что разность между статистиками и параметрами может не приниматься во внимание. В этих случаях статистики, вычисленные на основании частичных совокупностей, могут быть подставлены вместо параметров общих совокупностей.

Процентное отношение основной ошибки среднего значения к среднему значению выражает точность определения среднего значения и называется *показателем точности исследования*. Показатель точности исследования равен допустимой ошибке, выраженной в процентах, и обозначается буквой ϵ (см. гл. I, § 1, п. 2). Таким образом,

$$\epsilon = \frac{\bar{\sigma}_{\bar{X}}}{\bar{X}} \cdot 100\%. \quad (5.102)$$

Если известно значение меры изменчивости v , то показатель точности исследования вычисляется по формуле

$$\epsilon = \frac{v}{\sqrt{n}}. \quad (5.103)$$

Чем точнее произведено исследование, тем меньше будет показатель ϵ . Например, показатель точности исследования модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели равен

$$\epsilon = 1134/128852\% = 0,88\%.$$

В зависимости от природы изучаемого явления показатель точности исследования считается достаточным, если он не превышает 3—5%.

Из формулы (5.103) можно найти число n наблюдений, достаточно большое для того, чтобы с определенной степенью уверенности, равной вероятности $P(x)$, получить на основании частичной совокупности среднее значение, отклоняющееся от среднего значения общей совокупности не более чем на $\pm\epsilon$.

Непосредственно из (5.103) имеем

$$n = \frac{v^2}{\epsilon^2}. \quad (5.104)$$

Применяя эту формулу, при составлении которой использована основная ошибка с коэффициентом 1, мы будем иметь степень уверенности $P(1) = 0,683$. В общем же случае, при любой вероятности $P(x)$, достаточно большое число наблюдений определяется по формуле

$$n = \frac{(xv)^2}{\epsilon^2} \quad (5.105)$$

[ср. (5.59)], в которой коэффициент x для данной вероятности $P(x)$ находится из табл. VIII. Например, для $P(x) = 0,95$ имеем $x = 1,960$; для $P(x) = 0,99$ получим $x = 2,576$.

Таким образом, зная меру изменчивости и задаваясь определенной степенью уверенности и определенным показателем точности исследования, мы можем рассчитать достаточно большое число наблюдений.

При научных исследованиях степень уверенности $P(x)$ принимается обычно равной 0,95. Следовательно, число наблюдений при $P(x) = 0,95$ будет

$$n = \frac{(1,960v)^2}{\epsilon^2} = \frac{3,84v^2}{\epsilon^2}. \quad (5.106)$$

Например, если $v = 8\%$ и $\epsilon = 3\%$, то $n = 3,84 \cdot 64/9 = 27$. При $v = 16\%$ и $\epsilon = 5\%$ получим $n = 3,84 \cdot 256/25 = 39$. Эти же числа были найдены по номограмме достаточно больших чисел при $P(x) = 0,95$ (см. гл. I, § 1, п. 2).

Достаточно большое число наблюдений при $P(x) = 0,99$ равно

$$n = \frac{(2,576v)^2}{\epsilon^2} = \frac{6,63v^2}{\epsilon^2} \quad (5.107)$$

Таким образом, увеличение степени уверенности с 0,95 до 0,99 приводит к увеличению достаточно большого числа наблюдений в 1,73 раза.

Вычисление основных ошибок статистик имеет большое значение при *сравнении рядов распределения*. Если, например, известны средние значения и их основные ошибки для двух сравниваемых рядов распределения, то, найдя разность между этими средними значениями и вычислив основную ошибку этой разности, мы можем установить, взяты ли две сравниваемые частичные совокупности из одной общей совокупности или же из разных общих совокупностей. Другими словами, мы можем выяснить *однородность* изучаемых частичных совокупностей.

Основная ошибка разности средних значений $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ в случае двух серий независимых испытаний относительно одной и той же случайной величины равна квадратному корню из суммы квадратов основных ошибок этих средних значений:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2}. \quad (5.108)$$

Если

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > 2\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}, \quad (5.109)$$

то различие между средними значениями признается существенным.

10. Вычисление выравнивающих частот. Переходя к вычислению выравнивающих частот нормального распределения, мы прежде всего должны убедиться, что рассматриваемый ряд распределения является нормальным.

Критерий нормальности распределения состоит в том, что мера косости и мера крутости в этом ряде равны нулю:

$$\alpha = \tau = 0$$

[см. (5.73)].

Таким образом, если мера косости и мера крутости данного распределения будут лежать в пределах своих двукратных основных ошибок, то данное распределение можно считать нормальным.

Имеется несколько способов вычисления выравнивающих частот нормального распределения. Мы рассмотрим здесь вычисление частот при помощи таблиц значений нормальной функции плотности $f(x)$ (табл. VI) и функции $f^*(x)$ (табл. VII).

Остановимся сначала на вычислении выравнивающих частот \tilde{n}_j при помощи таблицы значений $f(x)$.

Формула для вычисления частот \tilde{n}_j получается путем умножения функций (5.28) на объем ряда распределения n :

$$\tilde{n}_j = \frac{n}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}. \quad (5.110)$$

Вычислим, например, выравнивающие частоты для ряда распределения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели (табл. 1.16).

Для этого ряда

$$m_1 = +0,0825, \quad \sigma = 1,6204.$$

Кроме того,

$$\alpha = -0,138 \pm 0,122, \quad \iota = +0,116 \pm 0,244,$$

т. е. выполнены условия нормальности распределения.

Вычисление выравнивающих частот при помощи табл. VI предполагается по схеме табл. 5.4.

Таблица 5.4

Схема вычисления выравнивающих частот при помощи таблицы значений нормальной функции плотности (для ряда распределения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели)

| $X_{(j)}$ | n_j | $x' - m_1$ | $x = \frac{x' - m_1}{\sigma}$ | $f(x)$ | $\lg f(x)$ | $\lg \bar{n}_j = \lg f(x) + \lg n - \lg \sigma$ | \bar{n}_j |
|-----------|-------|------------|-------------------------------|---------|------------|---|-------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| 46 | — | -5,9175 | -3,652 | 0,00051 | 4,70757 | 1,10001 | 0,1 |
| 60 | 2 | -4,9175 | -3,035 | 0,00399 | 3,60097 | 1,99341 | 1,0 |
| 74 | 5 | -3,9175 | -2,418 | 0,02144 | 2,33122 | 0,72366 | 5,3 |
| 88 | 20 | -2,9175 | -1,800 | 0,07895 | 2,89735 | 1,28979 | 19,5 |
| 102 | 44 | -1,9175 | -1,183 | 0,19816 | 1,29702 | 1,68946 | 48,9 |
| 116 | 87 | -0,9175 | -0,568 | 0,33990 | 1,53135 | 1,92379 | 83,9 |
| 130 | 100 | +0,0825 | +0,051 | 0,39842 | 1,60034 | 1,99278 | 98,4 |
| 144 | 79 | +1,0825 | +0,668 | 0,31916 | 1,50401 | 1,89645 | 78,8 |
| 158 | 42 | +2,0825 | +1,285 | 0,17472 | 1,24234 | 1,63478 | 43,1 |
| 172 | 16 | +3,0825 | +1,902 | 0,06537 | 2,81538 | 1,20782 | 16,1 |
| 186 | 4 | +4,0825 | +2,519 | 0,01671 | 2,22298 | 0,61542 | 4,1 |
| 200 | 1 | +5,0825 | +3,137 | 0,00291 | 3,46389 | 1,85633 | 0,7 |
| 214 | — | +6,0825 | +3,754 | 0,00035 | 4,54407 | 2,93651 | 0,1 |
| Σ | 400 | — | — | 1,62059 | — | — | 400,0 |

В столбце (1) этой схемы помещаются разрядные значения измеряемой величины — модуля упругости $X(E \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^2)$; в столбце (2) — наблюдаемые частоты n_j ; в столбце (3) — отклонения каждого значения ряда распределения от среднего значения (в единицах разряда) или равные им разности $x' - m_1$ [см. (2.50)]; в столбце (4) — нормированные значения $x = \frac{x' - m_1}{\sigma}$; в столбце (5) выписываются значения $f(x)$ из табл. VI; сумма этих чисел

должна быть приближенно равной σ ; в столбце (6) — логарифмы этих чисел, $\lg f(x)$; в столбце (7) — логарифмы выравнивающих частот $\lg \tilde{n}_j$, для этого к $\lg f(x)$ прибавляется разность между $\lg n$ и $\lg \sigma$ ($\lg n - \lg \sigma = 2,60206 - 0,20962 = 2,39244$); наконец, в столбце (8) выписываются выравнивающие частоты \tilde{n}_j , найденные по логарифмам предыдущего столбца. Сумма выравнивающих частот должна с принятой точностью совпадать с суммой наблюдаемых частот.

При употреблении таблицы значений нормальной функции плотности распределения применяется линейное интерполирование.

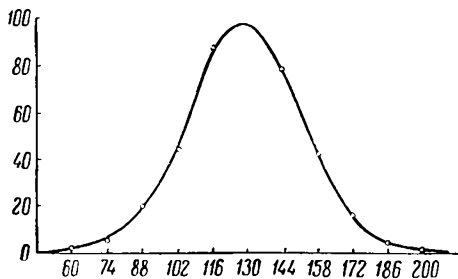
Линейное интерполирование применяется в тех случаях, когда разности между двумя последовательными значениями функции на некотором участке таблицы являются практически постоянными.

Формула линейного интерполирования в промежутке от x_0 до x_1 имеет вид

$$f_u = f_0 + u \cdot \Delta f_0, \quad (5.111)$$

где u — доля промежутка, на которую выполняется интерполирование, f_u — искомое значение функции $f(x)$ для аргумента $x = x_0 + u$, $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, $\Delta f_0 = f_1 - f_0$.

Рис. 5.11. Распределение модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели.



Произведение $u \cdot \Delta f_0$ называется пропорциональной частью. Пропорциональные части приводятся в большинстве вычислительных таблиц.

Определим, например, $f(-1,183)$ по табл. VI. Не обращая внимания на знак аргумента, так как функция плотности является четной (5.34), найдем $f(1,183)$.

Применяя формулу (5.111), получим из табл. VI:

$$f_0 = f(1,18) = 0,19886, \quad \Delta f_0 = -0,00234,$$

$$f_1 = f(1,19) = 0,19652, \quad u = 0,3.$$

Следовательно,

$$f(-1,183) = 0,19886 - 0,3 \cdot 0,00234 = 0,19886 - 0,00070 = 0,19816.$$

То же самое значение получаем непосредственно из шестизначной таблицы $f(x)$.

Представив выравнивающие и наблюдаемые частоты на чертеже (рис. 5.11), мы видим, что кружки, изображающие наблюдаемые частоты, очень близко располагаются около выравнивающей кривой.

Таблица 5.5

Вычисление выравнивающих частот при помощи таблицы значений $f^*(x)$
(для ряда распределения объемного веса при влажности 10%
древесины резонансовой ели)

| $X(j)$ | n_j | $x' - m_1$ | $x = \frac{x' - m_1}{\sigma}$ | $f^*(x)$ | $\tilde{n}_j = \tilde{n}_0 \cdot f^*(x)$ |
|----------|-------|------------|-------------------------------|----------|--|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 265 | — | —6,335 | —3,473 | 0,00240 | 0,2 |
| 295 | — | —5,335 | —2,925 | 0,01387 | 1,2 |
| 325 | 6 | —4,335 | —2,377 | 0,05930 | 5,2 |
| 355 | 18 | —3,335 | —1,828 | 0,18810 | 16,5 |
| 385 | 37 | —2,335 | —1,280 | 0,44078 | 38,6 |
| 415 | 68 | —1,335 | —0,732 | 0,76498 | 66,9 |
| 445 | 90 | —0,335 | —0,184 | 0,98321 | 86,0 |
| 475 | 79 | +0,665 | +0,365 | 0,93556 | 81,9 |
| 505 | 54 | +1,665 | +0,913 | 0,65916 | 57,8 |
| 535 | 31 | +2,665 | +1,461 | 0,34395 | 30,1 |
| 565 | 12 | +3,665 | +2,009 | 0,13192 | 11,6 |
| 595 | 4 | +4,665 | +2,558 | 0,03794 | 3,3 |
| 625 | 1 | +5,665 | +3,106 | 0,00804 | 0,7 |
| Σ | 400 | — | — | 4,57121 | 400,0 |

Особенно удобным является вычисление выравнивающих частот нормального распределения при помощи таблицы значений $f^*(x)$ (табл. VII).

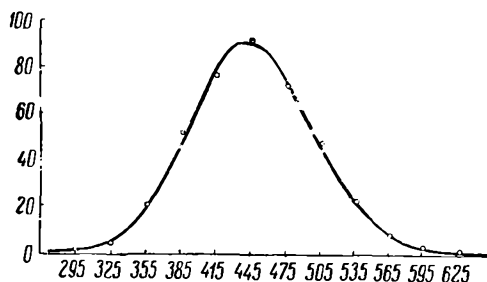


Рис. 5.12. Распределение объемного веса при влажности 10% древесины резонансовой ели.

В этом случае, найдя нормированные значения случайной величины, выписывают соответствующие значения $f^*(x)$ из табл. VII. Умножая затем значения $f^*(x)$ на число

$$\tilde{n}_0 = \frac{n}{\sigma \sqrt{2\pi}} \quad (5.112)$$

[см. (5.110)], получают искомые частоты \tilde{n}_j .

Вычисления располагаются по схеме табл. 5.5. Пример — ряд распределения объемного веса при влажности 10% древесины резонансовой ели (табл. 1.16). Для этого ряда

$$m_1 = +0,335, \quad \sigma = 1,824, \\ \alpha = -0,036 \pm 0,123, \quad \tau = +0,113 \pm 0,246,$$

$$\tilde{n}_0 = \frac{400}{1,824 \cdot 2,5066} = \frac{400}{4,572} = 87,5.$$

Для проверки вычислений заметим, что сумма чисел столбца (5) должна равняться $\sigma \sqrt{2\pi}$ (в рассматриваемом примере $\sigma \sqrt{2\pi} = 1,824 \cdot 2,5066 = 4,572$), а сумма чисел столбца (6) должна с принятой точностью равняться сумме чисел столбца (2).

Наблюдаемые и выравнивающие частоты представлены на рис. 5.12 *).

§ 3. Распределение Пуассона

1. Распределение Пуассона. Применение нормального распределения при изучении рядов распределения случайной величины не охватывает всего многообразия видов распределения. Причина этого кроется в том ограничении, которое было сделано при выводе уравнения нормального распределения.

Нормальное распределение представляет предел биномиального распределения $(p + q)^n$, когда число испытаний n увеличивается бесконечно, причем ни одна из вероятностей p и q не очень мала.

Рассмотрим теперь предельный случай независимых испытаний, когда испытания производятся сериями длины n (n -я серия состоит, следовательно, из n независимых испытаний), а вероятность $p^{(n)}$ некоторого события для всех испытаний n -й серии одна и та же, но с увеличением n стремится к нулю так, что произведение $np^{(n)}$ сохраняет постоянное значение λ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np^{(n)} = \lambda, \quad (5.113)$$

причем очевидно, что

$$\lambda > 0. \quad (5.114)$$

В таком случае в пределе при $n \rightarrow \infty$ вероятность p_m того, что рассматриваемое событие в бесконечно длинной серии испытаний появится ровно m раз, находится следующим образом.

) Шестизначные таблицы $f(x)$ и $f^(x)$ приведены в книге: Митропольский А. К., Нормальное распределение, Ленинград, ЛТА, 1956.

Так как, на основании (5.113), $p = \lambda/n$ и, следовательно, $q = 1 - \frac{\lambda}{n}$, то

$$\begin{aligned} p_{n,m} &= \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-m+1}{n} \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{h}{n}\right) &= 1 \quad (h = \overline{0, m-1}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-n}\right]^{m/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^\lambda)^{m/n} = 1. \end{aligned}$$

В силу этого

$$p_m = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n,m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \quad (5.115)$$

Распределение (5.115) называется *распределением Пуассона*.

Для вычисления вероятностей p_m распределения Пуассона составлена таблица значений функции (5.115) при разных значениях λ (табл. X).

2. Моменты распределения Пуассона. Переходя к исследованию распределения Пуассона, определим его моменты.

Особенно простыми являются выражения факториальных моментов. Имеем

$$\begin{aligned} m_{[h]} &= \sum_{m=0}^{\infty} p_m m^{[h]} = \sum_{m=h}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} m(m-1) \dots (m-h+1) = \\ &= \lambda^h \sum_{m=h}^{\infty} \frac{\lambda^{m-h}}{(m-h)!} e^{-\lambda} = \lambda^h e^{-\lambda} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^m}{m!}\right) = \lambda^h. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Итак, факториальный момент h -го порядка распределения Пуассона равен h -й степени числа λ .

Применяя затем известное соотношение между факториальными и обыкновенными моментами (2.30), легко находим обыкновенные начальные моменты:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= 1, \quad m_1 = \lambda, \quad m_2 = \lambda + \lambda^2, \\ m_3 &= \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3, \quad m_4 = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

На основании начальных моментов находим центральные моменты:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \lambda, \quad \mu_3 = \lambda, \\ \mu_4 &= \lambda(1 + 3\lambda), \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

Таким образом, распределение Пуассона (5.115) обладает тем свойством, что первый момент относительного нулевого значения, или среднее значение, а также второй центральный момент, или дисперсия, и третий центральный момент равны между собой: они выражаются одним и тем же числом λ , которое является единственным параметром распределения Пуассона, полностью его определяющим:

$$\bar{X} = \sigma^2 = \mu_3 = \lambda. \quad (5.119)$$

В силу этого можно сказать, что общий член распределения (5.115) выражает вероятность m появлений некоторого события в совокупности, имеющей среднее значение λ .

Определяя основные моменты, мы видим, что и они также выражаются при помощи числа λ :

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad r_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}, \dots \quad (5.120)$$

Из этих равенств находим, что для распределения Пуассона мера косости $\alpha = 1/\sqrt{\lambda}$ и мера крутости $\iota = 1/\lambda$ всегда положительны, так как $\lambda > 0$, и что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\alpha \rightarrow 0, \quad \iota \rightarrow 0.$$

Характеристическая функция распределения Пуассона равна

$$\varphi(t) = M(e^{itm}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} e^{itm} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}. \quad (5.121)$$

При помощи характеристической функции можно найти моменты распределения Пуассона, применяя общее правило (4.127).

Разлагая (5.121) в ряд, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)} &= 1 + \lambda \frac{it}{1!} + (\lambda + \lambda^2) \frac{(it)^2}{2!} + \\ &+ (\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3) \frac{(it)^3}{3!} + (\lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4) \frac{(it)^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Выписывая коэффициенты при $(it)^s/g!$, получим моменты (5.117).

Найдем теперь полуинварианты λ_h распределения Пуассона. Логарифмируя (5.121), имеем

$$\psi(t) = \lambda(e^{it} - 1),$$

откуда

$$\lambda_h = \frac{\psi^{(h)}(0)}{i^h} = \lambda. \quad (5.122)$$

Таким образом, все полуинварианты распределения Пуассона равны λ .

На основании характеристической функции (5.121) мы можем найти функцию распределения случайной величины, которая может принимать только целые неотрицательные значения 0, 1, 2, ...

Применяя формулу обращения Фурье (4.133), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itx} e^{-\lambda(1-e^{it})} dt = \frac{e^{-\lambda}}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(e^{-itx} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\lambda^h e^{iht}}{h!} \right) dt.$$

Этот ряд равномерно сходится относительно t ; следовательно, можно написать

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-\lambda}}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\lambda^h}{h!} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it(h-x)} dt = \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2\pi} \left(\sum_{h=0}^{x-1} \frac{\lambda^h}{h!} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it(h-x)} dt + \frac{\lambda^x}{x!} \int_{-\pi}^{+\pi} dt + \sum_{h=x+1}^{\infty} \frac{\lambda^h}{h!} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it(h-x)} dt \right), \end{aligned}$$

откуда

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda},$$

т. е. представляет функцию распределения Пуассона.

3. Применение распределения Пуассона. Распределение Пуассона широко применяется при контроле производства и качества продукции. Точное решение возникающих при этом вопросов, как правило, дается формулами биномиального и нормального распределения; однако если доля брака p не больше 0,1, — а при надлежащей постановке производства доля брака значительно меньше этого числа, — то большая часть практических вопросов с достаточным приближением решается непосредственно при помощи распределения Пуассона.

Пусть, например, изучение качества продукции, выпускаемой заводом, показало, что доля брака равна 2% всей продукции. Найдем вероятность того, что в партии, содержащей 1000 изделий, количество бракованных изделий равно 25. Здесь

$$p = 0,02, \quad n = 1000, \quad m = 25;$$

следовательно,

$$\lambda = 1000 \cdot 0,02 = 20.$$

Поэтому по табл. X для $\lambda = 20$ и $m = 25$ непосредственно находим

$$p_{1000; 25} = 0,045.$$

Решение этой задачи по формуле для вероятностей биномиального распределения потребовало продолжительных вычислений (см. § 1, п. 4).

Положим теперь, что при контролируемом производственном процессе доля брака не превышает p . Для своевременного преду-

Таблица 5.6

Распределение числа частиц золота в определенном растворе, наблюдавшихся через 1/30 минуту в оптически изолированной части пространства

| Число частиц золота | Частоты | |
|---------------------|-------------|---------------|
| | наблюдаемые | выравнивающие |
| 0 | 112 | 110 |
| 1 | 168 | 171 |
| 2 | 130 | 132 |
| 3 | 69 | 68 |
| 4 | 32 | 26 |
| 5 | 5 | 8 |
| 6 | 1 | 2 |
| 7 | 1 | 1 |
| Σ | 518 | 518 |

преждения случаев, когда доля брака начнет возрастать и окажется больше p , применим табл. X. На основании этой таблицы можно определить вероятность того, что при данной доле брака p в пробной партии, содержащей n изделий, число бракованных изделий будет больше m . Для этого надо, при данном $\lambda = np$, просуммировать вероятности случаев, превышающих m .

Пусть, например,

$$p = 0,005, \quad n = 1000, \quad m = 12.$$

Тогда получим $\lambda = 5$ и искомая вероятность будет равна

$$\begin{aligned} &0,00132 + 0,00047 + 0,00016 + \\ &+ 0,00005 + 0,00002 = \\ &= 0,00202 \approx 0,002. \end{aligned}$$

4. Вычисление выравнивающих частот. Вычисление выравнивающих частот распределения Пуассона оказывается исключительно простым. Объясняется это тем, что формула (5.115) содержит единственный параметр, а именно среднее значение соответствующей случайной величины

$$\bar{X} = m_{(1)} = \lambda.$$

Как отмечено выше, из (5.115) следует, что все распределение определяется при помощи только одной величины λ , без необходимости определять p и n , так как практически распределение Пуассона всегда приложимо к таким случаям, в которых хотя и неизвестны действительные значения p и n , но p может с достаточным основанием быть принятым за очень малое число, а n в свою очередь — за очень большое.

В качестве примера вычисления выравнивающих частот распределения Пуассона рассмотрим ряд распределения числа частиц

золота X в определенном растворе, наблюдавшихся через $1/30$ минуты в оптически изолированной части пространства, по данным Сведберга (табл. 5.6) *).

Для этого ряда

$$\lambda = 1,547, \quad \mu_2 = 1,530.$$

Вычисления производятся при помощи таблицы значений p_m (табл. X) с применением линейного интерполирования.

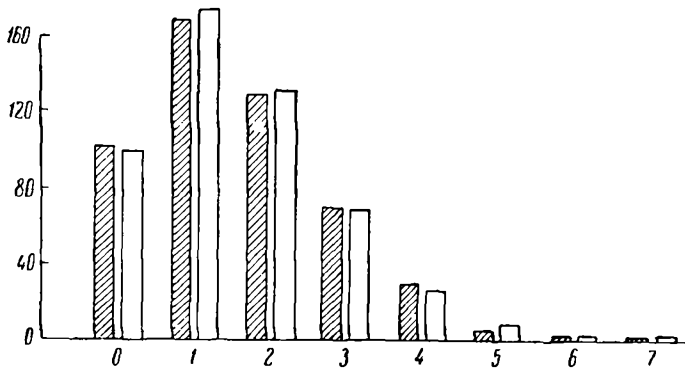


Рис. 5.13. Распределение числа частиц золота (штриховкой отмечены наблюдаемые частоты).

Найдем, например, частоту для $m = 0$. Так как здесь $\lambda = 1,547$, то, применяя линейное интерполирование (5.111), найдем

$$f_0 = p_0(\lambda=1,5) = 0,22313, \quad \Delta f_0 = -0,02123,$$

$$\hat{f}_1 = p_0(\lambda=1,6) = 0,20190, \quad u = 0,47.$$

Следовательно,

$$p_0(\lambda=1,547) = 0,22313 - 0,47 \cdot 0,02123 = 0,22313 - 0,00998 = 0,21315.$$

Умножая последнее число на объем ряда $n = 518$, получим искомую частоту 110.

Результаты вычислений приведены в последнем столбце табл. 5.6.

Сравнивая выравнивающие частоты с наблюдаемыми (рис. 5.13), мы видим очень хорошее согласие между ними.

§ 4. Гамма- и бета-распределение

1. Гамма-функция. К числу основных типов распределения относятся также гамма-распределение и бета-распределение. Эти распределения не только имеют большое значение в классических

*) В. И. Романовский, 1938, стр. 229 (II).

методах, но и служат основой для построения современных методов статистического исчисления.

Рассмотрим сначала гамма-функцию и бета-функцию.

Гамма-функция представляет интеграл, выражающий факториал какого угодно положительного числа. Для составления этой функции рассмотрим тождество

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Дифференцируя это тождество по α , получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = - \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = - \frac{1}{\alpha^2},$$

т. е.

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Подобным же образом находим

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2!}{\alpha^3}$$

и т. д.; наконец,

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{(p-1)!}{\alpha^p}.$$

Полагая $\alpha = 1$, получим

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = (p-1)!.$$

Таким образом, когда p — целое положительное число, найденный интеграл представляет факториал числа $p-1$.

Пусть теперь p будет каким угодно положительным числом; тогда левая часть полученного равенства называется гамма-функцией от p и обозначается через $\Gamma(p)$. Таким образом, Γ -функция для какого угодно положительного числа p определяется интегралом

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (p > 0). \quad (5.123)$$

Интеграл (5.123) существует при любом $p > 0$.

Между $\Gamma(p+1)$ и $\Gamma(p)$ существует очень простое соотношение. На основании (5.123) имеем

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx. \quad (5.124)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx = [-x^p e^{-x}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

При $p > 0$ выражение, стоящее в скобках, обращается в нуль как при нижнем пределе (когда $x \rightarrow 0$), так и при верхнем пределе [когда $x \rightarrow \infty$; см. замечание к (5.66)]. Таким образом,

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx = p \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx,$$

т. е. при любом положительном аргументе p имеет место равенство

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (5.125)$$

Это равенство, выражающее основное свойство Γ -функции, называется функциональным уравнением Γ -функции.

Применяя (5.125), мы можем, зная значение Γ -функции при каком-нибудь значении p , найти значение этой функции при возрастании p на единицу.

Так как, согласно (5.124),

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1, \quad (5.126)$$

то на основании (5.125) получим

$$\Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2 \cdot 1 = 2!, \quad \Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!, \dots$$

Вообще

$$\Gamma(p) = (p-1)! \quad (5.127)$$

Сопоставляя (5.126) и (5.127), находим

$$0! = 1$$

[ср. (2.14)].

Таким образом, если p есть целое положительное число, то повторное применение равенства (5.125) дает факториал числа p :

$$\Gamma(p+1) = p!. \quad (5.128)$$

Под факториалом нецелых и неположительных чисел будем понимать соответствующие значения Γ -функции. Поэтому

равенство (5.125) можно рассматривать как обобщение формулы $p! = p(p-1)!$ на нецелые числа.

Повторное применение равенства (5.125) приводит к выводу, что если l есть ближайшее целое положительное число, меньшее p , то

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2) \dots (p-l)\Gamma(p-l). \quad (5.129)$$

Таким образом, вычисление $\Gamma(p)$ для нецелого аргумента, большего единицы, приводит к вычислению $\Gamma(p-l)$ для аргумента, меньшего единицы.

Основное свойство Γ -функции (5.125) может быть написано также в виде

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \quad (5.130)$$

2. Бета-функция. При помощи Γ -функции выражаются многие другие определенные интегралы. Из них особенно большое значение имеет интеграл, называемый В-функцией.

В-функция каких-либо двух положительных чисел p и q определяется интегралом

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p > 0, q > 0). \quad (5.131)$$

При помощи подстановки $1-x = \frac{1}{1+t}$ мы можем В-функцию (5.131) представить в ином виде:

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt. \quad (5.132)$$

Из (5.131) при $q = 1$ получим

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}. \quad (5.133)$$

В частности, $B(1, 1) = 1$.

Если $p > 1$, то, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} B(p, q+1) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx = \\ &= \left[\frac{x^p (1-x)^q}{p} \right]_0^1 + \frac{q}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx = \frac{q}{p} B(p+1, q), \end{aligned}$$

откуда

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p} B(p+1, q-1). \quad (5.134)$$

Эта формула выражает основное свойство В-функции.

Значения В-функции для положительных чисел p и q могут быть выражены при помощи Γ -функции.

Для вывода соотношения между этими функциями положим zt вместо x в выражении (5.123). Тогда будем иметь

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} z^p t^{p-1} e^{-zt} dt.$$

Умножая левую и правую части этого равенства на $z^{q-1}e^{-z}$ и интегрируя, получим

$$\Gamma(p) \int_0^{\infty} z^{q-1} e^{-z} dz = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} z^{p+q-1} e^{-z(1+t)} dz \right] t^{p-1} dt,$$

или, полагая $z(1+t) = y$, имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \Gamma(q) &= \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(1+t)^{p+q}} \int_0^{\infty} y^{p+q-1} e^{-y} dy \right] t^{p-1} dt = \\ &= \Gamma(p+q) \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt,$$

или, принимая во внимание (5.132),

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (5.135)$$

Таким образом, значения В-функции могут быть найдены по таблице значений Γ -функции.

Интегралы $B(p, q)$ и $\Gamma(p)$ введены Эйлером и подробно исследованы Лежандром, который назвал их интегралами Эйлера первого и второго рода соответственно.

Полагая в (5.132) $p = q = 1/2$, получим

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{t^{-1/2}}{1+t} dt,$$

откуда при помощи подстановки $t = z^2$ находим

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \pi. \quad (5.136)$$

Но на основании (5.135)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)},$$

откуда, замечая, что при $x > 0$ $\Gamma(x) > 0$, получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}. \quad (5.137)$$

Применяя в этом интеграле подстановку $x = u^2$, находим

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (5.138)$$

[(см. 5.46)].

3. Значения и логарифмы гамма-функции. Из функционального уравнения гамма-функции (5.125) следует, что если будут известны значения Γ -функции в промежутке между какими-либо двумя последовательными целыми положительными числами, то легко может быть найдено значение Γ -функции для любого положительного числа.

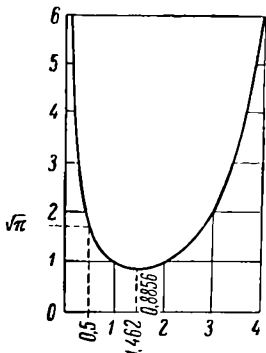
Имеются таблицы значений и логарифмов Γ -функции.

Так как

$$\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$$

и для $p > 0$ вторая производная $\Gamma(p)$ всегда положительна, то — по теореме Ролля — между 1 и 2 Γ -функция должна иметь минимум.

Рис. 5.14. Гамма-функция.



Минимальное значение $\Gamma(p)$ для положительных значений p равно

$$\Gamma(1,46163...) = 0,88560...$$

В силу этого таблица значений Γ -функции обычно составляется в промежутке от 1 до 2.

График $\Gamma(p)$ для p от 0 до 4 представлен на рис. 5.14.

Значение $\Gamma(p)$ с увеличением p быстро возрастает; поэтому при вычислении Γ -функции оказывается более удобным пользоваться таблицей логарифмов этой функции.

Таблица логарифмов Γ -функции чисел, лежащих между 1 и 2, составлена Лежандром с точностью до 12-го знака. Семизначные логарифмы Γ -функции от $p = 1$ до $p = 2$ приведены в табл. XI.

Применяя эту таблицу, можно найти логарифмы Γ -функции для любого положительного числа по следующим формулам [ср. (5.129) и (5.130)]. Для значений p , превосходящих 2:

$$\lg \Gamma(p) = \lg(p-1) + \lg(p-2) + \dots + \lg(p-l) + \lg \Gamma(p-l), \quad (5.139)$$

где l есть ближайшее целое положительное число, меньшее p . Для значений p , лежащих в промежутке от 0 до 1:

$$\lg \Gamma(p) = \lg \Gamma(p+1) - \lg p. \quad (5.140)$$

Применяя формулу (5.139), найдем, например, $\lg \Gamma(4,567)$:

$$\begin{aligned} \lg \Gamma(4,567) &= \lg 3,567 + \lg 2,567 + \lg 1,567 + \lg \Gamma(1,567) = \\ &= 0,65230 + 0,40943 + 0,19507 + \bar{1},94950 = 1,10630. \end{aligned}$$

Имеется также таблица логарифмов $\Gamma(p)$ для значений p от $p = 1,00$ до $p = 50,99$ (табл. XII).

Найдем, например, $\lg \Gamma(4,567)$. Применяя линейное интерполирование (5.111), получим

$$\begin{aligned} \lg \Gamma(4,567) &= \lg \Gamma(4,56) + 0,7 \cdot [\lg \Gamma(4,57) - \lg \Gamma(4,56)] = \\ &= 1,10203 + 0,7 \cdot 0,00610 = 1,10630. \end{aligned}$$

Применяя формулу (5.140), найдем $\lg \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$\lg \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lg \Gamma(1,5) - \lg 0,5.$$

По таблице логарифмов Γ -функции (табл. XI) и таблице логарифмов чисел находим

$$\begin{array}{r} - \lg \Gamma(1,5) = \bar{1},9475449 \\ \lg 0,5 = \bar{1},6989700 \\ \hline \lg \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 0,2485749 \end{array}$$

Принимая во внимание (5.137), получим $\lg \pi = 0,4971499$ и, следовательно,

$$\pi = 3,14159.$$

Логарифмы Γ -функции для любого положительного числа можно найти по таблице логарифмов факториалов (табл. V) при помощи формулы интерполирования Бесселя:

$$f_u = f_0 + u \Delta f_0 - \frac{u(1-u)}{4} (\Delta f_1 - \Delta f_{-1}). \quad (5.141)$$

В этой формуле f_u — искомое значение функции $f(x)$ в промежутке от x_0 до x_1 ;

$$f_{-1}, f_0, f_1, f_2$$

— значения функции для последовательных равноотстоящих значений табличного аргумента $x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2$;

$u = x - x_0$ — доля аргумента, на которую выполняется интерполирование; наконец,

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0, \quad \Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}, \quad \Delta f_1 = f_2 - f_1.$$

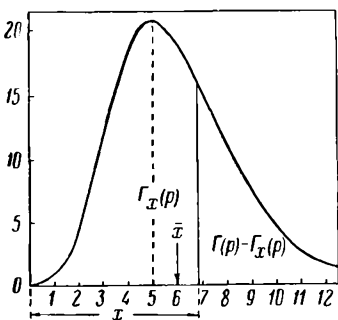
Если разности между двумя последовательными значениями аргумента на некотором участке таблицы является практически постоянными, когда $\Delta f_1 = \Delta f_{-1}$, то формула (5.141) обращается в формулу линейного интерполирования (5.111).

Применяя формулу интерполирования Бесселя, найдем, например, $\lg \Gamma(45,37)$ на основании таблицы логарифмов факториалов.

Так как $\lg \Gamma(p) = \lg(p-1)!$ и, следовательно,

$$\lg \Gamma(45,37) = \lg 44,37!,$$

Рис. 5.15. Гамма-распределение (для $p=6$).



то в рассматриваемом примере $f_0 = \lg 44!$

Из таблицы логарифмов факториалов находим

$$f_{-1} = \lg 43! = 52,78115$$

$$\Delta f_{-1} = 1,64345$$

$$f_0 = \lg 44! = 54,42460$$

$$\Delta f_0 = 1,65321$$

$$f_1 = \lg 45! = 56,07781$$

$$\Delta f_1 = 1,66276$$

$$f_2 = \lg 46! = 57,74057$$

$$u = 0,37.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_u &= 54,42460 + 0,37 \cdot 1,65321 - \frac{0,37 \cdot 0,63}{4} (1,66276 - 1,64345) = \\ &= 54,42460 + 0,61169 - 0,00113 = 55,03516. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили

$$\lg \Gamma(45,37) = 55,03516,$$

т. е. то же самое значение, какое дано в табл. XII.

4. Гамма-распределение. Распределение непрерывной случайной величины x с плотностью вероятности

$$f(x, p) = \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\Gamma(p)} \quad (5.142)$$

называется гамма-распределением $\gamma(p)$:

$$F(x, p) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x x^{p-1}e^{-x} dx. \quad (5.143)$$

График функции $y = x^{p-1}e^{-x}$ (для $p=6$) дается на рис. 5.15. Кривая асимптотически приближается к оси абсцисс. Если

$$p > 1,$$

то наиболее частое значение равно $p-1$. Если

$$p > 2,$$

то кривая касается оси абсцисс в начале координат; если

$$1 < p < 2,$$

то кривая в начале координат касается оси ординат; если же

$$0 < p < 1,$$

то кривая асимптотически приближается к обоим осям.

Площадь кривой на протяжении от 0 до ∞ выражает Γ -функцию.

Моменты $\gamma(p)$ -распределения относительно нуля равны

$$\begin{aligned} m_h = M\{x^h\} &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p+h-1} e^{-x} dx = \\ &= \frac{\Gamma(p+h)}{\Gamma(p)} = \frac{(p+h-1)}{(p-1)!} = p(p+1) \dots (p+h-1). \end{aligned} \quad (5.144)$$

В частности,

$$m_1 = p, \quad m_2 = p(p+1).$$

Отсюда дисперсия равна

$$\sigma^2 = p(p+1) - p^2 = p.$$

Подобным же образом

$$\mu_3 = 2p, \quad \mu_4 = 3p(p+2).$$

Следовательно, мера косости и мера крутости равны

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{p}}, \quad \nu = \frac{6}{p}.$$

Таким образом, мера косости и мера крутости зависят только от параметра p .

Характеристическая функция $\gamma(p)$ -распределения равна

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-(1-it)x} dx.$$

Применяя подстановку $z = (1 - it)x$, получим

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \left(\frac{z}{1-it} \right)^{p-1} e^{-z} \frac{dz}{1-it} = \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{1}{(1-it)^p} \int_0^{\infty} z^{p-1} e^{-z} dz,$$

т. е.

$$\varphi(t) = (1 - it)^{-p}. \quad (5.145)$$

Разлагая (5.145) в ряд, имеем

$$\varphi(t) = 1 + p \frac{it}{1!} + p(p+1) \frac{(it)^2}{2!} + \dots + p(p+1) \dots (p+h-1) \frac{(it)^h}{h!} + \dots$$

Отсюда, на основании (4.127), находим

$$m_h = p(p+1) \dots (p+h-1)$$

[см. (5.144)].

Пусть m независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_m имеют гамма-распределение с параметрами соответственно p_1, p_2, \dots, p_m . Тогда характеристическая функция суммы $\sum_{h=1}^m x_h$ будет, согласно (5.145), равна

$$\varphi(t) = (1 - it)^{-\sum_{h=1}^m p_h}. \quad (5.146)$$

Отсюда мы заключаем [см. (4.135)], что сумма m независимых гамма-распределений с параметрами p_1, p_2, \dots, p_m имеет гамма-распределение с параметром

$$\sum_{h=1}^m p_h.$$

Гамма-распределение тесно связано с нормальным распределением.

Положим, что случайная величина x имеет нормальное распределение со средним значением, равным нулю, и дисперсией σ^2 . То-

гда вероятность, что значение величины x попадет в промежуток $(x, x + dx)$, будет равна

$$dP = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}} dx.$$

Рассмотрим теперь величину

$$u = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}.$$

Так как x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то u изменяется от $+\infty$ до 0 и затем от 0 до $+\infty$. Для положительных значений x имеем $dx = \sigma du / \sqrt{2u}$, так что

$$dP = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} u^{-1/2} e^{-u} du.$$

Такую же величину вероятности dP получим для отрицательных значений x . Следовательно, дифференциал распределения dp величины u будет равен

$$dp = \frac{1}{\sqrt{\pi}} u^{-1/2} e^{-u} du,$$

или

$$dp = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u} du. \quad (5.147)$$

Таким образом, если случайная величина x имеет нормальное распределение со средним значением, равным нулю, и дисперсией σ^2 , то величина $u = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}$ имеет гамма-распределение с параметром $1/2$.

Характеристическая функция найденного $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ -распределения будет, на основании (5.145), равна

$$\varphi(t) = (1 - it)^{-1/2}. \quad (5.148)$$

5. Бета-распределение. Бета-распределения распадаются на два рода.

Бета-распределение первого рода $\beta_1(p, q)$ представляет распределение случайной величины x с плотностью вероятности

$$\frac{x^{p-1} (1-x)^{q-1}}{B(p, q)}$$

по всему размаху значений x от 0 до 1 [см. первое определение В-функции (5.131)]. Таким образом, на отрезке $0 \leq x \leq 1$ имеем

$$\beta_1(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \quad (5.149)$$

График функции

$$y = x^{p-1} (1-x)^{q-1}$$

дается на рис. 5.16. Площадь кривой на всем протяжении от 0 до 1 выражает бета-функцию $B(p, q)$.

Момент h -го порядка $\beta_1(p, q)$ -распределения относительно нуля равен

$$\begin{aligned} m_h &= \frac{1}{B(p, q)} \int_0^1 x^{p+h-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{B(p+h, q)}{B(p, q)} = \\ &= \frac{p(p+1) \dots (p+h-1)}{(p+q)(p+q+1) \dots (p+q+h-1)}. \end{aligned} \quad (5.150)$$

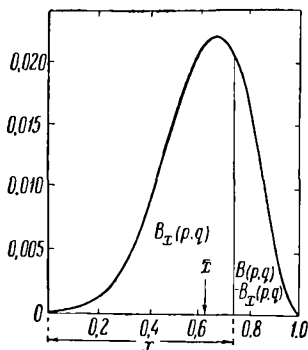
В частности,

$$m_1 = \frac{p}{p+q}, \quad m_2 = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}.$$

Следовательно, дисперсия $\beta_1(p, q)$ -распределения равна

$$\sigma^2 = \frac{pq}{(p+q)^2 (p+q+1)}. \quad (5.151)$$

Бета-распределение второго рода $\beta_2(p, q)$ с положительными параметрами p и q представляет распределение непрерывной случайной величины x с плотностью вероятности



$$\frac{x^{p-1}}{B(p, q) (1+x)^{p+q}}$$

по всему размаху от 0 до ∞ [см. второе определение В-функции (5.132)].

Таким образом, на отрезке $0 \leq x \leq \infty$ имеем

$$\beta_2(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^x \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du. \quad (5.152)$$

Рис. 5.16. Бета-распределение.

Заметим, что, в то время как значения x в $\beta_1(p, q)$ -распределении изменяются от 0 до 1, значения x в $\beta_2(p, q)$ -распределении изменяются от 0 до ∞ .

Момент h -го порядка $\beta_2(p, q)$ -распределения относительно нуля, если $h < q$, равен

$$m_h = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^{\infty} \frac{x^{p+h-1}}{(1+x)^{p+q}} dx = \frac{p(p+1) \dots (p+h-1)}{(q-1)(q-2) \dots (q-h)}. \quad (5.153)$$

В частности,

$$m_1 = \frac{p}{q-1}, \quad m_2 = \frac{p(p+1)}{(q-1)(q-2)}.$$

Следовательно, дисперсия $\beta_2(p, q)$ -распределения равна

$$\sigma^2 = \frac{p(p+q-1)}{(q-1)^2(q-2)}. \quad (5.154)$$

§ 5. Распределения типа *A* и *B* (Кривые Грама—Шарлье)

1. Распределение типа *A*. Обобщением нормального распределения и распределения Пуассона являются кривые распределения типа *A* и *B*. В основе вывода уравнений этих кривых лежит ряд, установленный Чебышевым для выражения функции при помощи многочленов.

Кривые распределения типа *A* и *B* получаются в результате исследования биномиального распределения

$$(p+q)^n. \quad (5.155)$$

Обозначая общий член этого распределения (5.3) через $B(m)$:

$$B(m) = p_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}, \quad (5.156)$$

применим для интерполирования между значениями $B(m)$ функцию вида (4.133)

$$B_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itx} \varphi(t) dt, \quad (5.157)$$

где

$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n = \sum_{m=0}^n B(m) e^{itm} \quad (5.158)$$

есть характеристическая функция биномиального распределения (5.13).

При этом возможны два вывода интерполяционной формулы (5.157). Первый вывод основан на разложении $\ln \varphi(t)$ в ряд по степеням t , а второй — на разложении $\ln \varphi(t)$ в ряд по степеням p .

В результате разложения $\ln \varphi(t)$ по степеням t получим ряд

$$f_A(x) = f(x) + a_1 f^{(1)}(x) + a_2 f^{(2)}(x) + a_3 f^{(3)}(x) + \\ + a_4 f^{(4)}(x) + \dots + a_n f^{(n)}(x) + \dots, \quad (5.159)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad (5.160)$$

а $f^{(n)}(x)$ есть n -я производная от $f(x)$ по x :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n}. \quad (5.161)$$

Между функцией $f(x)$ и ее производными существуют замечательные соотношения, имеющие большое значение при разложении функции в ряд.

Дифференцируя функцию (5.160), найдем

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= -xf(x), & f^{(2)}(x) &= (x^2 - 1)f(x), \\ f^{(3)}(x) &= -(x^3 - 3x)f(x), & f^{(4)}(x) &= (x^4 - 6x^2 + 3)f(x), \dots \end{aligned}$$

Вообще для n -й производной будем иметь

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left\{ x^n - \frac{n^{[2]}}{2 \cdot 1!} x^{n-2} + \frac{n^{[4]}}{2^2 \cdot 2!} x^{n-4} - \frac{n^{[6]}}{2^3 \cdot 3!} x^{n-6} + \dots \right\} f(x). \quad (5.162)$$

Таким образом, производная $f^{(n)}(x)$ функции $f(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) представляет произведение многочлена степени n от x и самой функции $f(x)$.

Введя обозначение

$$H_n(x) = x^n - \frac{n^{[2]}}{2 \cdot 1!} x^{n-2} + \frac{n^{[4]}}{2^2 \cdot 2!} x^{n-4} - \frac{n^{[6]}}{2^3 \cdot 3!} x^{n-6} + \dots, \quad (5.163)$$

мы можем n -ю производную (5.162) функции $f(x)$ написать в виде

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x), \quad (5.164)$$

откуда

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{f(x)} = (-1)^n \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} f^{(n)}(x). \quad (5.165)$$

Многочлены $H_n(x)$ называются многочленами Чебышева—Эрмита.

Первые из многочленов Чебышева—Эрмита имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= x, \\ H_2(x) &= x^2 - 1, \\ H_3(x) &= x^3 - 3x, \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, \\ H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x, \\ H_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15. \end{aligned} \right\} \quad (5.166)$$

Графики многочленов $H_2(x)$, $H_3(x)$ и $H_4(x)$ для $-4 \leq x \leq +4$ представлены на рис. 5.17.

Производные $f^{(n)}(x)$ и многочлены $H_n(x)$ обладают свойствами ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) H_m(x) dx \begin{cases} = 0, & \text{если } m \neq n, \\ = (-1)^n n!, & \text{если } m = n. \end{cases} \quad (5.167)$$

Благодаря этим свойствам можно определить коэффициенты a_n ($n = 0, 3, 4, \dots$) уравнения (5.159), выражая их при помощи основных моментов данного ряда распределения.

Умножая левую и правую части равенства (5.159) на $H_n(x)$ и интегрируя в предположении, что ряд равномерно сходится, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(x) H_n(x) dx &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x) H_n(x) dx = \\ &= a_n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) H_n(x) dx = \\ &= (-1)^n a_n n!, \quad (5.168) \end{aligned}$$

так как, в силу (5.167), все члены правой части исчезают, за исключением одного с коэффициентом a_n , откуда

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(x) H_n(x) dx \\ (n &= 0, 1, 2, \dots). \quad (5.169) \end{aligned}$$

Так как, в предположении нормированных значений x , основной момент r_n равен

$$r_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx,$$

то выражение (5.169) примет вид

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(x) \left[x^n - \frac{n^{[2]}}{2 \cdot 1!} x^{n-2} + \frac{n^{[4]}}{2^2 \cdot 2!} x^{n-4} - \frac{n^{[6]}}{2^3 \cdot 3!} x^{n-6} + \dots \right] dx,$$

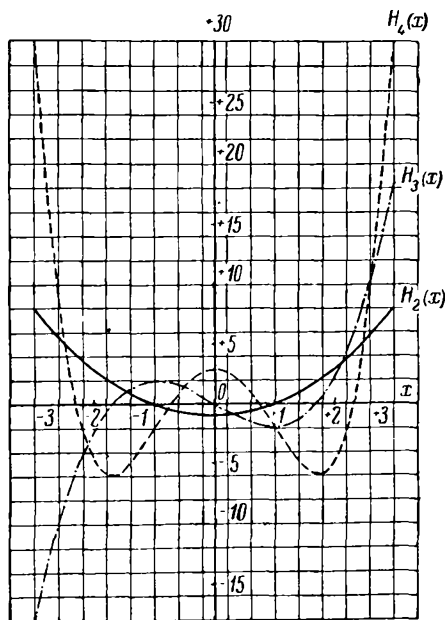


Рис. 5.17. Многочлены Чебышева — Эрмита.

или

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{h=0}^n \frac{n^{[2h]}}{2^h \cdot h!} r_{n-2h}. \quad (5.170)$$

Так как $r_0 = r_2 = 1$, $r_1 = 0$, то из (5.170) находим

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= a_2 = 0, \\ a_3 &= -\frac{1}{3!} r_3, & a_4 &= \frac{1}{4!} (r_4 - 3), \\ a_5 &= -\frac{1}{5!} (r_5 - 10r_3), & a_6 &= \frac{1}{6!} (r_6 - 15r_4 + 30). \end{aligned} \right\} \quad (5.171)$$

Подставляя эти значения коэффициентов в (5.159), получим уравнение кривой распределения типа A:

$$\begin{aligned} f_A(x) = f(x) - \frac{r_3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{r_4 - 3}{24} f^{(4)}(x) - \frac{r_5 - 10r_3}{120} f^{(5)}(x) + \\ + \frac{r_6 - 15r_4 + 30}{720} f^{(6)}(x) \dots \end{aligned} \quad (5.172)$$

Таблица значений интегральной функции нормального распределения $F(x)$, дифференциальной функции распределения $f(x)$ и ее первых шести производных приведена в конце книги (табл. XIII).

В большинстве приложений достаточно ограничиться первыми тремя членами формулы (5.172), т. е. взять

$$f_A(x) = f(x) - \frac{r_3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{r_4 - 3}{24} f^{(4)}(x). \quad (5.173)$$

Первый член правой части уравнения (5.173) дает нормальное распределение, второй член отражает влияние кривизны кривой, а третий — влияние крутости кривой типа A.

В каком именно направлении будет отражено влияние кривизны и крутости при помощи производных $f^{(3)}(x)$ и $f^{(4)}(x)$, легко установить из рис. 5.18.

Изменение $f^{(3)}(x)$ оказывается следующим: от $x = -\infty$ до $x = -1,733$ производная $f^{(3)}(x)$ принимает положительные значения, достигая максимума $+0,14956$ в точке $x = -2,33$; затем от $x = -1,733$ до $x = 0$ принимает отрицательные значения, достигая минимума $-0,55058$ в точке $x = -0,74$; далее производная $f^{(3)}(x)$ сначала от $x = 0$ до $x = +1,733$ оказывается положительной, с максимумом $+0,55058$ в точке $x = +0,74$, а затем от $x = +1,733$ до $x = +\infty$ становится отрицательной, достигая минимума $-0,14956$ в точке $x = +2,33$. Так как при этом член уравнения (5.173), содержащий $f^{(3)}(x)$, имеет отрицательный знак, то становится ясным, что если третий основной момент r_3 положителен, влияние члена $-\frac{r_3}{6} f^{(3)}(x)$ будет обратным изменению производной $f^{(3)}(x)$: ординаты $f(x)$, наиболее удаленные от среднего значения в отрицатель-

ном направлении, будут сравнительно немного уменьшены; ординаты, расположенные вблизи от среднего значения в отрицательном направлении (в промежутке от $-1,733$ до 0), будут в значительной степени увеличены; напротив, ординаты $f(x)$, расположенные вблизи от среднего значения в положительном направлении (от 0 до $+1,733$), будут в значительной степени уменьшены, а ординаты, наиболее удаленные от среднего значения в положительном направлении, будут немного увеличены. Благодаря та-

кому влиянию члена

$-\frac{r_3}{6} f^{(3)}(x)$ нормальная кривая, выражаемая членом $f(x)$, получит видоизменение, приобретая асимметрический вид с положительной косоcтью. Если же третий основной момент r_3 отрицателен, то влияние члена

$-\frac{r_3}{6} f^{(3)}(x)$ будет прямо соответствовать изменению производной $f^{(3)}(x)$. Вследствие этого нормальная кривая видоизменяется в асимметрическую кривую с отрицательной косоcтью.

Изменение четвертой производной $f^{(4)}(x)$ симметрично относительно центральной ординаты, соответствующей $x = 0$. В точке

$x = 0$ производная $f^{(4)}(x)$ имеет максимум $+1,19683$; при $x = \pm 0,742$ производная $f^{(4)}(x)$ равна нулю; от этих точек до $x = \pm 2,334$ производная $f^{(4)}(x)$ отрицательна, достигая минимума $-0,73995$ в точках $x = \pm 1,36$; наконец, от $x = \pm 2,334$ до $x = \pm \infty$ производная $f^{(4)}(x)$ положительна, достигая максимума $+0,13912$ в точках $x = \pm 2,86$. Так как при этом член уравнения (5.173), содержащий $f^{(4)}(x)$, имеет положительный знак, то ясно, что если

$$r_4 - 3 > 0,$$

влияние члена

$$+\frac{r_4 - 3}{24} f^{(4)}(x)$$

будет прямо соответствовать изменению $f^{(4)}(x)$, увеличивая ординаты $f(x)$, расположенные вблизи среднего значения, в промежутке от $x = -0,742$ до $x = +0,742$, а также ординаты, расположенные вдали от среднего значения, за точками $x = \pm 2,334$, и

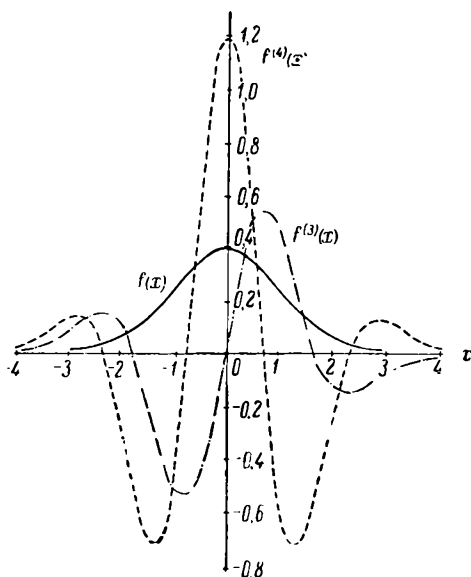


Рис. 5.18. Изменение нормальной функции распределения и ее производных.

уменьшая ординаты в промежутках от $x = \pm 0,742$ до $x = \pm 2,334$. Таким образом, нормальная кривая видоизменяется в островершинную кривую с положительной крутостью. Напротив, если

$$r_4 - 3 < 0,$$

то влияние члена $+\frac{r_4-3}{24}f^{(4)}(x)$ будет обратным изменению производной $f^{(4)}(x)$ и мы получим плосковершинную кривую с отрицательной крутостью.

При вычислении выравнивающих частот в случае распределения типа A [уравнение (5.173)] основные моменты r_3 и r_4 находятся при помощи способов, описанных выше (гл. II, § 1), а значения $f(x)$, $f^{(3)}(x)$ и $f^{(4)}(x)$ выписываются из табл. XIII. При переходе же к частотам \tilde{n}_j надо полученную величину $f_A(x)$ умножить на объем ряда n и разделить на основное отклонение σ :

$$\tilde{n}_j = \frac{n}{\sigma} f_A(x). \quad (5.174)$$

Уравнение (5.174) кривой типа A дает удовлетворительное приближение к наблюдаемым рядам распределения, мало отличающимся от нормального *).

Таблица 5.7

Распределение предела прочности при сжатии вдоль волокон древесины авиационной сосны

| Предел прочности, кг/см ² | Число испытаний | Предел прочности, кг/см ² | Число испытаний |
|--------------------------------------|-----------------|--------------------------------------|-----------------|
| 215 | 7 | 455 | 356 |
| 255 | 22 | 495 | 239 |
| 295 | 102 | 535 | 108 |
| 335 | 260 | 575 | 40 |
| 375 | 386 | 615 | 15 |
| 415 | 461 | 655 | 4 |
| | | Σ | 2000 |

Таблица 5.8

Статистики ряда распределения предела прочности при сжатии вдоль волокон древесины авиационной сосны

| | | |
|---------------------|------------------------|-------------------------|
| $m_1 = +0,041,$ | $m_2 = 3,157,$ | $m_3 = +1,490,$ |
| $m_4 = 30,271,$ | $\mu_2 = 3,155,$ | $\mu_3 = +1,102,$ |
| $\mu_4 = 30,059,$ | $\dot{\mu}_2 = 3,072,$ | $\dot{\mu}_4 = 28,510,$ |
| $\bar{X} = 416,64,$ | $\sigma = 1,752,$ | $r_3 = \alpha = +0,205$ |
| $r_4 = 3,021,$ | $\iota = +0,021,$ | |

*) С. Н. Бернштейн, 1946, стр. 333 (II), М. Кендалл и А. Стьюарт, 1966, стр. 227 (III).

2. Вычисление выравнивающих частот распределения типа А. В качестве примера вычислим выравнивающие частоты для ряда распределения предела прочности X (σ_B , кг/см²) при сжатии вдоль волокон древесины авиационной сосны (табл. 5.7)*.

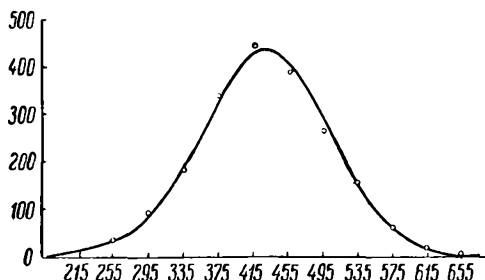


Рис. 5.19. Кривая типа А — распределение предела прочности при сжатии вдоль волокон древесины авиационной сосны.

Статистики этого ряда приведены в табл. 5.8.

Подставляя найденные значения r_3 и r_4 в формулу (5.173), получим

$$f_A(x) = f(x) - 0,034f^{(3)}(x) + 0,001f^{(4)}(x).$$

Вычисление частот по этой формуле располагается по схеме табл. 5.9.

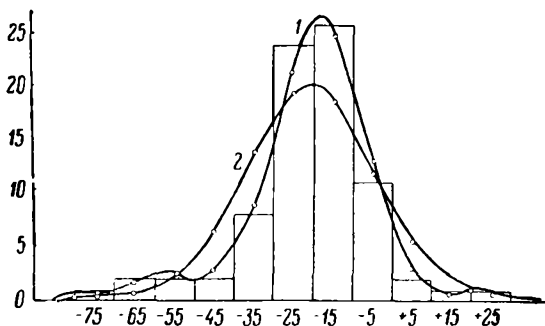


Рис. 5.20. Распределение лучевой скорости звезд (1 — кривая типа А, 2 — нормальная кривая).

При выписывании значений $f(x)$, $f^{(3)}(x)$ и $f^{(4)}(x)$ из табл. XIII следует иметь в виду, что производные нормальной функции плотности четного порядка являются четными функциями, а производные нечетного порядка — нечетными функциями. Поэтому, замечая,

*) Л. М. Перелыгин и А. Х. Певцов, 1934, стр. 413 (VII, 106).

Таблица 5.9

Схема вычисления выравнивающих частот в случае распределения типа А

(пример — распределение предела прочности при сжатии вдоль волокон древесины авиационной сосны)

| $X_{(j)}$ | n_j | $x' - m_1$ | $x = \frac{x' - m_1}{\sigma}$ | $f(x)$ | $f^{(3)}(x)$ | $f^{(4)}(x)$ | $-\frac{f^{(3)}(x)}{6}$ | $\frac{f^{(4)}(x) - 3}{24} f^{(4)}(x)$ | $(5) + (8) + (9)$ | $\tilde{n}_j = \frac{n}{\sigma} \cdot (10)$ |
|-----------|-------|------------|-------------------------------|---------|--------------|--------------|-------------------------|--|-------------------|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) |
| 175 | — | -6,041 | -3,446 | 0,00105 | +0,03220 | +0,07660 | -0,00108 | +0,00008 | 0,00005 | 0,06 |
| 215 | 7 | -5,041 | -2,876 | 0,00638 | +0,09672 | +0,13899 | -0,00329 | +0,00014 | 0,00323 | 3,69 |
| 255 | 22 | -4,041 | -2,305 | 0,02800 | +0,14929 | -0,01822 | -0,00508 | -0,00002 | 0,02290 | 26,13 |
| 295 | 102 | -3,041 | -1,735 | 0,08857 | +0,00146 | -0,53132 | -0,00005 | -0,00053 | 0,08799 | 100,39 |
| 335 | 260 | -2,041 | -1,164 | 0,20263 | -0,38800 | -0,66733 | +0,01319 | -0,00057 | 0,21515 | 245,46 |
| 375 | 386 | -1,041 | -0,594 | 0,33382 | -0,52582 | +0,33691 | +0,01788 | +0,00034 | 0,35204 | 401,64 |
| 415 | 461 | -0,041 | -0,023 | 0,39883 | -0,02751 | +1,19518 | +0,00094 | +0,00129 | 0,40097 | 457,47 |
| 455 | 356 | 0,959 | 0,547 | 0,34350 | +0,50746 | +0,44458 | -0,01725 | +0,00044 | 0,32669 | 372,72 |
| 495 | 239 | 1,959 | 1,118 | 0,21355 | +0,41782 | -0,62720 | -0,01420 | -0,00063 | 0,19872 | 226,72 |
| 535 | 108 | 2,959 | 1,688 | 0,09598 | +0,02441 | -0,57374 | -0,00083 | -0,00057 | 0,09458 | 107,91 |
| 575 | 40 | 3,959 | 2,258 | 0,03117 | -0,14771 | -0,04976 | +0,00502 | -0,00005 | 0,03614 | 41,23 |
| 615 | 15 | 4,959 | 2,829 | 0,00729 | -0,10325 | +0,13884 | +0,00351 | +0,00014 | 0,01094 | 12,48 |
| 655 | 4 | 5,959 | 3,399 | 0,00123 | -0,03594 | +0,08304 | +0,00122 | +0,00008 | 0,00253 | 2,89 |
| 695 | — | 6,959 | 3,969 | 0,00016 | -0,00790 | +0,02430 | +0,00027 | +0,00002 | 0,00045 | 0,51 |
| Σ | 2000 | — | — | 1,75216 | — | — | — | — | 1,75238 | 1999,30 |

Таблица 5.10

Распределение лучевой скорости звезд
в области $\alpha = 17^h 40^m$ до $18^h 40^m$, $\delta = +20^\circ$ до 40°

| Лучевая скорость, км/сек | Число звезд | | |
|--------------------------------|------------------|-------------------------|---------------------|
| | наблю- денное | вычисленное | |
| | | по нормальной кривой | по кривой типа А |
| -75 | 1 | 0,1 | 0,7 |
| -65 | 2 | 0,5 | 1,7 |
| -55 | 2 | 2,1 | 2,2 |
| -45 | 2 | 6,5 | 2,3 |
| -35 | 8 | 13,6 | 9,1 |
| -25 | 24 | 19,3 | 22,6 |
| -15 | 26 | 18,5 | 25,0 |
| -5 | 11 | 12,1 | 12,7 |
| +5 | 2 | 5,4 | 2,7 |
| +15 | 1 | 1,6 | 0,4 |
| +25 | 1 | 0,3 | 0,4 |
| Σ | 80 | 80,0 | 79,8 |

что в табл. XIII даны значения нормальной функции плотности и ее производных только для положительных значений x , мы должны при выписывании значений производных нечетного порядка для отрицательных значений x брать табличные значения с обратным знаком; что же касается значений производных четного порядка и самой функции $f(x)$, то они остаются одинаковыми как для положительных, так и для отрицательных значений x . Кроме того, при интерполировании значений производных необходимо следить за тем, возрастает или убывает значение производной, и соответственно прибавлять или вычитать пропорциональную часть.

Представив на чертеже выравнивающие и наблюдаемые частоты рассматриваемого ряда распределения (рис. 5.19), мы видим, что кружки, изображающие наблюдаемые частоты, очень близко располагаются около выравнивающей кривой распределения типа А.

Таблица 5.11

Статистики рядов распределения предела прочности при сжатии и предела прочности при растяжении портланд-цементного раствора 28-дневного возраста

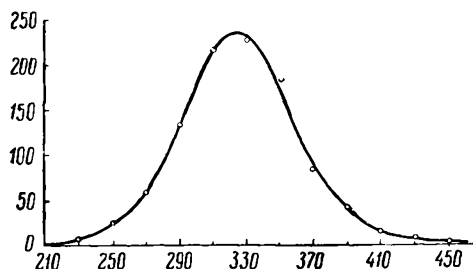
| | Предел прочности | |
|----------|------------------|----------------|
| | при сжатии | при растяжении |
| m_1 | -0,193 | -0,128 |
| σ | 1,574 | 1,943 |
| r_3 | +0,208 | +0,183 |
| r_4 | 3,296 | 2,733 |

Отражая косость и крутость распределения, кривая типа *A* обнаруживает большое согласие с наблюдаемым рядом распределения.

В качестве дополнительного примера приведем ряд распределений лучевой скорости звезд в области $\alpha = 17^h40^m$ до 18^h40^m , $\delta = +20^\circ$ до 40° (табл. 5.10 и рис. 5.20)*).

Приведем, наконец, результаты вычислений выравнивающих частот распределения типа *A* для рядов распределения предела прочности при сжатии и предела прочности при растяжении портланд-цементного раствора 28-дневного возраста (табл. 1.19).

Рис. 5.21. Распределение предела прочности при сжатии портланд-цементного раствора 28-дневного возраста.



Статистики этих рядов приведены в табл. 5.11.

Уравнения кривой типа *A*:

для распределения предела прочности при сжатии

$$f_A(x) = f(x) - 0,035f^{(3)}(x) + 0,012f^{(4)}(x);$$

для ряда распределения предела прочности при растяжении

$$f_A(x) = f(x) - 0,030f^{(3)}(x) - 0,011f^{(4)}(x).$$

Наблюдаемые и выравнивающие частоты этих рядов приведены в табл. 5.12 и изображены на рис. 5.21 и 5.22.

3. Распределение типа *B*.

В результате разложения $\ln \phi(t)$ по степеням p получается ряд

$$f_B(x) = \psi(x) \sum_{m=0}^{\infty} b_m G_m(x), \quad (5.175)$$

где $\psi(x)$ есть функция распределения Пуассона

$$\psi(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \text{ при } x=0, 1, 2, \dots,$$

а $G_m(x)$ — многочлены, аналогичные многочленам Чебышева — Эрмита $H_n(x)$. В многочленах $G_n(x)$ вместо нормальной функции распределения берется функция $\psi(x)$ и вместо n -й производной

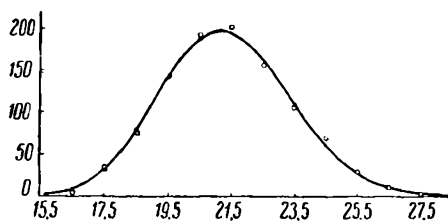


Рис. 5.22. Распределение предела прочности при растяжении портланд-цементного раствора 28-дневного возраста.

*) Трамплер и Уивер, 1953, стр. 194 (VII, 3).

Таблица 5.12

Наблюдаемые и выравнивающие частоты рядов распределения предела прочности при сжатии и предела прочности при растяжении портландцементного раствора 28-дневного возраста

| X_1 | σ_B при сжатии | | X_2 | σ_B при растяжении | |
|----------|-----------------------|---------------|----------|---------------------------|---------------|
| | n_f | \tilde{n}_f | | n_f | \tilde{n}_f |
| 210 | — | 0,7 | 15,5 | — | 0,2 |
| 230 | 5 | 3,9 | 16,5 | 4 | 6,1 |
| 250 | 21 | 18,0 | 17,5 | 30 | 28,3 |
| 270 | 59 | 60,4 | 18,5 | 74 | 76,3 |
| 290 | 135 | 139,5 | 19,5 | 138 | 139,7 |
| 310 | 218 | 218,1 | 20,5 | 194 | 188,4 |
| 330 | 227 | 231,4 | 21,5 | 202 | 196,3 |
| 350 | 186 | 170,5 | 22,5 | 156 | 163,4 |
| 370 | 88 | 92,6 | 23,5 | 104 | 108,9 |
| 390 | 36 | 41,2 | 24,5 | 62 | 58,7 |
| 410 | 16 | 16,3 | 25,5 | 27 | 24,7 |
| 430 | 7 | 5,5 | 26,5 | 8 | 7,6 |
| 450 | 2 | 1,4 | 27,5 | 1 | 1,7 |
| 470 | — | 0,3 | 28,5 | — | 0,3 |
| Σ | 1000 | 999,8 | Σ | 1000 | 1000,6 |

берется n -я конечная разность

$$\Delta^n \psi(x-n) = \psi(x) - \frac{n^{[1]}}{1!} \psi(x-1) + \frac{n^{[2]}}{2!} \psi(x-2) - \dots + (-1)^n \psi(x-n). \quad (5.176)$$

Таким образом, многочлены $G_n(x)$, зависящие от переменной x , принимающей целые положительные значения 0, 1, 2, ..., определяются равенством

$$G_n(x) = (-1)^n \frac{\Delta^n \psi(x-n)}{\psi(x)}, \quad (5.177)$$

или

$$G_n(x) = (-1)^n \frac{n!}{\lambda^n} \sum_{h=0}^n \frac{(-1)^h \lambda^h}{h!} \frac{x^{[n-h]}}{(n-h)!}. \quad (5.178)$$

В частности, $G_0(x) = 1$,

$$\left. \begin{aligned} G_1(x) &= -\frac{1!}{\lambda} \left(\frac{x^{[1]}}{1!} - \frac{\lambda}{1!} \right), \\ G_2(x) &= \frac{2!}{\lambda^2} \left(\frac{x^{[2]}}{2!} - \frac{\lambda}{1!} \frac{x^{[1]}}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} \right), \\ G_3(x) &= -\frac{3!}{\lambda^3} \left(\frac{x^{[3]}}{3!} - \frac{\lambda}{1!} \frac{x^{[2]}}{2!} + \frac{\lambda^2}{2!} \frac{x^{[1]}}{1!} - \frac{\lambda^3}{3!} \right), \\ G_4(x) &= \frac{4!}{\lambda^4} \left(\frac{x^{[4]}}{4!} - \frac{\lambda}{1!} \frac{x^{[3]}}{3!} + \frac{\lambda^2}{2!} \frac{x^{[2]}}{2!} - \frac{\lambda^3}{3!} \frac{x^{[1]}}{1!} + \frac{\lambda^4}{4!} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.179)$$

Коэффициенты b_m в формуле (5.175) находятся при помощи многочленов $G_m(x)$ таким же способом, как были найдены коэффициенты a_n при помощи многочленов $H_n(x)$ (п. 1). Так как параметр λ выбирается равным среднему значению ряда распределения, то формулы для коэффициентов b_m принимают вид

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 1, & b_1 &= 0, & b_2 &= \frac{1}{2!} (\mu_2 - \lambda), \\ b_3 &= -\frac{1}{3!} (\mu_3 - 3\mu_2 + 2\lambda), \\ b_4 &= \frac{1}{4!} [\mu_4 - 6\mu_3 + (11 - 6\lambda)\mu_2 - 3\lambda(2 - \lambda)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.180)$$

Подставляя в (5.175) соответствующие выражения b_m и $G_m(x)$ из (5.180) и (5.179), получим уравнение кривой распределения типа B:

$$\begin{aligned} f_B(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \left\{ 1 + \frac{\mu_2 - \lambda}{\lambda^2} \left[\frac{x^{[2]}}{2} - \lambda x^{[1]} + \frac{\lambda^2}{2} \right] + \right. \\ & + \frac{\mu_3 - 3\mu_2 + 2\lambda}{\lambda^3} \left[\frac{x^{[3]}}{6} - \frac{\lambda}{2} x^{[2]} + \frac{\lambda^2}{2} x^{[1]} - \frac{\lambda^3}{6} \right] + \\ & + \frac{\mu_4 - 6\mu_3 + (11 - 6\lambda)\mu_2 - 3\lambda(2 - \lambda)}{\lambda^4} \times \\ & \times \left[\frac{x^{[4]}}{24} - \frac{\lambda}{6} x^{[3]} + \frac{\lambda^2}{4} x^{[2]} - \frac{\lambda^3}{6} x^{[1]} + \frac{\lambda^4}{24} \right] + \dots \left. \right\}. \quad (5.181) \end{aligned}$$

В этой формуле значения функции

$$p_x = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

берутся из табл. X, и для перехода к выравнивающим частотам \tilde{n}_j надо полученные значения $f_B(x)$ умножить на объем ряда

$$\tilde{n}_j = n f_B(x). \quad (5.182)$$

Ряд распределения числа α -частиц излучаемых полонием в промежуток времени, равный 1/8 минуты

| Число α -частиц | Число испытаний | Число α -частиц | Число испытаний |
|------------------------|-----------------|------------------------|-----------------|
| 0 | 57 | 8 | 45 |
| 1 | 203 | 9 | 27 |
| 2 | 383 | 10 | 10 |
| 3 | 525 | 11 | 4 |
| 4 | 532 | 12 | 0 |
| 5 | 408 | 13 | 1 |
| 6 | 273 | 14 | 1 |
| 7 | 139 | | |
| | | Σ | 2608 |

Ограничиваясь в правой части уравнения (5.181) некоторым числом членов, мы можем достигнуть той или иной степени согласия вычисленного ряда с наблюдаемым рядом распределения.

4. Вычисление выравнивающих частот распределения типа B. Вычислим, например, выравнивающие частоты в случае распределения типа B для ряда распределения числа α -частиц, излучаемых полонием в промежуток времени, равный 1/8 минуты (табл. 5.13) *).

*) Резерфорд и Гейгер, 1910, стр. 701 (VII, 1).

Статистики этого ряда приведены в табл. 5.14.

Таблица 5.14

Статистики ряда распределения α -частиц, излучаемых полонием

| | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| $m_1 = -0,1285$ $\lambda = 3,872$ | $m_2 = 3,7113$ $\mu_2 = 3,695$ | $m_3 = +1,9720$ $\mu_3 = 3,398$ | $m_4 = 46,4889$ $\mu_4 = 47,869$ |
|--------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|

Применяя формулу (5.182), находим

$$\begin{aligned}
 \tilde{n}_j &= 2608 p_x \left\{ 1 - 0,0118 \left[\frac{x^{[2]}}{2} - 3,872x^{[1]} + 7,4962 \right] + \right. \\
 &+ 0,0010 \left[\frac{x^{[3]}}{6} - 1,936x^{[2]} + 7,4962x^{[1]} - 9,6751 \right] + \\
 &+ 0,0179 \left[\frac{x^{[4]}}{24} - 0,6353x^{[3]} + 3,7481x^{[2]} - 9,6751x^{[1]} + 9,3655 \right] \Big\} = \\
 &= 2608 p_x \{ 1,0000 - 0,0885 + 0,0457x^{[1]} - 0,0059x^{[2]} - 0,0097 + \\
 &+ 0,0075x^{[1]} - 0,0019x^{[2]} + 0,0002x^{[3]} + 0,1677 - 0,1732x^{[1]} + \\
 &+ 0,0671x^{[2]} - 0,0116x^{[3]} + 0,00075x^{[4]} \} = \\
 &= 2608 p_x \{ 1,0695 - 0,1200x^{[1]} + 0,0593x^{[2]} - 0,0114x^{[3]} + 0,00075x^{[4]} \}.
 \end{aligned}$$

Вычисления, выполненные по этой формуле, приведены в табл. 5.15. Рис. 5.23, на котором изображены наблюдаемые и

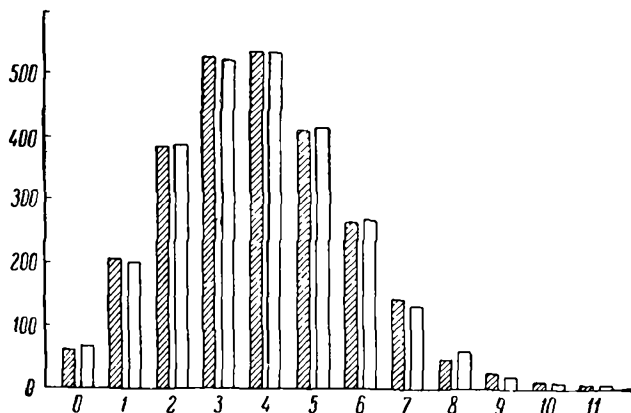


Рис. 5.23. Распределение α -частиц, излучаемых полонием в промежуток времени, равный $1/8$ минуты.

выравнивающие частоты рассматриваемого ряда, показывает высокую степень согласия между ними.

Таблица 5.15

Схема вычисления выравнивающих частот в случае распределения типа В

(ряд распределения числа α -частиц, излучаемых полонием в промежутках времени, равный $1/8$ минут)

| $X(j)$ | n_j | $x(j)$ | $p(x)$ | $1,0695 - 0,1200x^{[1]} + 0,0593x^{[2]} - 0,0114x^{[3]} + 0,00075x^{[4]}$ | | | $f_B(x)$ | \bar{n}_j |
|----------|-------|--------|---------|---|-------------------|-----------|----------|-------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | | | (6) | (7) |
| 0 | 57 | 0 | 0,02084 | 1,0695 | | = 1,0695 | 0,0223 | 58,16 |
| 1 | 203 | 1 | 0,08064 | 1,0695 | -0,1200 | = 0,9495 | 0,0766 | 199,77 |
| 2 | 383 | 2 | 0,15606 | 1,0695 | -0,2400 + 0,1186 | = 0,9481 | 0,1480 | 385,98 |
| 3 | 525 | 3 | 0,20137 | 1,0695 | -0,3500 + 0,3558 | = 0,9939 | 0,2007 | 523,45 |
| 4 | 532 | 4 | 0,19491 | 1,0695 | -0,4800 + 0,7116 | -0,0584 | 0,2038 | 531,51 |
| 5 | 408 | 5 | 0,15094 | 1,0695 | -0,6000 + 1,1860 | -0,2735 | 0,1602 | 417,80 |
| 6 | 273 | 6 | 0,09742 | 1,0695 | -0,7200 + 1,7790 | -0,6840 | 0,1004 | 261,84 |
| 7 | 139 | 7 | 0,05391 | 1,0695 | -0,8400 + 2,4905 | -1,3680 | 0,0515 | 134,31 |
| 8 | 45 | 8 | 0,02610 | 1,0695 | -0,9600 + 3,3208 | -2,3940 | 0,0224 | 58,42 |
| 9 | 27 | 9 | 0,01123 | 1,0695 | -1,0800 + 4,2696 | -3,8304 | 0,0087 | 22,69 |
| 10 | 10 | 10 | 0,00435 | 1,0695 | -1,2000 + 5,3370 | -5,7486 | 0,0034 | 8,87 |
| 11 | 4 | 11 | 0,00154 | 1,0695 | -1,3200 + 6,5230 | -8,2080 | 0,0014 | 3,65 |
| 12 | 0 | 12 | 0,00049 | 1,0695 | -1,4400 + 7,8276 | -11,2850 | 0,0006 | 1,56 |
| 13 | 1 | 13 | 0,00015 | 1,0695 | -1,5600 + 9,2508 | -15,0480 | 0,0003 | 0,78 |
| 14 | 1 | 14 | 0,00004 | 1,0695 | -1,6800 + 10,7926 | -19,5524 | 0,0001 | 0,26 |
| Σ | 2608 | - | 1,0000 | | -24,8976 | + 18,0180 | | 2609,05 |

§ 6. Распределения типа I—VII (Кривые Пирсона)

1. Распределение Маркова и дифференциальное уравнение кривых распределения Пирсона. Наиболее общим видом распределения случайной величины является распределение Маркова.

Марков поставил задачу — найти вероятность $p_{n,m}$ появления m белых шаров при n извлечениях из ящика, содержащего a белых и b черных шаров, при условии, что из ящика вынимается по одному шару и после каждого извлечения вынутый шар кладется обратно в ящик вместе с α шарами того же цвета. Вероятность $p_{n,m}$ ($m = 0, n$) образует *распределение Маркова*.

Условия сформулированной задачи очень часто могут быть приняты в качестве теоретической схемы тех или иных явлений, и, стало быть, решение этой задачи может быть использовано для построения распределений вероятностей, дающих довольно точное представление о распределениях различных изучаемых совокупностей. Именно таким путем можно вывести важнейшие типы выравнивающих распределений — кривых Пирсона.

Распределение Маркова приводит, как к предельным стохастическим кривым, к кривым распределения Пирсона, соответствующим действительным корням знаменателя в уравнении

$$\frac{dy}{y} = \frac{x+b}{c_0 + c_1x + c_2x^2} dx. \quad (5.183)$$

В дальнейшем Колмогоров показал, что можно построить вероятностные схемы, приводящие к любому типу кривых распределения Пирсона.

Дифференциальное уравнение (5.183) выражает общие свойства функции распределения

$$y = f(x). \quad (5.184)$$

Эти свойства состоят в следующем:

1. Значения случайной величины x заключаются в определенных пределах; следовательно, частота, соответствующая значениям меньше наименьшего предела и больше наибольшего, равна нулю; в то же время частота ряда распределения не может быть меньше нуля [см. (1.5)].

2. В промежутке между наименьшим и наибольшим значениями X частоты ряда распределения возрастают, начиная от нуля, достигают для некоторого значения \hat{X} своего максимума, а затем убывают до нуля. На обоих концах распределения часто наблюдается касание высшего порядка.

3. Площадь кривой распределения равна сумме всех частот ряда распределения.

Таким образом, функция распределения (5.184) должна удовлетворять следующим условиям: в начале и конце распределения эта функция должна равняться нулю, а где-нибудь в середине ряда

она должна достигать своего максимума. Иначе говоря, скорость изменения этой функции или выражающая эту скорость первая производная $\frac{dy}{dx}$ должна равняться нулю в трех точках: в начале и конце ряда, где $y = 0$, и в середине ряда, где функция достигает максимума.

Эти условия выполняются в дифференциальном уравнении (5.183), так как $\frac{dy}{dx}$ обращается в нуль при $y = 0$, что имеет место в начале и конце ряда, и при $x = -b$, где функция имеет требуемый максимум.

Постоянные, входящие в уравнение (5.183), можно выразить при помощи моментов:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= -\sigma^2 \frac{s+1}{s-2}, \\ c_1 &= -b = -\frac{\sigma r_3}{2} \frac{s+2}{s-2}, \quad c_2 = \frac{1}{s-2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.185)$$

где

$$s = \frac{6(r_4 - r_3^2 - 1)}{3r_3^2 - 2r_4 + 6}. \quad (5.186)$$

Из этих формул видно, что кривые семейства (5.183) вполне определяются при помощи первых четырех моментов. Таким образом, при установлении кривой распределения необходимо выполнить требование, чтобы эта кривая имела то же самое среднее значение, основное отклонение, меру косости и меру крутости, как и данный ряд распределения.

Постоянная b представляет расстояние между средним значением и наиболее частым значением; таким образом,

$$\frac{\bar{X} - \hat{X}}{c} = \frac{\sigma r_3}{2} \frac{s+2}{s-2}. \quad (5.187)$$

Отсюда находятся точные формулы для определения наиболее частого значения и меры скошенности:

$$\hat{X} = \bar{X} - \frac{\sigma r_3}{2} \frac{s+2}{s-2}, \quad (5.188)$$

$$\alpha^* = \frac{r_3}{2} \frac{s+2}{s-2}. \quad (5.189)$$

Из (5.189) видно, что в распределениях, близких к нормальному (в которых $r_3 \approx 0$, $r_4 \approx 3$),

$$\alpha^* = \frac{r_3}{2} = \frac{\alpha}{2}. \quad (5.190)$$

2. Критерий кривых распределения. Общий интеграл дифференциального уравнения (5.183) может быть представлен в виде

$$y = y_0 e^{v(x)}, \quad (5.191)$$

где

$$v(x) = \int \frac{x+b}{c_0 + c_1x + c_2x^2} dx. \quad (5.192)$$

Значение этого интеграла зависит от частных значений коэффициентов при x в знаменателе. Таким образом, задача сводится к рассмотрению уравнения

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 = 0. \quad (5.193)$$

Корни R_1 и R_2 этого уравнения зависят от дискриминанта

$$D = c_1^2 - 4c_0c_2 = c_1^2 \left(1 - \frac{4c_0c_2}{c_1^2}\right), \quad (5.194)$$

который можно представить в виде

$$D = c_1^2 \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right), \quad (5.195)$$

если введем обозначение

$$\kappa = \frac{c_1^2}{4c_0c_2}. \quad (5.196)$$

Введем теперь наряду с (5.186) величину

$$t = \sqrt{r_3^2(s+2)^2 + 16(s+1)}, \quad (5.197)$$

или, что то же самое,

$$t = 4 \sqrt{(s+1)(1-\kappa)}. \quad (5.198)$$

Тогда мы можем корни уравнения (5.193) представить в виде

$$R_1 = \frac{\sigma}{4}(1-t), \quad R_2 = \frac{\sigma}{4}(1+t). \quad (5.199)$$

Каждому значению величины (5.196) соответствует определенное значение корней уравнения (5.193), а значениям корней — определенный результат интегрирования дифференциального уравнения (5.183). А так как в результате интегрирования получается некоторый частный вид уравнения, представляющий тот или иной тип кривой распределения, то величина (5.196) получает характер критерия, по значению которого можно определить тип кривой.

Критерий (5.196) может быть представлен в виде

$$\kappa = \frac{r_3^2(r_4+3)^2}{4(4r_4-3r_3^2)(2r_4-3r_3^2-6)}, \quad (5.200)$$

или

$$\kappa = -\frac{r_3^2(s+2)^2}{16(s+1)}. \quad (5.201)$$

Для выяснения значения критерия κ представим квадратный трехчлен, стоящий в левой части уравнения (5.193), в виде

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 &= c_2 \left[\left(x + \frac{c_1}{2c_2} \right)^2 - \left(\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2} \right) \right] = \\ &= c_2 \left[\left(x + \frac{c_1}{2c_2} \right)^2 - \frac{4c_0^2}{c_1^2} \frac{c_1^2}{4c_0 c_2} \left(\frac{c_1^2}{4c_0 c_2} - 1 \right) \right] = \\ &= c_2 \left[\left(x + \frac{c_1}{2c_2} \right)^2 - \frac{4c_0^2}{c_1^2} \kappa (\kappa - 1) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что рассматриваемый квадратный трехчлен разлагается на два действительных множителя, если произведение $\kappa(\kappa - 1)$ положительно. Последнее имеет место, когда κ принимает любое отрицательное значение или когда κ положительно, но больше единицы.

Чтобы убедиться в правильности этого положения, рассмотрим рис. 5.24, представляющий кривую $y = \kappa(\kappa - 1)$, т. е. параболу, симметричную относительно прямой $\kappa = 1/2$. Произведение корней квадратного уравнения (5.193) равно

$$R_1 R_2 = \frac{c_0}{c_2} = \frac{4c_0^2}{c_1^2} \cdot \frac{c_1^2}{4c_0 c_2} = \frac{4c_0^2}{c_1^2} \cdot \kappa.$$

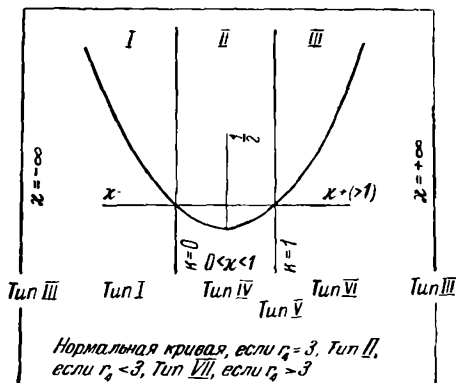


Рис. 5.24. Определение типа кривой по значениям критерия.

Отсюда следует, что если корни действительны, они будут одинакового знака, если κ положительно, и разного знака, если κ отрицательно.

Прямые $\kappa = 0$ и $\kappa = 1$ делят всю площадь рис. 5.24 на три части: в I части, где значения κ отрицательны и, следовательно,

$$D > c_1^2 > 0,$$

— корни действительные и разного знака; во II части, где значения κ лежат между 0 и 1 и, следовательно,

$$D < 0,$$

— корни мнимые; и в III части, где значения κ больше 1 и, следовательно,

$$0 < D < c_1^2,$$

— корни действительные и одинакового знака.

Рис. 5.24 носит название κ -диаграммы. На основании этой диаграммы мы можем по данному значению критерия установить тип кривой распределения.

Три значения критерия

1) $\kappa < 0$, 2) $0 < \kappa < 1$, 3) $\kappa > 1$ дают три главных типа кривых распределения.

Если значение критерия отрицательно, то получим первый из главных типов кривых распределения — тип I; если значение критерия положительно, но меньше единицы, то получим второй из главных типов кривых распределения — тип IV; если значение критерия положительно и больше единицы, то получим третий из главных типов кривых распределения — тип VI.

На границах указанных трех частей κ -диаграммы получаем частные случаи, которым соответствуют остальные — переходные — типы кривых распределения.

Если $\kappa = 0$, то получим или нормальную кривую, когда $r_4 = 3$ или тип II, когда $r_4 < 3$; или же тип VII, когда $r_4 > 3$. Если $\kappa = 1$, то будем иметь тип V. Наконец, если $\kappa = \pm \infty$, получим тип III.

В уравнениях всех кривых распределения типа I—VII переменная x представляет отклонение от наиболее частого значения

$$x = \frac{X - \bar{X}}{c}. \quad (5.202)$$

Как переменная x , так и все постоянные, входящие в уравнения кривых, кроме \bar{X} и \hat{X} , выражены в рабочих единицах, т. е. являются отвлеченными числами.

3. Тип I. Критерий типа I отрицателен:

$$\kappa < 0.$$

Уравнение кривой типа I имеет вид

$$\tilde{n}_i = \tilde{n}_0 \left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^{q_1} \left(1 - \frac{x}{l_2}\right)^{q_2}. \quad (5.203)$$

Здесь

$$\hat{X} = \bar{X} - \frac{\bar{\sigma}r_3}{2} \cdot \frac{s+2}{s-2}$$

и, следовательно [см. (5.202)],

$$x = x' - m_1 + \frac{\sigma r_3}{2} \cdot \frac{s+2}{s-2},$$

где $x' - m_1$ есть отклонение от среднего значения.

Размах распределения $l = l_1 + l_2$ определяется по формуле

$$l = +2\sigma \sqrt{(s+1)(1-\kappa)},$$

или

$$l = \frac{\sigma t}{2}.$$

Постоянные, входящие в уравнение (5.203), вычисляются по формулам

$$\left. \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (s-2) \mp s(s+2) \frac{r_3}{t} \right\},$$

$$l_1 = \frac{q_1 l}{s-2}, \quad l_2 = \frac{q_2 l}{s-2};$$

наконец,

$$\tilde{n}_0 = n \cdot \frac{l_1^{q_1} l_2^{q_2}}{l^{q_1+q_2+1}} \cdot \frac{\Gamma(q_1+q_2+2)}{\Gamma(q_1+1) \Gamma(q_2+1)}, \quad (5.204)$$

или

$$\tilde{n}_0 = \frac{n}{l} \cdot \frac{q_1^{q_1} q_2^{q_2}}{(s-2)^{s-2}} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(q_1+1) \Gamma(q_2+1)}. \quad (5.204')$$

В зависимости от величины показателей q_1 и q_2 в уравнении (5.203), каждый из которых должен быть больше -1 , можно различать три вида кривых типа I (рис. 5.25).

1. Если показатели q_1 и q_2 положительны, то из уравнения (5.203) непосредственно видно, что кривая достигает оси абсцисс в точках $x = -l_1$ и $x = l_2$, так как в этих точках $\tilde{n}_j = 0$. Из (5.203) также следует: а) что кривая имеет ограниченный размах распределения; б) что в промежутке между конечными точками функция возрастает с удалением от концов до точки $x = 0$, где функция достигает максимума; и в) что кривая асимметрична относительно точки \bar{X} , принятой здесь за начало. При этом, если показатели q_1 и q_2 не малы, то касательные на обоих концах кривой будут горизонтальными (рис. 5.25, а); если один из показателей, q_1 или q_2 , велик, а другой мал, то касательная на одном конце кривой будет горизонтальной, а на другом — вертикальной (рис. 5.25, б и в); если же и q_1 и q_2 малы, то касательные на обоих концах кривой будут вертикальными (рис. 5.25, г).

2. Если показатель q_1 отрицателен, а q_2 положителен (рис. 5.26, а), то уравнение примет вид

$$\tilde{n}_j = \tilde{n}_0 \left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^{-q_1} \left(1 - \frac{x}{l_2}\right)^{q_2}. \quad (5.205)$$

Ордината кривой в начальной точке равна ∞ , а в конечной точке равна 0. В промежутке между крайними точками функция непрерывно убывает с возрастанием x . Получается частный случай типа I, кривая вида $J(I_J)$ (Джей-образная кривая). Если при этом положительный показатель меньше 1, то кривая меняет свою кризису и называется изогнутой J -образной кривой (рис. 5.26, б).

Если показатель q_1 положителен, а q_2 отрицателен, то имеют место аналогичные кривые (рис. 5.26, в и з).

3. Если оба показателя, q_1 и q_2 , отрицательны, то уравнение примет вид

$$\tilde{n}_j = \tilde{n}_0 \left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^{-q_1} \left(1 - \frac{x}{l_2}\right)^{-q_2}. \quad (5.206)$$

Ординаты для обеих крайних точек на оси абсцисс равны ∞ ; с удалением от концов функция убывает до точки $x = 0$, в которой ордината имеет наименьшую величину. В этом случае получается кривая вида U (U_V) (рис. 5.26, д).

Хотя в последних двух случаях имеются бесконечные ординаты, однако площади под кривыми конечные.

Сопоставляя (5.203) и (5.149), мы видим, что кривая типа I представляет β -распределение первого рода.

Вычисление выравнивающих частот распределения типа I располагается в следующем порядке. В качестве примера

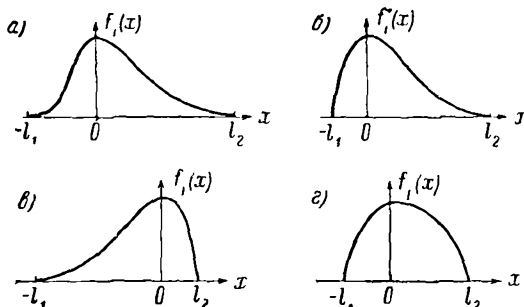


Рис. 5.25. Кривые распределения типа I: а) $q_1 > 1, q_2 > 1$; б) $0 < q_1 < 1, q_2 > 1$; в) $q_1 > 1, 0 < q_2 < 1$; г) $0 < q_1 < 1, 0 < q_2 < 1$.

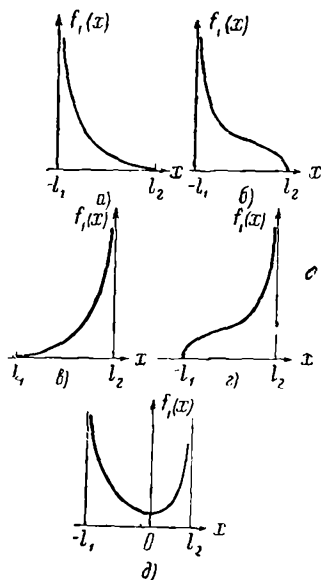


Рис. 5.26. Кривые распределения типа I: а) $-1 < q_1 < 0, q_2 > 1$; б) $-1 < q_1 < 0, 0 < q_2 < 1$; в) $q_1 > 1, -1 < q_2 < 0$; г) $0 < q_1 < 1, -1 < q_2 < 0$; д) $-1 < q_1 < 0, -1 < q_2 < 0$.

взят ряд распределения возраста научных работников СССР (в 1928 г.) в ‰ (табл. 3.1).

Прежде всего находятся статистики этого ряда:

$$\begin{aligned} m_1 &= +0,087, & m_2 &= 4,861, & m_3 &= +7,737, & m_4 &= 72,385, \\ \bar{X} &= 42,935, & \mu_2 &= 4,853, & \mu_3 &= +6,469, & \mu_4 &= 62,912, \\ \sigma &= 2,203, & r_3 &= +0,605, & r_3^2 &= 0,366, & r_4 &= 2,968. \end{aligned}$$

На основании полученных статистик вычисляется величина s по формуле (5.186):

$$s = \frac{6(2,968 - 0,366 - 1)}{3 \cdot 0,366 - 2 \cdot 2,968 + 6} = \frac{9,612}{1,162} = 8,272,$$

и величина t по формулам (5.197) и (5.198):

$$t = \sqrt{0,366 \cdot 10,272^2 + 16 \cdot 9,272} = \sqrt{38,618 + 148,352} = 13,674,$$

$$t = 4 \sqrt{9,272 \cdot 1,260} = 4 \sqrt{11,680} = 13,672,$$

а также критерий по формулам (5.200) и (5.201):

$$\kappa = \frac{0,366 \cdot 5,968^2}{44(4 \cdot 2,968 - 3 \cdot 0,366)(2 \cdot 2,968 - 3 \cdot 0,366 - 6)} = - \frac{13,036}{43,096 \cdot 1,162} = - 0,260,$$

$$\kappa = - \frac{0,366 \cdot 10,272^2}{16 \cdot 9,272} = - \frac{38,618}{148,352} = - 0,260.$$

Таким образом, мы можем для выравнивания рассматриваемого ряда взять кривую типа I.

Затем вычисляются постоянные по приведенным выше формулам:

$$\hat{X} = 42,935 - \frac{2,203 \cdot 5 \cdot 0,605}{2} \cdot \frac{10,272}{6,272} = 42,935 - 5,455 = 37,480;$$

$$\alpha^* = \frac{0,605}{2} \cdot \frac{10,272}{6,272} = 0,4954;$$

$$l = 2 \cdot 2,203 \sqrt{9,272 \cdot 1,260} = 15,060, \quad l = \frac{2,203 \cdot 13,674}{2} = 15,060;$$

$$q_1 = \frac{1}{2} \left\{ 6,272 - 8,272 \cdot 10,272 \cdot \frac{0,605}{13,674} \right\} = \frac{1}{2} \{ 6,272 - 3,752 \} = 1,256,$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \{ 6,272 + 3,752 \} = 5,016;$$

$$l_1 = \frac{1,256 \cdot 15,060}{6,272} = 3,017, \quad l_2 = \frac{5,016 \cdot 15,060}{6,272} = 12,043,$$

$$l_1 + l_2 = 15,060.$$

После этого вычисляется частота \tilde{n}_0 по формуле (5.204'):

$$\tilde{n}_0 = \frac{1000}{15,060} \cdot \frac{1,256^{1,256} \cdot 5,016^{5,016}}{6,272^{6,272}} \cdot \frac{\Gamma(8,272)}{\Gamma(2,256) \Gamma(6,016)}.$$

Логарифмируя это выражение, имеем

$$\begin{aligned}
 \lg 1000 &= 3 \\
 1,256 \lg 1,256 &= 0,12433 \\
 5,016 \lg 5,016 &= 3,51299 \\
 \lg \Gamma(8,272) &= 3,94265 \\
 - \lg 15,060 &= \bar{2},82218 \\
 - 6,272 \lg 6,272 &= \bar{6},99867 \\
 - \lg \Gamma(2,256) &= \bar{1},94423 \\
 - \lg \Gamma(6,016) &= \bar{3},90895 \\
 \hline
 \lg \tilde{n}_0 &= 2,25390
 \end{aligned}$$

откуда

$$\tilde{n}_0 = 179,43.$$

Следовательно, выравнивающая частота \tilde{n}_j разрядного значения $X_{(j)}$ равна

$$\tilde{n}_j = 179,43 \left(1 + \frac{x_{(j)}}{3,017}\right)^{1,256} \left(1 - \frac{x_{(j)}}{12,043}\right)^{5,016}.$$

Вычисление выравнивающих частот по этой формуле приведено в табл. 5.16.

Вычисление частоты первого разряда (от 20 до 25 лет) производится особо. Так как $\hat{X} = 37,480$, а $l_1 \times c = 3,017 \times 5 = 15,085$, то начало кривой находится в точке

$$37,480 - 15,085 = 22,395.$$

Поэтому первый разряд имеет длину $25 - 22,396 = 2,605$, или — в рабочих единицах —

$$\frac{2,605}{5} = 0,521.$$

Для вычисления частоты первого разряда определяются ординаты в начале середине и конце основания разряда ($y_0, y_{1/2}, y_1$), после чего, применяя формулу парабол, находим искомую частоту \tilde{n}_1 разряда, а именно

$$\tilde{n}_1 = \frac{n}{6} \cdot 0,521 \cdot (y_0 + 4y_{1/2} + y_1). \quad (5.207)$$

При этом умножение на 0,521 необходимо для того, чтобы учесть разницу в длине основания.

Вычисляя ординату $y_{1/2}$ в середине основания, имеем (см. столбец (2) схемы):

$$x = \frac{-2,996 - 1,996}{2} - \frac{0,521}{2} = -2,7565,$$

$$\frac{x}{l_1} = \frac{-2,7565}{3,017} = -0,9136, \quad 1 + \frac{x}{l_1} = 0,0864,$$

$$\frac{x}{l_2} = \frac{-2,7565}{12,043} = -0,2289, \quad 1 - \frac{x}{l_2} = 1,2289,$$

$$1,256 \lg 0,0864 = \bar{2},66426$$

$$5,016 \lg 1,2289 = 0,44903$$

$$\lg \tilde{n}_0 = 2,25390$$

$$\lg(n \cdot y_{l_2}) = 1,36719$$

Следовательно,

$$n \cdot y_{l_2} = 23,29.$$

Вычисляя ординату в конце основания, получим

$$n \cdot y_1 = 50,44;$$

ордината же в начале основания, очевидно, равна нулю.

Таким образом, выравнивающая частота первого разряда равна

$$\tilde{n}_1 = \frac{1}{6} \cdot 0,521 (0 + 4 \cdot 23,29 + 50,44) = 12,47.$$

Представив выравнивающие и наблюдаемые частоты рассматриваемого ряда на чертеже (рис. 5.27), мы видим, что кружки,

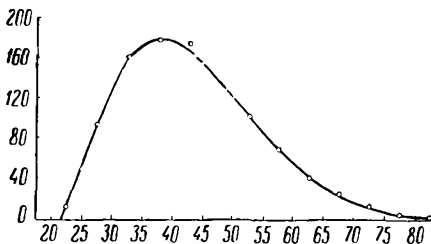


Рис. 5.27. Распределение возраста научных работников СССР (1928 г.) (тип. I).

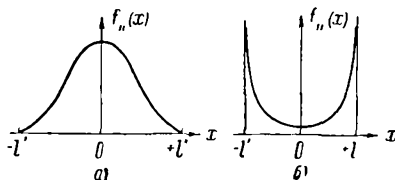


Рис. 5.28. Кривые распределения: а) тип II; б) тип II_U.

изображающие наблюдаемые частоты, очень близко располагаются около выравнивающей кривой распределения.

4. Тип II. В случае кривой распределения типа II

$$\kappa = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_4 < 3.$$

Кривая представляет частный случай типа I (5.203) и выражается уравнением

$$\tilde{n}_j = \tilde{n}_0 \left(1 - \frac{x^2}{l'^2}\right)^q. \quad (5.208)$$

Уравнение показывает, что кривая симметрична относительно центральной ординаты, имеет конечный размах распределения, определяемый точками $x = -l'$ и $x = +l'$.

Так как здесь $\hat{X} = \bar{X}$, то переменная x равна

$$x = x' - m_1$$

(рис. 5.28, а).

Постоянные q и l' находятся по формулам

$$q = \frac{5r_4 - 9}{2(3 - r_4)}, \quad l' = \sigma \sqrt{\frac{2r_4}{3 - r_4}}.$$

Величина q обращается в нуль при $r_4 = 1,8$ и при дальнейшем уменьшении r_4 становится отрицательной. Таким образом, при

$$\kappa = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_4 < 1,8$$

будем иметь

$$\tilde{n}_l = \tilde{n}_0 \left(1 - \frac{x^2}{l'^2}\right)^{-q}. \quad (5.209)$$

Ординаты крайних точек этой кривой равны ∞ , т. е. кривая оканчивается вида U ($\Pi_{l'}$) (рис. 5.28, б).

Выражение для \tilde{n}_0 получим, если в формуле (5.204) положим

$$q_1 = q_2 = q, \quad l_1 = l_2 = l' = \frac{l}{2}.$$

Имеем

$$\tilde{n}_0 = \frac{n}{2^{2q+1}l'} \cdot \frac{\Gamma(2q+2)}{[\Gamma(q+1)]^2}. \quad (5.210)$$

Вычисление выравнивающих частот \tilde{n}_j производится при помощи логарифмов. Замечая, что

$$1 - \frac{x^2}{l'^2} = \left(1 + \frac{x}{l'}\right)\left(1 - \frac{x}{l'}\right),$$

и логарифмируя (5.208), получим

$$\lg \tilde{n}_l = \lg \tilde{n}_0 + q \left[\lg \left(1 + \frac{x}{l'}\right) + \lg \left(1 - \frac{x}{l'}\right) \right].$$

Пример. Рассмотрим ряд распределения остаточного удлинения болтового железа (%)*:

| | | | | | | | | | | |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----------|
| $X_{(j)}$: | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | Σ |
| n_j : | 1 | 6 | 27 | 40 | 54 | 45 | 23 | 7 | 2 | 205 |

Статистики этого ряда равны:

$$\begin{aligned} m_1 &= +0,0195, & m_2 &= 2,1951, & m^3 &= +0,3122, & m_4 &= 13,2000, \\ \check{m}_2 &= 2,1114, & \mu_3 &= +0,1838, & \check{\mu}_4 &= 12,1126, & \bar{X} &= 34,039. \\ \sigma &= 1,453, & r_3 &= +0,060, & r_4 &= 2,717, \\ & & s &= 17,823, & \kappa &= -0,005, \end{aligned}$$

*) Беккер, Плаут и Рунге, 1933, стр. 25 (VII, 10а).

Так как критерий χ кривой практически равен нулю, а четвертый основной момент меньше 3, то для выравнивания рассматриваемого ряда можно взять кривую типа II.

Постоянные уравнения (5.208) равны:

$$q = 8,101, \quad l'^2 = 40,542, \quad l' = 6,367.$$

Вычисляя \tilde{n}_0 по формуле (5.210), имеем

$$\begin{array}{r} \lg 205 = 2,31175 \\ \lg \Gamma(18,202) = 14,80237 \\ - 17,202 \lg 2 = \bar{6},82168 \\ \quad - \lg 6,367 = \bar{1},19607 \\ - 2 \lg \Gamma(9,101) = \bar{10},60042 \\ \hline 1,73229 = \lg \tilde{n}_0, \end{array}$$

откуда

$$\tilde{n}_0 = 54,0.$$

Таким образом, формула для выравнивающих частот будет иметь вид

$$\tilde{n}_I = 54,0 \left(1 - \frac{x^2}{40,542} \right)^{8,101},$$

ИЛИ

$$\lg \tilde{n}_j = \lg 54,0 + 8,101 \left[\lg \left(1 + \frac{x}{6.357} \right) + \lg \left(1 - \frac{x}{6.357} \right) \right].$$

Вычисление выравнивающих частот по этой формуле располагается в табл. 5.17.

Таблица 5.17

Схема вычисления выравнивающих частот в случае распределения типа II
(ряд распределения остаточного удлинения болтового железа)

[illegible]

Сравнение наблюдаемых и выравнивающих частот представлено на рис. 5.29.

5. Тип III. Для кривой типа III

$$\kappa = \pm \infty.$$

Уравнение кривой типа III имеет вид

$$\tilde{n}_j = \tilde{n}_0 \left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^p e^{-px/l_1}. \quad (5.211)$$

Из этого уравнения видно, что кривая типа III асимметрична и ограничена в одном направлении точкой $x = -l_1$.

Здесь $\hat{X} = \bar{X} - \frac{\bar{\sigma}r_3}{2}$ и, следова-

тельно,

$$x = x' - m_1 + \frac{\sigma r_3}{2}.$$

Постоянные, входящие в уравнение (5.211), находятся по формулам

$$p = \frac{4}{r_3^2} - 1, \quad l_1 = \sigma \left(\frac{2}{r_3} - \frac{r_3}{2} \right); (*)$$

$$\tilde{n}_0 = \frac{n}{l_1} \cdot \frac{p+1}{e^p \Gamma(p+1)}. \quad (5.212)$$

Рис. 5.29. Распределение остаточного удлинения болтового железа (тип II).

В зависимости от того, какие значения принимают величины p и l_1 , кривые типа III оказываются разного вида (рис. 5.30).

Если $p > 1$, то кривая является одновершинной с горизонтальной касательной в точке l_1 . При этом, если $l_1 > 0$, то кривая имеет положительную косость и асимптотически приближается к горизонтальной оси при $x \rightarrow +\infty$ (рис. 5.30, а); если же $l_1 < 0$, то кривая имеет отрицательную косость и асимптотически приближается к горизонтальной оси при $x \rightarrow -\infty$ (рис. 5.30, б).

Если $0 < p < 1$, то кривая является одновершинной с вертикальной касательной в точке $-l_1$, причем при $l_1 > 0$ косость кривой положительна (рис. 5.30, в), а при $l_1 < 0$ косость кривой отрицательна (рис. 5.30, г).

Наконец, если $-1 < p < 0$, то кривая будет вида J и будет асимптотически приближаться к горизонтальной оси при $x \rightarrow +\infty$, если $l_1 > 0$, или при $x \rightarrow -\infty$, если $l_1 < 0$ (рис. 5.30, д и е).

Так как всегда можно считать $r_3 > 0$ (этого можно достигнуть перемены знака у x), то размах распределения будет

$$-l_1 < x < +\infty.$$

Сопоставляя (5.211) с (5.142), мы видим, что кривая типа III представляет гамма-распределение.

Среди кривых распределения типа I—VII наиболее широкое применение имеет кривая типа III. Объясняется это тем, что хотя при выводе уравнения этой кривой предполагается $\kappa = \pm \infty$, однако на практике кривая этого типа дает хорошее согласие с наблюдаемым рядом распределения, если $|\kappa| > 4$.

Пример. Рассмотрим ряд распределения скорости ветра в Московской области (в м/сек) в процентах ($n = 40\,000$ *):

| | | | | | | | | | | |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|----------|
| $x_{(j)}$: | 1,5 | 3,5 | 5,5 | 7,5 | 9,5 | 11,5 | 13,5 | 15,5 | 17,5 | Σ |
| n_j : | 24 | 34 | 23 | 10 | 5 | 2 | 1 | — | 1 | 100 |

Статистики этого ряда равны:

$$\begin{aligned} m_1 &= -0,46, & m_2 &= 2,30, & m_3 &= +1,58, & m_4 &= 22,22, \\ \mu_2 &= 2,0884, & \mu_3 &= 4,5593, & \mu_4 &= 27,9123, & \bar{X} &= 4,58 \text{ м/сек}, \\ \sigma_1 &= 1,4451, & r_3 &= +1,5108, & r_4 &= 6,4004, \\ s &= 400,59, & \kappa &= -57,6. \end{aligned}$$

Следовательно, данный ряд можно выравнивать по кривой типа III.

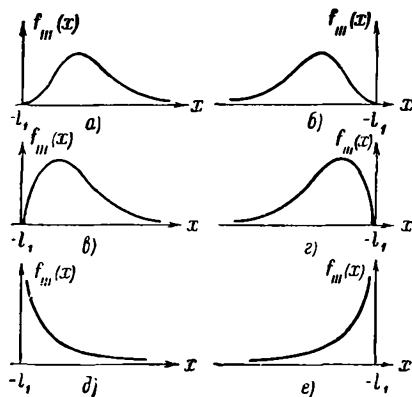


Рис. 5.30 Кривые распределения типа III: а) $p > 1$, $l_1 > 0$; б) $p > 1$, $l_1 < 0$; в) $0 < p < 1$, $l_1 > 0$; г) $0 < p < 1$, $l_1 < 0$; д) $-1 < p < 0$, $l_1 > 0$; е) $-1 < p < 0$, $l_1 < 0$.

По формулам (*) вычисляются постоянные, входящие в уравнение (5.211). Имеем

$$p = 0,7525, \quad l_1 = 0,8214, \quad \hat{X} = 2,397.$$

*) Н. С. Стрелецкий, 1940, стр. 28 (VII, 106).

Наконец, по формуле (5.212) находится \tilde{n}_0 :

$$\lg \tilde{n}_0 = 1,57867, \quad \tilde{n}_0 = 37,93.$$

Таким образом, формула, выравнивающая наблюдаемые частоты ряда распределения скорости ветра в Московской области, имеет вид

$$\tilde{n}_j = 37,93 \left(1 + \frac{x}{0,8214} \right)^{0,7525} e^{-0,916x}.$$

При вычислении частот кривой типа III применяются логарифмы. На основании (5.211) имеем

$$\lg \tilde{n}_j = \lg \tilde{n}_0 + p \lg \left(1 + \frac{x}{l_1} \right) - p \frac{x}{l_1} \lg e. \quad (5.213)$$

В соответствии с этим схема вычисления частот имеет вид табл. 5.18.

Таблица 5.18

Схема вычисления выравнивающих частот в случае распределения типа III
(ряд распределения скорости ветра в Московской области)

| $X(j)$ | n_j | $x = \frac{X - \hat{X}}{c}$ | $1 + \frac{x}{l_1}$ | $\lg \left(1 + \frac{x}{l_1} \right)$ | $p \lg \left(1 + \frac{x}{l_1} \right)$ | $x \cdot \frac{p}{l_1} \lg e$ | $\lg \tilde{n}_j$ | \tilde{n}_j |
|----------|-------|-----------------------------|---------------------|--|--|-------------------------------|-------------------|---------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) |
| 1,5 | 24 | -0,448 | — | — | — | — | — | 26,0 |
| 3,5 | 34 | +0,552 | 1,672 | 0,22324 | 0,16799 | 0,21961 | 1,52702 | 33,7 |
| 5,5 | 23 | 1,552 | 2,889 | 0,46075 | 0,34671 | 0,61746 | 1,30788 | 20,4 |
| 7,5 | 10 | 2,522 | 4,107 | 0,61352 | 0,46167 | 1,01532 | 1,02499 | 10,6 |
| 9,5 | 5 | 3,552 | 5,324 | 0,72624 | 0,54650 | 1,41317 | 0,71197 | 5,2 |
| 11,5 | 2 | 4,552 | 6,542 | 0,81571 | 0,61382 | 1,81103 | 0,38143 | 2,4 |
| 13,5 | 1 | 5,552 | 7,759 | 0,88981 | 0,66958 | 2,20888 | 0,03934 | 1,1 |
| 15,5 | — | 6,522 | 8,976 | 0,95308 | 0,71719 | 2,60673 | 1,68910 | 0,5 |
| 17,5 | 1 | 7,552 | 10,194 | 1,00834 | 0,75878 | 3,00459 | 1,33283 | 0,2 |
| Σ | 100 | — | — | — | — | — | — | 100,1 |

Вычисление частот первого разряда (от 0,5 до 2,5 м/сек) производится так же, как в случае кривой типа I.

Так как

$$\hat{X} = 2,397, \quad l_1 \times c = 0,8214 \cdot 2 = 1,6428,$$

то начало кривой находится в точке

$$2,397 - 1,643 = 0,754;$$

следовательно, первый разряд имеет длину

$$2,5 - 0,754 = 1,746,$$

или — рабочих единицах —

$$\frac{1,745}{2} = 0,873.$$

Определим теперь ординаты начала, середины и конца основания первого разряда $(y_0, y_{1/2}, y_1)$.

Вычисляя $y_{1/2}$, имеем

$$x = \frac{-0,448 + 0,552}{2} - \frac{0,873}{2} = -0,3845, \quad \frac{x}{l_1} = \frac{-0,3845}{0,8214} = -0,4681,$$

$$1 + \frac{x}{l_1} = 0,5319, \quad \lg\left(1 + \frac{x}{l_1}\right) = \bar{1},72583,$$

$$p \lg\left(1 + \frac{x}{l_1}\right) = 1,79366, \quad p \frac{x}{l_1} \lg e = -0,17385.$$

Следовательно [см. (5.213)],

$$\lg \tilde{n}_0 = 1,57867$$

$$p \lg\left(1 + \frac{x}{l_1}\right) = 1,79366$$

$$- p \frac{x}{l_1} \lg e = \frac{0,17385}{1,54618} = \lg(ny_{1/2}),$$

откуда

$$n \cdot y_{1/2} = 35,17.$$

Вычисляя ординату в конце основания y_1 , имеем

$$x = 0,052, \quad 1 + \frac{x}{l_1} = 1,0633, \quad p \lg\left(1 + \frac{x}{l_1}\right) = 0,02006, \quad p \frac{x}{l_1} \lg e = 0,02069.$$

Следовательно,

$$\lg \tilde{n}_0 = 1,57867$$

$$p \lg\left(1 + \frac{x}{l_1}\right) = 0,02006$$

$$- p \frac{x}{l_1} \lg e = \frac{\bar{1},97931}{1,57804} = \lg(ny_1),$$

откуда

$$n \cdot y_1 = 37,85.$$

Ордината же в начале основания y_0 равна нулю.

Применяя затем формулу парабол (5.207) (учитывая найденную выше длину основания 0,873), получим частоту первого ряда

$$\tilde{n}_1 = \frac{1}{6} \cdot 0,873(0 + 4 \cdot 35,17 + 37,85) = 26,0.$$

Представив выравнивающие и наблюдаемые частоты рассматриваемого ряда распределения на чертеже (рис. 5.31), мы видим хорошее согласие между ними.

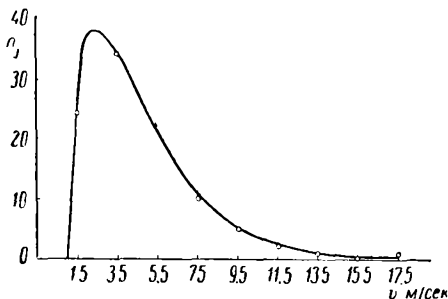


Рис. 5.31. Распределение скорости ветра в Московской области (тип III).

6. Тип IV. Критерий кривой распределения типа IV находится между 0 и 1:

$$0 < \kappa < 1.$$

Уравнение кривой типа IV имеет вид

$$\tilde{n}_l = \tilde{n}_0 \left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right)^{-q} e^{-v \operatorname{arctg} \frac{x}{l}}. \quad (5.214)$$

Уравнение (5.214) показывает, что кривая типа IV асимметрична с размахом распределения, неограниченным в обоих направлениях: $-\infty < x < +\infty$ (рис. 5.32, а). Переменная x равна

$$x = x' - m_1 - \frac{v}{r} l. \quad (*)$$

Постоянные, входящие в уравнения (5.214), определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{6(r_4 - r_3^2 - 1)}{2r_4 - 3r_3^2 - 6} = -s, & q &= \frac{r+2}{2}, \\ v &= -\frac{r(r-2)r_3}{\sqrt{16(r-1) - r_3^2(r-2)^2}}, & l &= \frac{\sigma}{4} \sqrt{16(r-1) - r_3^2(r-2)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

$$\tilde{n}_0 = \frac{n}{l} \cdot \frac{1}{F(r, v)}. \quad (5.215)$$

Имеется таблица логарифмов функции $F(r, v)$ (табл. XIV). В левом заголовке этой таблицы дано

$$\varphi^\circ = \arctg \frac{|v|}{r}. \quad (**)$$

Из (**) имеем $\lg \varphi^\circ = \frac{|v|}{r}$, и, следовательно, величина φ° может быть найдена по таблице значений тангенсов.

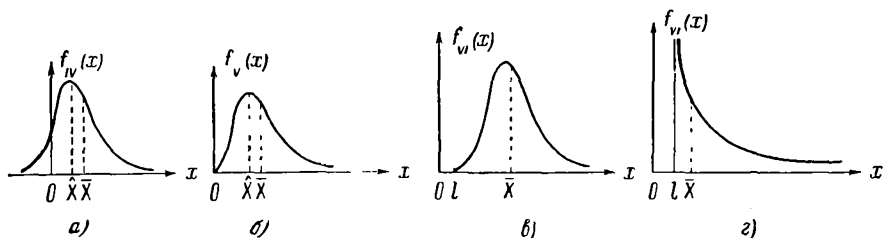


Рис. 5.32. Кривые распределения: а) тип IV; б) тип V; в) тип VI; г) тип VII.

Вычисление выравнивающих частот \tilde{n}_j производится при помощи логарифмов

$$\lg \tilde{n}_j = \lg \tilde{n}_0 - q \lg \left(1 + \frac{x^2}{l^2} \right) - v \arctg \frac{x}{l} \lg e. \quad (5.216)$$

Пример. Рассмотрим ряд распределения хрупкости эбонита (в $\frac{\text{кг} \cdot \text{см}}{\text{см}^3}$):

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| $X_{(j)}$: | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,3 | 2,5 | 2,7 | 2,9 | 3,1 | 3,3 | 3,5 | 3,7 | Σ |
| n_j : | 2 | 5 | 14 | 33 | 67 | 123 | 160 | 172 | 153 | 112 | 68 | 41 | 25 | 14 | 7 | 3 | 1 | 1000 |

Статистики этого ряда равны:

$$\begin{aligned} m_1 &= +0,183, & \check{m}_2 &= 5,909, & r_3 &= +0,310, \\ m_2 &= 6,025, & \mu_3 &= 4,448, & r_3^2 &= 0,096, \\ m_3 &= +7,743, & \check{m}_4 &= 118,932, & r_4 &= 3,321, \\ m_4 &= 122,409, & \sigma &= 2,431, & X_{(a)} &= 1,9 \frac{\text{кг} \cdot \text{см}}{\text{см}^3}. \end{aligned}$$

Для определения типа кривой распределения вычисляются s и κ по формулам (5.186), (5.200) с проверкой по формуле (5.201).

$$s = \frac{6(3,321 - 0,096 - 1)}{0,288 - 6,642 + 6} = \frac{13,350}{-0,354} = -37,712;$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{0,096 \cdot (3,321 + 3)^2}{4 \cdot (4 \cdot 3,321 - 3 \cdot 0,096) (2 \cdot 3,321 - 3 \cdot 0,096 - 6)} = \\ &= \frac{0,096 \cdot 39,955}{4 \cdot 12,996 \cdot 0,354} = \frac{3,836}{18,404} = +0,208, \end{aligned}$$

$$\kappa = -\frac{0,096 \cdot (-37,712)^2}{16 \cdot (-36,712)} = \frac{122,420}{587,392} = +0,208.$$

Таким образом, мы имеем кривую распределения типа IV. Применяя (**), находим

$$r = -s = 37,712, \quad q = \frac{37,712 + 2}{2} = 19,856,$$

$$v = - \frac{37,712 \cdot 35,712 \cdot 0,310}{\sqrt{16 \cdot 36,712 - 0,096 \cdot (35,712)^2}} = - \frac{417,499}{\sqrt{587,392 - 122,420}} = - \frac{417,499}{25,51} = -19,355,$$

$$l = \frac{2,431}{4} \sqrt{16 \cdot 36,712 - 0,096 \cdot (35,712)^2} = 0,608 \cdot 21,57 = 13,115.$$

Для вычисления \tilde{n}_0 логарифмируем (5.215):

$$\lg \tilde{n}_0 = \lg n - \lg l - \lg F(r, v). \quad (5.217)$$

Применяя (**), находим

$$\varphi = \arctg \frac{|-19,355|}{37,712} = \arctg 0,5132,$$

откуда $\lg \varphi = 0,5132$. По таблице тангенсов находим $\varphi = 27^\circ 10'$, или, так как $6' = 0,1^\circ$, получим

$$\varphi = 27,17^\circ.$$

Вычисление $\lg F(r, v)$ для значений $\varphi = 27,17^\circ$ и $r = 37,712$ по табл. XIV производится при помощи линейного интерполирования (5.111) (табл. 5.19).

Т а б л и ц а 5.19

Вычисление $\lg F(r, v)$ для $\varphi = 27,17^\circ$ и $r = 37,712$

| | $r = 37$ | $r = 38$ |
|--|----------|----------|
| $\varphi = 27^\circ$ | 1,56661 | 1,61503 |
| $\varphi = 28^\circ$ | 1,73382 | 1,78687 |
| Δ | 0,16721 | 0,17184 |
| $\Delta \cdot 0,17$ | 0,02843 | 0,02921 |
| $\varphi = 27,17^\circ$ | 1,59504 | 1,64424 |
| $\delta = 1,64424 - 1,59504 = 0,04920, \delta \cdot 0,720 = 0,03503$ | | |
| $\lg F(r, v) = 1,59504 + 0,03503 = 1,63007$ | | |

По формуле (5.217) находим

$$\lg \tilde{n}_0 = \lg 1000 - \lg 13,115 - \lg F(r, \nu) = \\ = 3 - 1,11777 - 1,63007 = 0,25216.$$

Наконец, замечая, что в рассматриваемом примере

$$m_1 = +0,183 \quad \text{и} \quad \frac{\nu}{r} l = -6,731,$$

мы можем переменную (*) уравнения (5.214) представить в виде

$$x = x' - 0,183 + 6,731 = x' + 6,548,$$

где x' есть отклонение от начального значения, которое в рассматриваемом примере равно $1,9 \frac{\text{кг} \cdot \text{см}}{\text{см}^3}$.

Вычисление выравнивающих частот по формуле (5.216) располагается по схеме табл. 5.20. (Для получения выравнивающих частот с точностью до единицы достаточно ограничиться при вычислениях четырехзначными таблицами *).)

Наблюденные и выравнивающие частоты представлены на рис. 5.33.

7. Тип V. Критерий кривой распределения типа V равен единице:

$$\kappa = 1.$$

Уравнение кривой типа V имеет вид

$$\tilde{n}_j = \tilde{n}_0 x^{-p} e^{-\frac{\nu}{x}}. \quad (5.218)$$

Здесь x не может принимать отрицательных значений, так что кривая асимметрична и ограничена в одном направлении $0 \leq x < \infty$ (рис. 5.32, б).

Постоянные, входящие в уравнение кривой, определяются по формулам

$$p = 4 + \frac{8 + 4 \sqrt{4 + r_3^2}}{r_3^2}, \quad \nu = \sigma(p - 2) \sqrt{p - 3},$$

причем знак ν такой же, как и знак r_3 .

Переменная x уравнения (5.218) равна

$$x = x' - m_1 + \frac{\nu}{p - 2}.$$

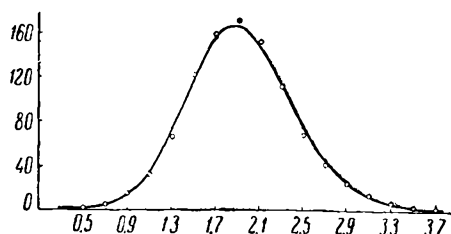


Рис. 5.33. Распределение хрупкости эбонита (тип IV).

*) А. К. Митропольский, Краткие математические таблицы, 4 изд., «Наука», 1968: табл. 2 — квадраты, табл. 11 — десятичные логарифмы, табл. 24 — тангенсы, табл. 36 — арктангенсы.

Наконец,

$$\tilde{n}_0 = \frac{n\gamma^{p-1}}{\Gamma(p-1)}. \quad (5.219)$$

Вычисление выравнивающих частот \tilde{n}_j производится при помощи логарифмов

$$\lg \tilde{n}_j = \lg \tilde{n}_0 - p \lg x - \frac{1}{x} \gamma \lg e. \quad (5.220)$$

Пример. Рассмотрим ряд распределения процентного содержания кремния в рельсовых маргеновских плавках, подвергнутых копровому испытанию (в ‰, $n = 4850$)*:

| | | | | | | | | | | | |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $X_{(j)}$: | 0,04 | 0,08 | 0,12 | 0,16 | 0,20 | 0,24 | 0,28 | 0,32 | 0,36 | 0,40 | Σ |
| n_j : | 3 | 11 | 99 | 346 | 288 | 148 | 83 | 15 | 6 | 1 | 1000 |

Статистики этого ряда равны:

$$\begin{aligned} m_1 &= -0,201, & m_2 &= 1,625, & m_3 &= +0,099, & m_4 &= 8,441, \\ \bar{X} &= 0,192, & \check{m}_2 &= 1,585, & \mu_3 &= +1,058, & \check{m}_4 &= 8,905, \\ \sigma &= 1,259, & r_3 &= +0,530, & r_3^2 &= 0,281, & r_4 &= 3,545. \end{aligned}$$

Для определения типа кривой распределения находим

$$\begin{aligned} s &= \frac{6 \cdot (3,545 - 0,281 - 1)}{3 \cdot 0,281 - 2 \cdot 3,545 + 6} = -\frac{13,584}{0,247} = -54,996, \\ \kappa &= -\frac{0,281 \cdot (-52,996)^2}{16 \cdot (-53,996)} = +\frac{789,329}{863,936} = +0,914. \end{aligned}$$

Для проверки вычислим κ по формуле (5.200):

$$\kappa = \frac{0,281 \cdot (6,545)^2}{4 \cdot (4 \cdot 3,545 - 3 \cdot 0,281) (7,090 - 0,843 - 6)} = \frac{12,037}{13,178} = +0,914.$$

Так как $\kappa \approx 1$, то для выравнивания рассматриваемого ряда можно взять кривую типа V.

Постоянные p и γ , входящие в уравнение (5.218), равны:

$$\begin{aligned} p &= 4 + \frac{8 + 4\sqrt{4 + 0,281}}{0,281} = 4 + \frac{8 + 8,276}{0,281} = 61,922, \\ \gamma &= 1,259 \cdot 59,922 \sqrt{58,922} = 579,093. \end{aligned}$$

На основании этих величин находим

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{p-2} &= \frac{579,093}{59,922} = 9,664, \\ \gamma \cdot \lg e &= 579,093 \cdot 0,43429 = 251,49429. \end{aligned}$$

*) А. И. Скаков, 1951, стр. 51—55 (VII, 106).

[illegible]

Вычисление выравнивающих частот приведено в табл. 5.21. Наблюденные и выравнивающие частоты представлены на рис. 5.34.

8. Тип VI. Критерий кривой типа VI находится в пределах от 1 до ∞ :

$$1 < \kappa < \infty.$$

Уравнение кривой типа VI имеет вид

$$\tilde{n}_i = \tilde{n}_0 x^{-q_1} (x - l)^{q_2}. \quad (5.221)$$

Эта кривая асимметрична и ограничена в одном направлении точкой $x = l$: $l < x < \infty$. Если $\mu_3 < 0$, то $l < 0$ и размах распределения будет от $-\infty$ до $-l$.

Постоянная s всегда отрицательна и $q_1 > q_2$. Если $q_2 > 0$, то кривая является одновершинной (рис. 5.32, в); при $q_2 < 0$ кривая становится J-образной (рис. 5.32, з).

Постоянные q_1 , q_2 и l находятся по формулам

$$\left. \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ s(s+2) \frac{r_3}{t} \mp (s-2) \right\},$$

$$l = \frac{\sigma t}{2}.$$

Наконец,

$$\tilde{n}_0 = \frac{n l^{q_1 - q_2 - 1} \Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1 - q_2 - 1) \Gamma(q_2 + 1)} \quad (5.222)$$

и

$$\lg \tilde{n}_0 = \lg n + (q_1 - q_2 - 1) \lg l + \lg \Gamma(q_1) - \lg \Gamma(q_1 - q_2 - 1) - \lg \Gamma(q_2 + 1). \quad (5.223)$$

Переменная x в уравнении (5.221) равна

$$x = x' - m_1 + \frac{(q_1 - 1)l}{q_1 - q_2 - 2}.$$

Значение \tilde{n}_0 не соответствует какой-либо частоте ряда распределения, так как относится к точке, расположенной до начала кривой.

Пример. Рассмотрим ряд распределения *):

| | | | | | | | | |
|-------------|---|----|-----|----|----|---|---|-----|
| $X_{(j)}$: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| n_j : | 1 | 56 | 167 | 98 | 34 | 9 | 2 | 368 |

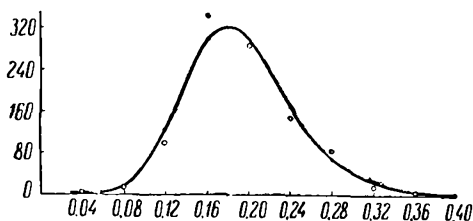


Рис. 5.34. Распределение процентного содержания кремния в рельсовых маргеновских плавках (тип V).

*) Эльдертон, 1924, стр. 70 (III).

Статистики этого ряда равны:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,40217, & m_2 &= 1,17391, & m_3 &= 2,17935, & m_4 &= 7,01087, \\ \mu_2 &= 1,01217, & \check{\mu}_2 &= 0,92884, & \sigma &= 0,96377, \\ \mu_3 &= 0,89310, & \mu_4 &= 4,56580, & \check{\mu}_4 &= 4,08880, \\ r_3 &= 0,99767, & r_3^2 &= 0,99534, & r_4 &= 4,73932. \end{aligned}$$

Для определения типа кривой находим

$$\begin{aligned} s &= \frac{6(4,73932 - 0,99534 - 1)}{3 \cdot 0,99534 - 2 \cdot 4,73932 + 6} = \frac{16,46338}{-0,49268} = -33,42004, \\ t &= \sqrt{0,99534(-31,42004)^2 + 16(-32,42004)} = \\ &= \sqrt{982,61597 - 518,72064} = \sqrt{463,89533} = 21,53820. \\ \kappa &= -\frac{0,99534 \cdot (-31,42004)^2}{16 \cdot (-32,42004)} = +\frac{982,61597}{518,72064} = +1,894. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем кривую типа VI.

Постоянные, входящие в уравнение (5.221), равны

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2} \left\{ -33,42004(-31,42004) \frac{0,99767}{21,53820} - (-35,42004) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} (1050,05899 \cdot 0,04632 + 35,42004) = \\ &= \frac{1}{2} (48,63873 + 35,42004) = 42,02938, \end{aligned}$$

$$q_2 = \frac{1}{2} (48,63873 - 35,42004) = 6,60934,$$

$$l = \frac{0,96377 \cdot 21,53820}{2} = \frac{20,75737}{2} = 10,37868.$$

Логарифм \tilde{n}_0 определяется по формуле (5.223):

| | |
|-------------------------|----------|
| lg n_0 = | 2,56585 |
| = lg 368 | 34,97627 |
| + 34,42004 lg 10,37868 | 49,57197 |
| + lg $\Gamma(42,02938)$ | 38,41965 |
| - lg $\Gamma(34,42004)$ | 4,63449 |
| - lg $\Gamma(7,60934)$ | 46,16823 |

Переменная x в уравнении (5.221) равна

$$\begin{aligned} x &= x' - 0,40217 + \frac{41,02938 \cdot 10,37868}{33,42004} = x' - 0,40217 + \frac{425,83080}{33,42004} = \\ &= x' - 0,40217 + 12,74180 = x' + 12,33963. \end{aligned}$$

Таким образом, начало распределения находится в точке 12,74180 до среднего значения, или в точке 12,33963 от центра разряда с наибольшей частотой $n_j = 167$, и кривая начинается в точке

$$12,33963 - 10,37868 = 1,96090$$

до центра этого разряда.

Вычисление выравнивающих частот располагается по схеме табл. 5.22.

Таблица 5.22

Схема вычисления выравнивающих частот в случае распределения типа VI

| $x_{(j)}$ | n_j | $x = x' + 12,3396$ | $x - l = (3) - 10,3787$ | $\lg x$ | $\lg (x - l)$ | $-q_1 \lg x$ | $q_2 \lg (x - l)$ | $\lg \tilde{n}_j = \lg \tilde{n}_0 + (7) + (8)$ | \tilde{n}_j |
|-----------|-------|--------------------|-------------------------|---------|---------------|--------------|-------------------|---|---------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
| 1 | 1 | 10,3396 | | | | | | | 1 |
| 2 | 56 | 11,3396 | 0,9609 | 1,05460 | 1,98268 | -44,32418 | 1,88553 | 1,72948 | 53,6 |
| 3 | 167 | 12,3396 | 1,9609 | 1,09130 | 0,29246 | -45,86668 | 1,93297 | 2,23394 | 171,4 |
| 4 | 98 | 13,3396 | 2,9609 | 1,12514 | 0,47142 | -47,28894 | 3,11578 | 1,99506 | 98,9 |
| 5 | 34 | 14,3396 | 3,9609 | 1,15654 | 0,59779 | -48,60866 | 3,95106 | 1,51057 | 32,4 |
| 6 | 9 | 15,3396 | 4,9609 | 1,78582 | 0,69555 | -49,83928 | 4,59713 | 0,92608 | 8,4 |
| 7 | 2 | 16,3396 | 5,9609 | 1,81322 | 0,77531 | -50,99088 | 5,12429 | 0,29764 | 2,0 |
| 8 | 1 | 17,3396 | 6,9609 | 1,23903 | 0,84267 | -52,07566 | 5,56949 | 1,66206 | 0,5 |
| Σ | 368 | — | — | — | — | — | — | — | 368,2 |

Наблюденные и выравнивающие частоты изображены на рис. 5.35.

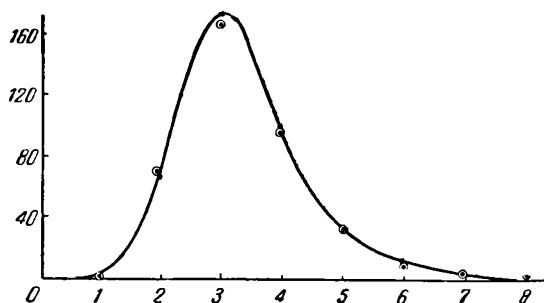


Рис. 5.35. Ряд распределения (тип VI).

9. Тип VII: В кривой распределения типа VII

$$x = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_4 > 3.$$

Уравнение кривой типа VII имеет вид

$$\tilde{n}_l = \tilde{n}_0 \left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right)^{-q}, \quad (5.224)$$

где

$$q = \frac{5r_4 - 9}{2(r_4 - 3)} > 0, \quad l = \sigma \sqrt{\frac{2r_4}{r_4 - 3}},$$

$$\tilde{n}_0 = \frac{n}{l} \cdot \frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(q - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad (5.225)$$

$$\lg \tilde{n}_0 = \lg n - \lg l + \lg \Gamma(q) - \lg \Gamma\left(q - \frac{1}{2}\right) - \lg \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \quad (5.226)$$

Уравнение (5.224) показывает, что кривая типа VII симметрична относительно оси ординат, проходящей через точку \hat{X} ($=\bar{X}$), и, следовательно,

$$x = x' - m_1;$$

размах кривой неограничен: $-\infty < x < +\infty$.

Если

$$\kappa = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_4 = 3,$$

то мы получим *нормальную кривую*

$$\tilde{n}_l = \tilde{n}_0 \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (5.227)$$

где $\tilde{n}_0 = n/(\sigma \sqrt{2\pi})$ [ср. (5.110)]. Таким образом, нормальная кривая представляет частный случай рассматриваемого семейства кривых распределения.

Пример. Рассмотрим ряд распределения скорости света (табл. 5.23 *). В этом ряде

$$m_1 = -0,112, \quad \sigma = 1,344, \quad r_3 = +0,356, \quad r_3^2 = 0,127, \quad r_4 = 4,075.$$

На основании этих статистик находим

$$s = \frac{6 \cdot (4,075 - 0,127 - 1)}{(0,381 - 8,150 + 6)} = \frac{17,688}{-1,769} = -10,000,$$

$$\kappa = -\frac{0,127 \cdot 64}{16 \cdot (-9)} = \frac{6,128}{144} = +0,056.$$

*) Майкельсон, 1935, стр. 56 (VII, 1).

Таблица 5.23

Вычисление выравнивающих частот распределения типа VII
(распределение скорости света)

| $X(f)$ | n_f | $x = x' - m$ | $\frac{x}{l}$ | $1 + \frac{x^2}{l^2}$ | $\lg (5)$ | $q \times (6)$ | $\lg \tilde{n}_f =$ $= \lg \tilde{n}_0 - (7)$ | \tilde{n}_f |
|----------|-------|--------------|---------------|-----------------------|-----------|----------------|--|---------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) |
| 299000 | | | | | | | | |
| + 725 | 4 | -4,888 | -1,321 | 2,745 | 0,43854 | 2,31988 | 0,65243 | 4 |
| 735 | 10 | -3,888 | -1,051 | 2,105 | 0,32325 | 1,70999 | 1,26232 | 18 |
| 745 | 84 | -2,888 | -0,781 | 1,610 | 0,20683 | 1,09413 | 1,87818 | 76 |
| 755 | 270 | -1,888 | -0,510 | 1,260 | 0,10037 | 0,53096 | 2,44135 | 276 |
| 765 | 658 | -0,888 | -0,240 | 1,058 | 0,02449 | 0,12955 | 2,84276 | 696 |
| 775 | 1095 | +0,112 | +0,030 | 1,001 | 0,00043 | 0,00227 | 2,97004 | 934 |
| 785 | 506 | +1,112 | +0,300 | 1,090 | 0,03743 | 0,19805 | 2,77426 | 595 |
| 795 | 152 | +2,112 | +0,571 | 1,325 | 0,12222 | 0,64654 | 2,32577 | 212 |
| 805 | 63 | +3,112 | +0,841 | 1,707 | 0,23223 | 1,22850 | 1,74381 | 55 |
| 815 | 32 | +4,112 | +1,111 | 2,234 | 0,34908 | 1,84663 | 1,12568 | 13 |
| 825 | 12 | +5,112 | +1,382 | 2,913 | 0,46434 | 2,45636 | 0,51595 | 3 |
| Σ | 2886 | — | — | — | — | — | — | 2882 |

Так как $\kappa \approx 0$ и $r_4 > 3$, то для рассматриваемого ряда можно взять кривую типа VII.

Находим постоянные, входящие в уравнение (5.224):

$$q = \frac{5 \cdot 4,075 - 9}{2 \cdot (4,075 - 3)} = \frac{11,375}{2,150} = 5,290,$$

$$l = 1,344 \sqrt{\frac{8,150}{1,075}} = 1,344 \cdot 2,754 = 3,701.$$

Найдем также $\lg \tilde{n}_0$ по формуле (5.226):

$$\begin{aligned}
 \lg \tilde{n}_0 &= \lg 2886 &= 3,45030 \\
 &- \lg 3,701 &= \bar{1},43168 \\
 &+ \lg \Gamma(5,290) &= \bar{1},57380 \\
 &- \lg \Gamma(4,790) &= \bar{2},75500 \\
 &- \lg \Gamma(0,5) &= \bar{1},75143 \\
 &\hline
 &&2,97231
 \end{aligned}$$

Вычисление выравнивающих частот (5.224) производится при помощи логарифмов

$$\lg \bar{n}_i = \lg \bar{n}_0 - q \lg \left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right) \quad (5.228)$$

и располагается в табл. 5.23.

Наблюдаемые и выравнивающие частоты изображены на рис. 5.36.

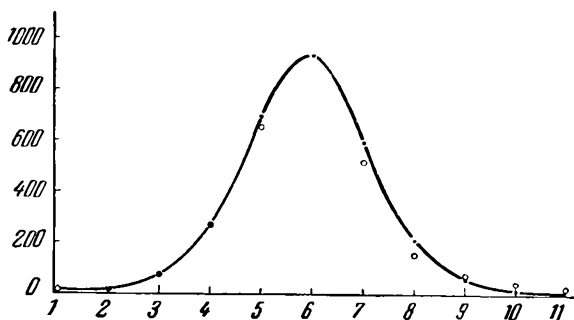


Рис. 5.36. Распределение скорости света (тип VII).

10. Область применения кривых распределения типа I—VII. Кривые распределения типа I—VII имеют самое широкое применение.

Объясняется это тем, что критерий κ и некоторые дополнительные признаки, выражаемые через основные моменты r_3 и r_4 , имеют для всякого данного распределения вполне определенные значения. Каждому же значению κ , изменяющемуся от $-\infty$ до $+\infty$, соответствует тот или иной тип кривых распределения. Поэтому всякому данному распределению будет соответствовать вполне определенный тип этих кривых.

К тому же заключению можно прийти, рассматривая формулы (5.185), выражающие коэффициенты дифференциального уравнения кривых распределения типа I—VII (5.183). Всякое наблюдаемое распределение имеет конечные частоты и конечные значения случайной величины, число которых тоже является конечным. Поэтому моменты r_3 и r_4 этого распределения оказываются конечными и определенными, а значит, и коэффициенты дифференциального уравнения (5.183), вычисляемые по формулам (5.185), будут определенными. Следовательно, дифференциальное уравнение (5.183) будет иметь определенное решение вида (5.191), причем и \bar{n}_0 имеет определенное значение, так как площадь кривой должна равняться объему рассматриваемого распределения.

Таким образом, система кривых распределения типа I—VII охватывает все наблюдаемые распределения. И действительно, опыт

применения кривых распределения, получаемых на основании дифференциального уравнения (5.183), показал, что эти кривые практически покрывают все распределения случайных величин.

Отмеченные свойства кривых типа I—VII, разнообразие их формы, а также наличие многочисленных таблиц, облегчающих вычислительную работу, и хорошо разработанные приемы и схемы вычислений привели к исключительно широкому распространению этих кривых при выравнивании наблюдаемых распределений случайных величин.

Как указано выше, обоснование кривых распределения рассматриваемых типов дано Марковым и Колмогоровым (см. п. I), а обобщение этих кривых принадлежит Романовскому.

§ 1. Критерии значимости

1. Критерии значимости. Зная распределение случайной величины, например, зная уравнение кривой распределения, если таковая существует, мы можем вывести все свойства этой величины. Однако во многих случаях ограничиваются более простой задачей, а именно стремятся произвести достаточно надежную оценку соответствующих параметров путем вычисления значений тех или иных статистик.

Для решения этой задачи в статистическом исчислении разработаны *методы оценки*, при помощи которых можно с определенной вероятностью сделать выводы относительно параметров распределения.

Необходимым условием по-прежнему является то, что частичная совокупность должна быть достаточно представительным образцом общей совокупности, т. е. при составлении частичной совокупности должны быть тщательно соблюдены требования, о которых говорилось выше (гл. I, § 1, п. 4).

Методы оценки различаются в зависимости от того, будет ли частичная совокупность представлять достаточно большое или же малое число наблюдений.

В случае частичной совокупности достаточно большого объема применяются основные ошибки (гл. V, § 2, п. 5).

Применение последних для выяснения надежности оценивающих статистик зависит от того обстоятельства, что в случае частичных совокупностей достаточно большого объема распределение многих статистик является приближенно нормальным. Отсюда следует, что значение статистики, отклоняющееся от ее среднего значения (которое обычно и есть значение оцениваемого параметра) более чем на ее двукратную основную ошибку, является маловероятным, практически невозможным.

Иное положение имеет место в случае частичных совокупностей малого объема. Здесь распределение статистик часто оказывается далеким от нормального распределения. Но и без того оценка параметра общей совокупности, сделанная на основании статистик при малом объеме частичной совокупности, не всегда заслуживает доверия. Отсюда следует, что применение основных ошибок в случае малого числа наблюдений является необоснованным.

Главная задача статистического исчисления в случае малого числа наблюдений состоит в установлении точных распределений

разных статистик. Одновременно изменяются как сами вопросы, возникающие при исследовании, так и способы их решения.

Приведем две типичные для практики ситуации.

1. Положим, что данные наблюдения представлены в виде отдельных групп, полученных в разное время и при неодинаковых условиях. Требуется выяснить, различаются ли эти группы между собой более, чем можно было бы ожидать в связи с чисто случайными колебаниями, имеющими место в частичных совокупностях, т. е. в связи со случайными ошибками, сопровождающими эксперимент.

2. Положим, что некоторый процесс производства протекает при условиях, характеризуемых определенным средним значением и основным отклонением изучаемого свойства продукта. Пусть затем произошли изменения в текущих условиях и после этого произведены наблюдения, которые показали среднее значение и основное отклонение, несколько отличающиеся от прежних. Требуется выяснить, могут ли обнаруженные различия быть приписаны случайным колебаниям в частичных совокупностях, или же нужно сделать вывод, что изменение условий оказало существенное влияние на изучаемое свойство продукта.

Заслуживающие доверия ответы на такие вопросы даются при помощи критериев значимости, основанных на распределениях разных статистик.

Критерии значимости применяются для определения, будут ли некоторые статистики (среднее значение, основное отклонение, коэффициент корреляции и т. д.), найденные из двух или более частичных совокупностей, отличаться соответственно друг от друга или от других выбранных значений более, чем можно было бы ожидать в связи со случайными колебаниями в частичных совокупностях.

Если два сравниваемых количества отличаются друг от друга более, чем это можно разумно приписать случайной вариации, то разность между этими количествами называется значимой или существенной. В противном случае разность называется несущественной или случайной.

2. Гипотезы. При каждом приложении критерия значимости подвергается испытанию некоторая гипотеза, относящаяся к общей совокупности, из которой взята данная частичная совокупность. Слово «гипотеза» употребляется в том же смысле, в каком оно употребляется вообще в научном исследовании, т. е. как предположение относительно объективных свойств изучаемого явления.

Обычно гипотеза, имеющая особенно важное значение, называется *нулевой гипотезой*. В простейшем случае нулевая гипотеза состоит в предположении, что изучаемые частичные совокупности не выражают каких-либо существенных различий, т. е. они являются представителями одной и той же общей совокупности.

Нулевая гипотеза может иметь и более общий вид. Например, можно предположить, что частичные совокупности взяты из различных общих совокупностей, дисперсия которых одна и та же, а соответствующие средние значения изменяются известным образом.

Вообще крайне важно точно установить, в чем именно заключается проверяемая нулевая гипотеза, и удостовериться, что применяемый критерий значимости действительно проверяет эту гипотезу.

В предположении, что нулевая гипотеза верна, можно (по крайней мере теоретически) вычислить вероятность того, что рассматриваемая статистика будет иметь значение, лежащее вне данных пределов. Для ряда статистик, употребляемых в критериях значимости, построены таблицы этих вероятностей.

Статистики, вычисленные на основании частичных совокупностей, сравниваются со значениями, приведенными в таблицах. В результате такого сравнения создается представление о вероятностях появления вычисленных значений статистик в предположении, что нулевая гипотеза верна.

Если найденная вероятность оказывается достаточно высокой, то не возникает сомнения в правильности нулевой гипотезы. Если же вероятность окажется низкой, то это можно объяснить или тем, что появилось маловероятное событие, или же тем, что нулевая гипотеза является ложной. Но так как при отдельном осуществлении частичной совокупности маловероятное событие практически невозможно, то логичнее принять второе объяснение.

Тут же подчеркнем, что при помощи критерия значимости нулевая гипотеза в каждом отдельном случае может быть опровергнута; но никогда при помощи критерия значимости эта гипотеза не может быть доказана. Самое большее, что при этом можно утверждать, сводится к тому, что в случае достаточно высокой вероятности можно считать, что рассматриваемая гипотеза не находится в явном противоречии с данными наблюдениями; только в этом смысле согласие между данными наблюдениями с гипотезой можно — с точки зрения данного критерия значимости — признать удовлетворительным.

3. Уровни значимости. Выбор границы между высокой и низкой вероятностями является в значительной мере произвольным. На основании большого опыта во многих областях научного исследования установлены различные *уровни значимости*, которые могут быть приняты для проведения пограничных линий между низкой и высокой вероятностью, т. е. которые дают определенную практическую уверенность, что ошибочные заключения будут сделаны только в очень редких случаях. Уровни значимости выражают вероятность, которой решено пренебрегать в данной области исследования.

При выборе уровня значимости надо иметь в виду, что с увеличением вероятности P того, что некоторая статистика t принимает значения из как-нибудь очерченной области, увеличивается вероятность ошибочного отбрасывания гипотезы, а с уменьшением вероятности P возрастает число испытаний, необходимое для эффективного применения критерия значимости. Поэтому введено несколько уровней значимости, и в каждом отдельном случае надо брать тот из этих уровней, который наиболее отвечает задаче данного исследования.

Среди уровней значимости широкое употребление имеют: 5%-ный уровень значимости, при котором величина вероятности $P = 0,05$; 1%-ный уровень значимости, при котором величина вероятности $P = 0,01$; в некоторых случаях применяется также уровень значимости $P = 0,001$.

Типичный смысл уровней значимости заключается в следующем. Пусть $P = 0,05$. Это значит, что в предположении того, что нулевая гипотеза верна, значение статистики не меньшее, чем наблюдаемое, можно ожидать около пяти раз на каждые 100 испытаний, проведенных в неизменных условиях.

Остановливаясь на том или ином уровне значимости, мы сосредоточиваем наше внимание не на действительном значении вероятности P того, что статистика t попадает в данную область, а только на том обстоятельстве, будет ли это значение выше или ниже принятого уровня значимости.

Обычно применяется 5%-ный уровень значимости. Если при этом оказывается, что $P \geq 0,05$, то нет оснований подозревать, что нулевая гипотеза неверна. Если же $P < 0,05$, то нулевая гипотеза при этом уровне значимости признается ложной.

Основанием для выбора 5%-ного уровня значимости является исключительно только его пригодность на практике: этот уровень, с одной стороны, достаточно велик для отбрасывания ложных гипотез, а с другой стороны, он достаточно мал, так что приводит к отбрасыванию лишь немногих верных гипотез.

Для более уверенных заключений применяется 1%-ный уровень значимости.

Необходимо различать двусторонние и односторонние критерии значимости.

Двусторонний критерий значимости (2Q) применяется в тех случаях, когда при сравнении двух случайных величин требуется оценить абсолютную величину расхождения между случайными величинами, т. е. представляют одинаковый интерес как положительные, так и отрицательные разности между изучаемыми величинами.

Пусть, например, производится сравнение средних значений роста мужчин и женщин одного и того же возраста. Рост людей имеет нормальное распределение, и в рассматриваемом случае

одинаково важно знать большие отклонения как в положительную, так и в отрицательную сторону. Поэтому естественно учесть вероятность на обоих концах нормальной кривой. Остановившись на 5%-ном уровне значимости, мы находим по табл. VIII, что отклонение от среднего значения в обе стороны на 1,96 основного отклонения отсекает от всей площади кривой 5% на обоих концах, взятых вместе, т. е. по 2,5% на каждом конце (рис. 6.1, а). Таким образом по табл. VIII мы непосредственно получаем двусторонний

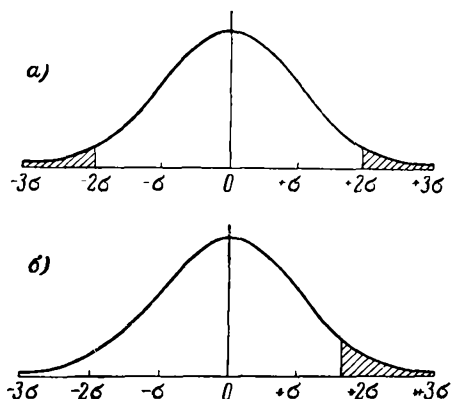


Рис. 6.1. Критерии значимости — двусторонний и односторонний.

критерий (2Q) при том или ином уровне значимости. брать значение 1,64, соответствующее 10%-ному уровню значимости в двустороннем критерии (рис. 6.1, б).

Подобное же правило применимо к любому другому уровню значимости. Если, например, надо применить 1%-ный уровень значимости при одностороннем критерии, то мы должны взять отклонение, соответствующее 2%-ному уровню для двустороннего критерия.

Уровни значимости и соответствующие им отклонения x при одностороннем (Q) и двустороннем (2Q) критериях в случае нормального распределения приведены в табл. XV.

4. Доверительные границы. Уровни значимости могут быть использованы при установлении границ, внутри которых располагается значение параметра в общей совокупности. Такие границы называются *доверительными границами* для параметра θ при данном уровне значимости.

Найдем доверительные границы для среднего значения в случае нормальной общей совокупности.

Положим, что частичная совокупность получается путем независимых испытаний относительно нормально распределенной слу-

чайной величины со средним значением \bar{x}_0 и дисперсией σ^2 . В таком случае частичную совокупность можно рассматривать как совокупность n независимых случайных величин; их распределение тоже будет нормальным с теми же самыми средним значением и дисперсией; распределение же среднего значения \bar{x} в такой частичной совокупности будет нормальным со средним значением \bar{x}_0 и дисперсией σ^2/n [см. (5.85)].

Если дисперсия σ^2 известна, а среднее значение \bar{x}_0 неизвестно, то составим отношение отклонения наблюдаемого среднего значения \bar{x} от его математического ожидания \bar{x}_0 (т. е. от среднего значения общей совокупности) к основной ошибке \bar{x} :

$$\frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}. \quad (6.1)$$

Эта статистика имеет нормальное распределение со средним равным нулю и дисперсией 1, так что при любом уровне значимости P мы легко можем построить доверительные границы для неизвестного среднего значения \bar{x}_0 . Например, пусть $P = 0,05$. Воспользуемся табл. VIII в конце книги. Получим, что с вероятностью

$$1 - 0,05 = 0,95$$

будет иметь место соотношение

$$\left| \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| < 1,96$$

(рис. 6.1, а)). Но это соотношение равносильно соотношению

$$\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x}_0 < \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (6.2)$$

Следовательно, если мы возьмем промежуток с начальной точкой $\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и конечной точкой $\bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, то этот промежуток будет заключать в себе среднее значение общей совокупности \bar{x}_0 с вероятностью 0,95, т. е. примерно в 95 случаях из 100.

Значения

$$\bar{x} \pm 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

называются доверительными границами для среднего значения общей совокупности при 5%-ном уровне значимости.

Подобным же образом определяются доверительные границы при других уровнях значимости.

5. Проверка гипотез. Выбор уровня значимости необходим при проверке гипотез.

Проверка гипотез состоит в решении вопроса, будет гипотеза принята или же она будет отвергнута. Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность отвергнуть верную гипотезу.

Значения статистики, при которых гипотеза отвергается, образуют *критическую область* проверяемой гипотезы. Часто понятие критической области отождествляется с понятием критерия. Задача проверки гипотезы сводится к построению критической области для данного уровня значимости. Если статистика попадает в критическую область, то это указывает на несоответствие гипотезы наблюдаемым данным и гипотеза должна быть отвергнута.

При проверке гипотезы возможны ошибки двух родов. *Ошибка первого рода* состоит в том, что нулевая гипотеза $H_0(\theta = \theta_0)$ от-

вергается в то время, когда она в действительности верна. Ошибка второго рода состоит в том, что гипотеза H_0 принимается в то время, когда она на самом деле неверна. Эти ошибки, а также другие возможные случаи показаны в табл. 6.1. Критерий значимости указывает величину риска сделать ошибку первого рода, но на основании этого критерия нет возможности со-

Таблица 6.1

Ошибки при проверке гипотез

| Гипотеза H_0 | Верна | Неверна |
|----------------|---------------------|---------------------|
| Отвергается | Ошибка первого рода | Правильное решение |
| Принимается | Правильное решение | Ошибка второго рода |

ставить заключение относительно величины риска сделать ошибку второго рода.

Вероятность ошибочного отбрасывания проверяемой гипотезы обозначается через α , а вероятность ошибочного принятия этой гипотезы обозначается через β .

Для определения лучшего критерия проверки гипотез надо среди всех критериев, имеющих ту же самую вероятность ошибок первого рода, выбрать такой, для которого вероятность ошибок второго рода имеет наименьшее значение.

Допустимую ошибку первого рода можно обычно задать заранее. В практике научных исследований вероятность ошибки первого рода почти всегда принимается равной 0,05. Это означает, что в среднем в пяти случаях из ста испытываемая верная гипотеза будет отвергнута.

Величина

$$P(\theta) = 1 - \beta(\theta),$$

равная дополнению до 1 вероятности β , выражает вероятность попадания исследуемой статистики в критическую область, если действительное значение неизвестного параметра есть θ . Функция $P(\theta)$ называется функцией мощности критерия.

§ 2. Оценки параметров

1. Смысл оценки. Смысл оценки параметра заключается в следующем. Положим, что распределение случайной величины x будет вполне определено, если будет известно значение некоторого параметра θ . Требуется на основании значений x_1, x_2, \dots, x_n , полученных в результате n , скажем, независимых испытаний относительно случайной величины x и образующих частичную совокупность, найти некоторую статистику t , которую можно было бы с определенной степенью уверенности принять за значение параметра θ .

Так как статистика t является в свою очередь случайной величиной, то желательно знать распределение этой величины, или по крайней мере среднее значение и дисперсию этого распределения. Тогда можно попытаться с определенной надежностью и точностью оценить неизвестное значение θ .

Ход рассуждений при оценке параметра θ рассмотрим на примере.

Пусть θ есть среднее значение случайной величины x , а ее дисперсия равна 1. В этом случае можно положить

$$t = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h,$$

среднее значение t равно также θ , а дисперсия будет равна $\frac{1}{n}$ [ср. (5.85)], и распределение статистики t будет приближенно нормальным

$$f(t) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-\theta)^2}{\frac{1}{n}}}, \quad (6.3)$$

или

$$f(t) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2}(t-\theta)^2}. \quad (6.4)$$

Отсюда мы видим, что распределение возможных значений t около θ становится меньшим с возрастанием n , так что вероятность того, что наблюдаемое значение t будет отличаться от θ на величину, большую назначенного числа, будет убывать с возрастанием числа n . Поэтому мы можем говорить, что надежность оценки параметра θ статистикой t возрастает вместе с n .

2. Состоятельные оценки. Возрастающей вместе с n надежностью обладают так называемые состоятельные оценки.

Оценка t_n , вычисленная из n наблюдаемых значений случайной величины, образующих частичную совокупность, называется

состоятельной оценкой параметра θ , если имеется число N такое, что при всех $n > N$

$$P\{|t_n - \theta| \leq \epsilon\} > 1 - \eta, \quad (6.5)$$

какими бы ни были сколь угодно малые наперед заданные положительные числа ϵ и η .

Грубо говоря, статистика t_n будет состоятельной оценкой параметра θ , если $t_n \rightarrow \theta$, когда $n \rightarrow \infty$.

Например, среднее значение \bar{x} частичной совокупности является состоятельной оценкой параметра \bar{x}_0 общей совокупности.

В случае нормальной общей совокупности из (6.4) мы видим, что $(\bar{x} - \bar{x}_0) \sqrt{n}$ распределяется нормально около среднего значения 0 с дисперсией 1. Отсюда следует, что при данном ϵ

$$P\{|(\bar{x} - \bar{x}_0) \sqrt{n}| \leq \epsilon \sqrt{n}\} = \Phi(\epsilon \sqrt{n}). \quad (6.6)$$

Если будет назначено какое-либо положительное число η , то мы всегда можем взять N достаточно большим, чтобы эта вероятность была больше $1 - \eta$. Таким образом, число N может быть определено, и легко видеть, что будет удовлетворено неравенство (6.5) при всех $n > N$.

Подобным же образом дисперсия частичной совокупности

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x})^2 \quad (6.7)$$

представляет состоятельную оценку дисперсии общей совокупности σ_0^2 .

3. Несмещенные оценки. Свойство состоятельной оценки (6.5) не требует никакого предположения о поведении t_n для конечного n .

Положим теперь, что при всех n математическое ожидание t_n равно оцениваемому параметру θ , каков бы ни был этот параметр:

$$M(t_n) = \theta. \quad (6.8)$$

Тогда статистика t_n называется *несмещенной оценкой* параметра θ или оценкой без постоянной (систематической) погрешности.

Например, замечая, что среднее значение частичной совокупности равно

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h, \quad (6.9)$$

а среднее значение общей совокупности равно

$$\bar{x}_0 = M(x), \quad (6.10)$$

находим, на основании теоремы сложения математических ожиданий (4.81):

$$M(\bar{x}) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h\right) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n M(x) = \bar{x}_0. \quad (6.11)$$

Таким образом, среднее значение частичной совокупности является не только состоятельной оценкой среднего значения общей совокупности, но также и несмещенной его оценкой.

Что же касается дисперсии частичной совокупности σ^2 , то эта статистика является состоятельной оценкой дисперсии общей совокупности σ_0^2 , но не представляет несмещенной оценки этого параметра.

Действительно,

$$M(\sigma^2) = \frac{n-1}{n} \sigma_0^2. \quad (6.12)$$

Для вывода этой формулы преобразуем выражение (6.7):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n [(x_h - \bar{x}_0) - (\bar{x} - \bar{x}_0)]^2 = \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x}_0)^2 - 2(\bar{x} - \bar{x}_0) \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x}_0) + (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 \sum_{h=1}^n 1 \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x}_0)^2 - 2n(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + n(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x}_0)^2 - \left[\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x}_0) \right]^2. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$M\{(x_h - \bar{x}_0)^2\} = M\{(x - \bar{x}_0)^2\} = \sigma_0^2, \quad M(x_h) = M(x) = \bar{x}_0,$$

и ввиду предполагаемой независимости испытаний при образовании частичной совокупности значений x_h ($h = \overline{1, n}$),

$$M\{(x_h - \bar{x}_0)(x_g - \bar{x}_0)\} = M\{x_h - \bar{x}_0\} M\{x_g - \bar{x}_0\} = 0,$$

находим

$$\begin{aligned} M\{\sigma^2\} &= \frac{1}{n} \sum_h M\{(x_h - \bar{x}_0)^2\} - \frac{1}{n^2} \sum_h M\{(x_h - \bar{x}_0)^2\} - \\ &- \frac{1}{n^2} \sum_h \sum_g M\{(x_h - \bar{x}_0)(x_g - \bar{x}_0)\} = \sigma_0^2 - \frac{1}{n} \sigma_0^2 = \frac{n-1}{n} \sigma_0^2. \end{aligned}$$

Таким образом, статистика σ^2 , употребляемая как оценка параметра σ_0^2 , в среднем дает недооценку этого параметра, причем смещение в этом случае равно $-\frac{\sigma_0^2}{n}$.

Чтобы получить несмещенную оценку для σ_0^2 , надо вместо σ^2 , определяемой по формуле (6.7), взять величину

$$s^2 = \frac{\sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (6.13)$$

В таком случае будем иметь

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2, \quad (6.14)$$

и, следовательно, принимая во внимание (6.12), получим

$$M(s^2) = \sigma_0^2; \quad (6.15)$$

таким образом, несмещенной оценкой параметра σ_0^2 является величина s^2 .

Применение несмещенных оценок дает возможность избежать систематических ошибок при оценке параметров.

Относительно величины s^2 заметим, что она не является ни дисперсией частичной совокупности, ни дисперсией общей совокупности, как они были определены; она является случайной величиной, которая, будучи взята в среднем, приближается к дисперсии общей совокупности.

Отсюда следует, что если требуется найти меру рассеяния данной частичной совокупности, то вычисляется статистика σ^2 по формуле (6.7), т. е. сумма квадратов отклонений от среднего значения делится на n ; если же требуется найти *оценку* дисперсии общей совокупности, то вычисляется величина s^2 по формуле (6.13), т. е. сумма квадратов отклонений от среднего значения делится на $n-1$.

4. Оценка Маркова. Существует большое число статистик t , являющихся несмещенными оценками параметра θ , т. е. удовлетворяющих соотношению (6.8).

Для выбора среди этих статистик наиболее совершенной Марков ввел оценку, названную им «наилучшей».

Оценка Маркова, или наилучшая несмещенная оценка t параметра θ , удовлетворяет условиям:

$$M(t) = \theta, \quad (6.16)$$

$$M\{(t - \theta)^2\} = \text{минимум}, \quad (6.17)$$

каково бы ни было неизвестное значение параметра θ .

Основание для выбора наилучшей оценки, как несмещенной оценки с минимальной дисперсией, можно видеть в следующем. Положим, что для одного и того же параметра θ найдены две несмещенные оценки t_1 и t_2 . Тогда, согласно неравенству Чебышева (4.149), будем иметь

$$P\{-\varepsilon \leq t_1 - \theta \leq \varepsilon\} > 1 - \frac{\sigma_{t_1}^2}{\varepsilon^2} \quad P\{-\varepsilon \leq t_2 - \theta \leq \varepsilon\} > 1 - \frac{\sigma_{t_2}^2}{\varepsilon^2}.$$

Если $\sigma_{t_1}^2 < \sigma_{t_2}^2$, то можно думать, что первая из указанных вероятностей будет более близкой к единице, чем вторая. Отсюда следует, что чем меньше дисперсия оценки, тем с большей надежностью можно оценить соответствующий параметр.

Покажем, что среднее значение \bar{x} частичной совокупности из n единиц, взятых наудачу и независимо из общей совокупности, является наилучшей линейной несмещенной оценкой среднего значения \bar{x}_0 общей совокупности.

Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

будут наблюдаемые значения, образующие частичную совокупность. Возьмем некоторую линейную функцию этих значений

$$t = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (6.18)$$

и определим коэффициенты a_h ($h = \overline{1, n}$) при условии, что t является наилучшей линейной несмещенной оценкой \bar{x}_0 .

Применяя условие (6.16), находим

$$M(t) = M\left(\sum_{h=1}^n a_h x_h\right) = \sum_{h=1}^n a_h M(x) = \bar{x}_0 \sum_{h=1}^n a_h = \bar{x}_0;$$

следовательно,

$$\sum_{h=1}^n a_h = 1. \quad (6.19)$$

Предполагая, далее, что уже $M(t) = \theta$, находим

$$M\{(t - \theta)^2\} = \sigma_0^2 \sum_{h=1}^n a_h^2,$$

где σ_0^2 есть дисперсия общей совокупности. [Ср. (4.99).] По условию (6.17) необходимо, чтобы $\sigma_0^2 \sum_{h=1}^n a_h^2$ было минимальным, при соблюдении (6.19).

Применяя способ неопределенных множителей Лагранжа α , построим функцию

$$f = \sigma_0^2 \sum_{h=1}^n a_h^2 - 2\alpha \sum_{h=1}^n a_h.$$

Дифференцируя эту функцию по a_h и приравнивая производную нулю, получим

$$2\sigma_0^2 a_h - 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\alpha = \sigma_0^2 a_h \text{ при } h = \overline{1, n}. \quad (6.20)$$

Суммируя по всем значениям a_h и принимая во внимание (6.19), получим

$$n\alpha = \sigma_0^2.$$

Принимая затем во внимание (6.20), находим

$$a_h = \frac{1}{n} \text{ при } h = \overline{1, n}.$$

Так как это имеет место при любом значении h , то, подставляя в (6.18), находим, что наилучшей линейной несмещенной оценкой среднего значения общей совокупности будет

$$t = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h = \bar{x}. \quad (6.21)$$

Подобным же образом можно показать, что s^2 есть наилучшая квадратичная несмещенная оценка дисперсии σ_0^2 .

Благодаря тому, что среднее значение является наилучшей оценкой, т. е. не имеет постоянной погрешности, и его дисперсия является минимальной в широком классе оценок, эта статистика широко применяется при исследовании результатов измерений физических величин. [Ср. гл. V, § 2, п. 9 — следствие теоремы Ляпунова.]

5. Дисперсия и вес наблюдений. Рассмотрим понятие веса случайной величины. Положим, что имеется n независимых величин x_h ($h = \overline{1, n}$) с одинаковыми средними и дисперсиями σ_h^2 . Покажем, что несмещенная оценка их общего среднего значения, имеющая минимальную дисперсию в классе линейных оценок, находится путем взвешивания x_h обратно пропорционально их дисперсиям.

Обозначим вес величин x_h через w_h ($h = \overline{1, n}$). Тогда взвешенное среднее значение этих величин будет равно

$$\frac{\sum_{h=1}^n w_h x_h}{\sum_{h=1}^n w_h} = \sum_{h=1}^n c_h x_h, \quad (6.22)$$

где

$$c_h = \frac{w_h}{\sum_{h=1}^n w_h}. \quad (6.23)$$

В силу (4.99) дисперсия взвешенного среднего значения равна

$$\sigma^2 = \sum_{h=1}^n c_h^2 \sigma_h^2 = \frac{\sum_{h=1}^n w_h^2 \sigma_h^2}{\left(\sum_{h=1}^n w_h\right)^2}. \quad (6.24)$$

Для того чтобы дисперсия σ^2 была минимальной, необходимо, чтобы частные производные функции (6.24) по w_h были равны нулю. Отсюда следует, что

$$\left(\sum_{h=1}^n w_h\right)^2 w_h \sigma_h^2 - \sum_{h=1}^n w_h^2 \sigma_h^2 \cdot \sum_{h=1}^n w_h = 0,$$

так что

$$w_h \sigma_h^2 = \frac{\sum_{h=1}^n w_h^2 \sigma_h^2}{\sum_{h=1}^n w_h}. \quad (6.25)$$

Последнее равенство показывает, что произведение $w_h \sigma_h^2$ оказывается одним и тем же для всех значений h , так что можно написать

$$w_h \sigma_h^2 = k, \quad (6.26)$$

где k — некоторая постоянная.

Из (6.26) находим

$$w_h = \frac{k}{\sigma_h^2}. \quad (6.27)$$

Таким образом, веса случайных величин являются обратно пропорциональными их дисперсиям.

Например, оценкой среднего значения общей совокупности будет величина

$$\frac{\sum_{h=1}^n w_h x_h}{\sum_{h=1}^n w_h}. \quad (6.28)$$

В частном случае, когда веса наблюдений одинаковы, можно положить

$$w_h = 1 \quad (6.29)$$

и, следовательно, $\sum_{h=1}^n \omega_h = n$. Тогда наилучшей линейной несмещенной оценкой общего среднего значения будет величина

$$\frac{\sum_{h=1}^n x_h}{n}. \quad (6.30)$$

[Ср. (6.21).]

Из формулы (6.27) становится ясным смысл понятия веса случайной величины: наблюдаемые значения x_h будут тем надежнее и точнее, чем меньше дисперсия возможных результатов того же наблюдения.

6. Способ наименьших квадратов. Понятие наилучшей оценки введено Марковым при обосновании способа наименьших квадратов.

Способом наименьших квадратов называется общий прием получения приближенных результатов из многих наблюдений с оценкой достоинства этих результатов.

Рассмотрим частичную совокупность из n независимых значений

$$x_1, x_2, \dots, x_h, \dots, x_n \quad (6.31)$$

случайной величины x , причем каждое из этих значений x_h ($h = \overline{1, n}$) взято наудачу из некоторой общей совокупности π_h , имеющей среднее значение \bar{x}_h и дисперсию σ_h^2 .

Пусть математическое ожидание каждого x_h ($h = \overline{1, n}$) есть линейная функция $m \leq n$ неизвестных параметров p_g ($g = \overline{1, m}$), но известных коэффициентов a_{hg} , т. е.

$$M(x_h) = \sum_{g=1}^m a_{hg} p_g. \quad (6.32)$$

Положим, что имеется некоторая линейная функция θ параметров p , определяемая равенством

$$\theta = \sum_{g=1}^m b_g p_g \quad (m \leq n), \quad (6.33)$$

где коэффициенты b являются известными, а параметры p зависят от величины (6.32).

Требуется найти наилучшую линейную оценку t функции θ . Линейная функция t от x может быть написана в виде

$$t = \sum_{h=1}^n \lambda_h x_h. \quad (6.34)$$

Для того чтобы величина t была наилучшей оценкой функции θ , необходимо определить коэффициенты λ так, чтобы были удовлетворены два условия:

$$M(t) = \theta \quad (6.35)$$

и

$$\sigma_t^2 = M\{(t - \theta)^2\} = \text{минимум}. \quad (6.36)$$

[См. (6.16) и (6.17).]

Покажем, что 1) функция t определяется при помощи подстановки в выражение для θ вместо параметров p_g значений q_g^0 , получаемых путем сведения к минимуму суммы квадратов

$$S = \sum_{h=1}^n w_h \left\{ x_h - \sum_{g=1}^m a_{hg} q_g \right\}^2 \quad (6.37)$$

относительно коэффициентов q , рассматриваемых как независимые переменные, причем $w_h = k/\sigma_h^2$ есть вес случайной величины x_h ; и что 2) оценка дисперсии функции t дается выражением

$$\sigma_t^2 = \frac{S_0}{n-m} \sum_{h=1}^n \frac{\lambda_h^2}{w_h}, \quad (6.38)$$

где S_0 есть минимальное значение суммы S .

На основании (6.35), принимая во внимание (6.32) и (6.34), получим

$$M(t) = M\left(\sum_{h=1}^n \lambda_h x_h\right) = \sum_{h=1}^n \lambda_h M(x_h) = \theta, \quad (6.39)$$

или

$$\begin{aligned} p_1 \sum_{h=1}^n \lambda_h a_{h1} + p_2 \sum_{h=1}^n \lambda_h a_{h2} + \dots + p_m \sum_{h=1}^n \lambda_h a_{hm} = \\ = p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_m b_m. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Это равенство должно иметь место, какими бы ни были неизвестные параметры p_1, p_2, \dots, p_m . Но последнее возможно только тогда, если коэффициенты при p_g в левой части равенства (6.40) будут равны коэффициентам при тех же p_g в правой части, т. е. если

$$\left. \begin{aligned} \sum_{h=1}^n \lambda_h a_{h1} &= b_1, \\ \sum_{h=1}^n \lambda_h a_{h2} &= b_2, \\ \dots &\dots \dots \\ \sum_{h=1}^n \lambda_h a_{hm} &= b_m. \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

Таким образом, имеется m линейных уравнений относительно $m \leq n$ неизвестных коэффициентов λ ; поэтому можно вообще сделать выбор между всеми возможными системами, удовлетворяющими уравнениям (6.41) и приводящим к минимуму (6.37).

Так как, по предположению, переменные x_h являются независимыми, то, применяя формулу для дисперсии линейной функции n переменных x_h [см. (4.99)], мы можем условие (6.36) написать в виде

$$\sigma_t^2 = \sum_{h=1}^n \lambda_h^2 \sigma_h^2. \quad (6.42)$$

Значения коэффициентов λ , удовлетворяющие уравнениям (6.41) и приводящие к минимуму (6.36), находятся следующим образом. При этом для краткости ограничимся случаем двух параметров p_1 и p_2 . Полученные выводы можно затем перенести на случай m параметров.

Пусть θ будет функцией двух параметров p_1 и p_2 :

$$\theta = b_1 p_1 + b_2 p_2. \quad (6.43)$$

Тогда математическое ожидание (6.39) будет равно

$$\begin{aligned} M(t) &= M\left(\sum_{h=1}^n \lambda_h x_h\right) = \sum_{h=1}^n \lambda_h M(x_h) = \\ &= \sum_{h=1}^n \lambda_h (a_{h1} p_1 + a_{h2} p_2) = b_1 p_1 + b_2 p_2 = \theta, \end{aligned} \quad (6.44)$$

и, следовательно, ограничения (6.41) относительно коэффициентов λ будут состоять в том, что

$$b_1 = \sum_{h=1}^n \lambda_h a_{h1}, \quad b_2 = \sum_{h=1}^n \lambda_h a_{h2}. \quad (6.45)$$

Рассмотрим теперь сумму (6.37), которая для случая двух параметров примет вид

$$S = \sum_{h=1}^n w_h (x_h - a_{h1} q_1 - a_{h2} q_2)^2. \quad (6.46)$$

Найдем значения q_1^0 и q_2^0 , при которых эта сумма будет иметь минимум. Взяв частные производные от S по q_1 и q_2 и приравняв их нулю, получим уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n a_{h1} x_h w_h &= q_1^0 \sum_{h=1}^n a_{h1}^2 w_h + q_2^0 \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h, \\ \sum_{h=1}^n a_{h2} x_h w_h &= q_1^0 \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h + q_2^0 \sum_{h=1}^n a_{h2}^2 w_h, \end{aligned}$$

откуда, обозначая определитель системы через D , т. е. полагая

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{h=1}^n a_{h1}^2 w_h & \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h \\ \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h & \sum_{h=1}^n a_{h2}^2 w_h \end{vmatrix}, \quad (6.47)$$

находим

$$q_1^0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{h=1}^n a_{h1} x_h w_h & \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h \\ \sum_{h=1}^n a_{h2} x_h w_h & \sum_{h=1}^n a_{h2}^2 w_h \end{vmatrix}, \quad (6.48)$$

$$q_2^0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{h=1}^n a_{h1}^2 w_h & \sum_{h=1}^n a_{h1} x_h w_h \\ \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h & \sum_{h=1}^n a_{h2} x_h w_h \end{vmatrix}. \quad (6.49)$$

Покажем теперь, что функция (6.34) для рассматриваемого случая двух параметров p_1 и p_2 будет равна

$$t = b_1 q_1^0 + b_2 q_2^0, \quad (6.50)$$

где q_1^0 и q_2^0 имеют те же самые значения (6.48) и (6.49).

В этом случае, принимая во внимание (6.27), мы можем величину (6.42) представить в виде

$$\sigma_t^2 = \sum_{h=1}^n k \frac{\lambda_h^2}{w_h}. \quad (6.51)$$

Для того чтобы t было наилучшей оценкой θ , величина σ_t^2 должна иметь минимум, при соблюдении условий (6.45).

Так как величина k является постоянной, то достаточно построить функцию

$$f = \sum_{h=1}^n \frac{\lambda_h^2}{w_h} - 2\alpha_1 \sum_{h=1}^n \lambda_h a_{h1} - 2\alpha_2 \sum_{h=1}^n \lambda_h a_{h2}, \quad (6.52)$$

где α_1 и α_2 — неопределенные множители Лагранжа.

Взяв частные производные от функций (6.52) по λ_h и приравняв их нулю, получим

$$\frac{\lambda_h}{w_h} - \alpha_1 a_{h1} - \alpha_2 a_{h2} = 0,$$

откуда

$$\lambda_h = \alpha_1 a_{h1} w_h + \alpha_2 a_{h2} w_h. \quad (6.53)$$

Подставляя (6.53) в (6.45), имеем

$$b_1 = \alpha_1 \sum_{h=1}^n a_{h1}^2 w_h + \alpha_2 \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h,$$

$$b_2 = \alpha_1 \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h + \alpha_2 \sum_{h=1}^n a_{h2}^2 w_h.$$

Из этих уравнений находим

$$\alpha_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h \\ b_2 & \sum_{h=1}^n a_{h2}^2 w_h \end{vmatrix}, \quad (6.54)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{h=1}^n a_{h1}^2 w_h & b_1 \\ \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h & b_2 \end{vmatrix}, \quad (6.55)$$

где D определяется из (6.47).

Подставляя (6.54) и (6.55) в (6.53), находим λ_h , после чего это значение λ_h подставляем в (6.34). Получим

$$t = \sum_{h=1}^n \lambda_h x_h = b_1 \cdot \frac{1}{D} \left[\begin{vmatrix} \sum_{h=1}^n a_{h1} x_h w_h & \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h \\ \sum_{h=1}^n a_{h2} x_h w_h & \sum_{h=1}^n a_{h2}^2 w_h \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + b_2 \cdot \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{h=1}^n a_{h1}^2 w_h & \sum_{h=1}^n a_{h1} x_h w_h \\ \sum_{h=1}^n a_{h1} a_{h2} w_h & \sum_{h=1}^n a_{h2} x_h w_h \end{vmatrix} \right]. \quad (6.56)$$

Множители при величинах b_1 и b_2 равны q_1^0 и q_2^0 . Таким образом, действительно имеем

$$t = b_1 q_1^0 + b_2 q_2^0.$$

Поступая подобным же образом в случае m параметров, находим, что наилучшая оценка функции (6.33) равна

$$t = \sum_{g=1}^m b_g q_g^0. \quad (6.57)$$

В силу того, что при значениях q_g^0 сумма квадратов S_0 достигает своего наименьшего значения, рассматриваемый способ определения параметров p_g называется *способом наименьших квадратов*.

Покажем, наконец, что оценка дисперсии функции t дается выражением (6.38), которое в случае двух параметров имеет вид

$$\sigma_t^2 = \frac{S_0}{n-2} \sum_{h=1}^n \frac{\lambda_h^2}{w_h}. \quad (6.58)$$

Так как, согласно (6.51),

$$\sigma_t^2 = k \sum_{h=1}^n \frac{\lambda_h^2}{w_h}, \quad (6.59)$$

то достаточно показать, что

$$(n-2)k = M(S_0).$$

Величина S_0 , определенная в виде (6.46), может быть представлена следующим образом:

$$S_0 = \sum_{h=1}^n w_h [(x_h - a_{h1}p_1 - a_{h2}p_2) - a_{h1}(q_1^0 - p_1) - a_{h2}(q_2^0 - p_2)]^2.$$

Раскрывая скобки в правой части этого равенства, беря математические ожидания в обеих частях и замечая, что

$$M(q_1^0) = p_1, \quad M(q_2^0) = p_2,$$

получим

$$M(S_0) = n\sigma^2 - \sigma^2 - \sigma^2 = (n-2)\sigma^2. \quad (6.60)$$

Поступая подобным же образом, найдем, что вообще

$$\sigma_t^2 = \frac{S_0}{n-m} \sum_{h=1}^n \frac{\lambda_h^2}{w_h}.$$

Число

$$v = n - m, \quad (6.61)$$

стоящее в знаменателе выражения (6.38) и равное разности между числом наблюдений n и числом независимых параметров m , называется *числом степеней свободы*.

§ 3. Распределение статистик

1. χ^2 -распределение Пирсона. При оценке параметров требуется знание точных распределений статистик в частичных совокупностях (§ 1, п. 1).

Среди статистик, применяемых в критериях значимости, важнейшими являются χ^2 , t и F .

В основе распределения этих статистик лежат гамма- и бета-распределения.

При выводе распределений этих статистик необходимо учитывать линейные связи, ограничивающие свободу изменения случайных величин. Число независимых величин, остающихся свободными за вычетом числа линейных связей, называется *числом степеней свободы* распределения случайных величин и обозначается буквой ν (см. (6.61)).

Пусть все возможные связи между n случайными величинами являются функциональными связями. Положим, что имеется лишь m независимых линейных связей. Тогда $\nu = n - m$ и будет искомым числом степеней свободы.

Установив понятие числа степеней свободы, рассмотрим распределение статистики χ^2 .

Положим, что независимые случайные величины x_h ($h = \overline{1, n}$) имеют нормальное распределение с общим средним значением, равным нулю, и дисперсиями σ_h^2 ($h = \overline{1, n}$).

Введем обозначение

$$\chi^2 = \sum_{h=1}^n \frac{x_h^2}{\sigma_h^2}. \quad (6.62)$$

Тогда, на основании (5.147), находим, что статистика $\frac{1}{2}\chi^2$ имеет гамма-распределение с параметром $\frac{1}{2}n$.

Таким образом, дифференциал распределения величины χ^2 имеет вид

$$dP = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\left(\frac{1}{2}\chi^2\right). \quad (6.63)$$

Учитывая линейные связи, ограничивающие изменение случайных величин, мы должны в формуле (6.63) вместо числа величин n взять число степеней свободы ν . Таким образом, дифференциал χ^2 -распределения с ν степенями свободы принимает следующий вид:

$$dP(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi^2, \quad (6.64)$$

и функция χ^2 -распределения равна

$$P(\chi^2 < x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^x (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi^2 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (6.65)$$

Функция плотности χ^2 -распределения

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \quad (6.66)$$

обладает следующими свойствами:

При $\nu = 1$, когда

$$f(\chi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\chi^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2},$$

функция всюду убывает от ∞ , когда $\chi^2 \rightarrow 0$, до 0, когда $\chi^2 \rightarrow \infty$.

При $\nu = 2$, когда

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2},$$

функция всюду убывает от $1/2$, когда $\chi^2 = 0$, до 0, когда $\chi^2 \rightarrow \infty$.

Введя обозначение $u = \chi^2$, получим $f(u) = \frac{1}{2} e^{-u/2}$ (показательное распределение) (6.66).

При $\nu > 2$ функция $f(\chi^2)$, начиная от 0 при $\chi^2 = 0$, сначала возрастает до максимума в точке $\chi^2 = \nu - 2$, а затем убывает более медленно, стремясь к 0, когда χ^2 неограниченно возрастает.

Графики функции $f(\chi^2)$ для $\nu = 1, 6$ представлены на рис. 6.2. Характеристическая функция χ^2 -распределения равна

$$\varphi(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty e^{itx} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}(1-2it)} dx.$$

Применяя подстановку $z = \frac{x}{2}(1-2it)$, получим

$$\varphi(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty \left(\frac{2z}{1-2it}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-z} \frac{2dz}{1-2it} = (1-2it)^{-\nu/2}. \quad (6.67)$$

Отсюда, применяя (4.126), находим моменты χ^2 -распределения

$$m_h = \nu(\nu+2) \dots (\nu+2h-2). \quad (6.68)$$

В частности,

$$m_1 = \bar{X} = v, \quad \mu_2 = 2v, \quad r_3 = \sqrt{\frac{8}{v}}, \quad r_4 = 3 + \frac{12}{v}. \quad (6.68^*)$$

При $v \rightarrow \infty$

$$r_3 \rightarrow 0, \quad r_4 \rightarrow 3.$$

Таким образом, χ^2 -распределение является асимптотически нормальным.

Распределение статистики χ^2 сходится к нормальному очень медленно; однако было найдено, что при $v > 30$ величина $\sqrt{2\chi^2}$ распределяется приблизительно нормально со средним значением $\sqrt{2v-1}$ и дисперсией 1.

Вероятность $P(\chi_0^2)$ получить значение χ^2 , превосходящее некоторое наблюдаемое значение этой величины χ_0^2 , имеет вид

$$P(\chi_0^2) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \chi_0^2} \int_{\chi_0^2}^{\infty} (\chi^2)^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi^2. \quad (6.69)$$

На рис. 6.3 вероятность $P(\chi_0^2)$ представляет площадь кривой, расположенную справа от ординаты в точке χ_0^2 , деленную на всю площадь кривой.

Интеграл (6.69), распространенный по всему размаху изменения χ^2 от 0 до ∞ , равен единице, что легко проверить. В самом деле, применяя подстановку $\frac{1}{2}\chi^2 = t$, находим

$$\frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^{\infty} (\chi^2)^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi^2 = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} 2^{\frac{v}{2}} \int_0^{\infty} t^{\frac{v}{2}-1} e^{-t} dt = 1.$$

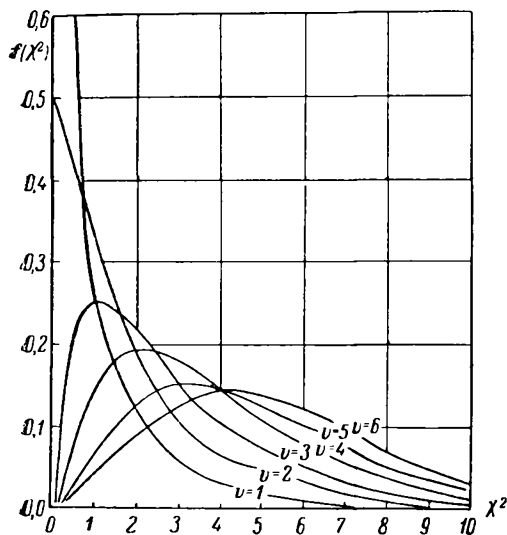
Распределения статистики χ^2 , выражаемое формулой (6.69), называется χ^2 -распределением Пирсона.

Для χ^2 -распределения составлена табл. XVI, дающая возможность по данному значению χ^2 и числу степеней свободы v найти вероятность $P(\chi_0^2)$ того, что χ^2 превзойдет наблюдаемое (данное) значение χ_0^2 . Например, при числе степеней свободы $v = 10$ вероятность получить при наблюдении значение χ^2 больше 18,3 равна 0,05.

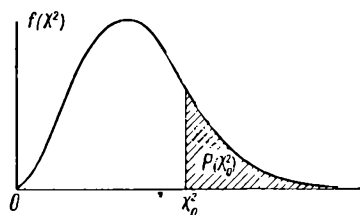
В качестве границы между случайным и существенным обычно берется 5%-ный уровень значимости. Если $P(\chi^2)$ будет меньше 0,05, то наблюдаемое значение χ^2 считается неслучайным, так как событие с такой малой вероятностью полагается, по условию, практически невозможным. В таком случае расхождение между

гипотезой и наблюдаемыми данными также надо считать не случайным, а существенным. Следовательно, малая величина $P(\chi^2)$ указывает на недостаточное согласие между гипотезой и наблюдениями. Если же вероятность $P(\chi^2)$ будет равна или больше 0,05, то расхождение между гипотезой и наблюдениями можно считать случайным, а гипотезу считать более или менее согласующейся с наблюдениями.

Таблица значений χ^2 может быть применена непосредственно, если требуется установить односторонний критерий значимости.

Рис. 6.2. χ^2 -распределение.

Для того же чтобы получить двусторонний критерий, необходимо войти в таблицу при вероятности, равной половине требуемого уровня значимости. Например, если при двустороннем критерии надо обеспечить 5%-ный уровень значимости, то надо взять табличное значение при 2,5%-ном уровне.

Рис. 6.3. Вероятность $P(\chi^2)$.

Как указано выше, когда $\nu > 30$, величина $\sqrt{2\chi^2}$ имеет приближенно нормальное распределение со средним значением $\sqrt{2\nu - 1}$ и основным отклонением, равным единице. В этих случаях применяется нормальное распределение и, следовательно, можно воспользоваться табл. VIII при

$$x = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}. \quad (6.70)$$

Пусть например, $\chi^2 = 62,37$ и $\nu = 42$; тогда $x = \sqrt{124,74} - \sqrt{83} = 2,06$. Это число больше значения $x = 1,96$, соответствующего 5%-ному уровню значимости для двустороннего критерия; следовательно, значение уровня значимости в рассматриваемом случае, где мы должны применить односторонний критерий, оказывается меньше 2,5%.

К тому же самому выводу приходим непосредственно, применяя формулу

$$P(\chi^2) = \frac{1}{2} [1 - \Phi(x)]. \quad (6.71)$$

Имеем

$$\begin{aligned} P(\chi^2) &= \frac{1}{2} [1 - \Phi(2,06)] = \frac{1}{2} (1 - 0,96060) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,03940 = 0,01970 = 1,97\%, \end{aligned}$$

т. е. меньше 2,5%.

В приложениях статистика (6.62) принимает вид

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(u_j - \tilde{u}_j)^2}{\tilde{u}_j}, \quad (6.72)$$

где u_j — наблюдаемые, а \tilde{u}_j — ожидаемые значения исследуемых величин.

2. t -распределение Стьюдента. Рассмотрим теперь распределение статистики t .

При достаточно большом объеме частичной совокупности мы можем, на основании закона больших чисел, делать вполне надежные заключения о параметрах общей совокупности по соответствующим статистикам. В частности, среднее значение \bar{x} частичной совокупности из n значений, полученных путем независимых испытаний относительно случайной величины x , имеющей нормальное распределение со средним значением \bar{x}_0 и дисперсией σ^2 , распределяется нормально со средним значением \bar{x}_0 и дисперсией σ^2/n [см. (5.85)]. Отсюда следует, что нормированное значение (6.1) распределяется нормально со средним значением, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

Однако при научных исследованиях дисперсия общей совокупности σ^2 почти всегда оказывается неизвестной и, следовательно, мы не можем произвести нормирование. Имея наблюдаемую частичную совокупность, мы можем только найти несмещенную оценку s^2 дисперсии σ^2 , а именно можем вычислить

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{(j)} - \bar{x})^2}{n-1} \quad (6.73)$$

[см. (6.13)].

Отклонение среднего значения частичной совокупности от среднего значения нормальной общей совокупности, нормированное при помощи этой оценки, обозначается буквой t :

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}. \quad (6.74)$$

Распределение статистики t имеет вид

$$S_v(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{\tau^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} d\tau, \quad (6.75)$$

где v — число степеней свободы; в данном случае

$$v = n - 1. \quad (6.76)$$

Это распределение может быть получено непосредственно из бета-распределения второго рода

$$df(u) = \frac{u^{p-1}}{B(p, q)(1+u)^{p+q}} du \quad (6.77)$$

[см. (5.152)].

Полагая в этом выражении $u = t^2/v$, $p = 1/2$, $q = v/2$, получим

$$df\left(\frac{t^2}{v}\right) = \frac{\left(\frac{t^2}{v}\right)^{\frac{1}{2}-1}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{v}{2}\right)\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{v}{2}}} d\left(\frac{t^2}{v}\right),$$

или

$$df(t^2) = \frac{(t^2)^{-1/2}}{\sqrt{v}B\left(\frac{1}{2}, \frac{v}{2}\right)\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{v+1/2}} d(t^2), \quad (6.78)$$

причем величина t^2 имеет размах от 0 до ∞ .

Из (6.78) находим распределение статистики t , имеющей размах от $-\infty$ до $+\infty$, в виде

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}. \quad (6.79)$$

При $v = 1$ получим

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} \quad (6.79^*)$$

(распределение Коши).

Интегрируя (6.79) в пределах от $-\infty$ до t , получим (6.75), что выражает вероятность случайных значений τ меньших, чем заданное значение t :

$$S_v(t) = P\{\tau < t\}. \quad (6.80)$$

Распределение $S_v(t)$ называется *t-распределением Стьюдента* (Госсет) с v степенями свободы.

В этом распределении число $n = v + 1$ может быть каким угодно. Разумеется, распределение $S_v(t)$ может быть применено и при малом объеме частичной совокупности. Благодаря этому

t -распределение Стьюдента лежит в основе методов оценки при малом числе наблюдений.

Для функции $S_v(t)$ составлены таблицы, аналогичные таблицам значений интеграла вероятностей. Однако в большинстве случаев не требуется точного знания вероятности P , а достаточно знать, является ли значимым наблюдаемое значение t .

На этот вопрос дается ответ таблицей значений t , соответствующих заданному уровню значимости при данном числе степеней свободы [t — верхний предел интеграла (6.75)] (табл. XVII).

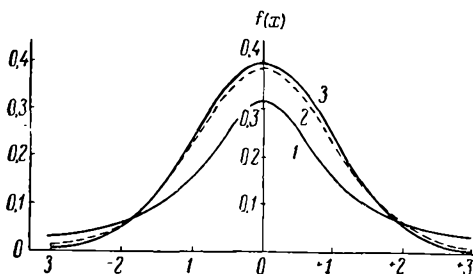


Рис. 6.4. t -распределение при $v=1$ (1) и $v=9$ (2) и нормальная кривая (3).

В заголовках этой таблицы в строке (Q) указаны вероятности при употреблении одностороннего критерия значимости, когда необходимо знать вероятность, что t превосходит некоторое значение только в положительном (или только в отрицательном) направлении, а в строке (2Q) указаны вероятности при употреблении двустороннего критерия значимости, когда опреде-

ляется вероятность, что t будет по абсолютной величине больше некоторого значения.

Например, при употреблении одностороннего критерия значимости, при числе степеней свободы $v=10$, мы можем с вероятностью, равной 0,05, ожидать, что t будет больше 1,81 ($t > 1,81$); подобным же образом при употреблении двустороннего критерия значимости, при числе степеней свободы $v=10$, мы можем с вероятностью, равной 0,05, ожидать, что значение t будет по абсолютной величине больше 2,23 ($|t| > 2,23$, т. е. меньше $-2,23$ или больше $+2,23$).

Обычно пользуются 5%-ным уровнем значимости, так что наблюдаемое значение t , превосходящее по абсолютной величине табличное значение при величине вероятности 0,05, считается значимым; если же наблюдаемое значение t окажется по абсолютной величине больше табличного при величине вероятности 0,01, то оно считается весьма значимым.

Из табл. XVII видно, что уже при $v=30$ t -распределение практически мало отличается от нормального распределения (см. последнюю строку этой таблицы). При малых же значениях v t -распределение заметно отличается от нормального, являясь более островершинным, чем нормальное распределение (рис. 6.4).

При всяком числе наблюдений t -распределение возникает для частичных совокупностей, образованных из нормальной общей

совокупности, но оно в известной мере применимо и тогда, когда частичные совокупности взяты из общей совокупности, распределение которой более или менее отличается от нормального.

3. F -распределение Фишера. Рассмотрим, наконец, распределение статистики F .

Положим, что имеются две независимые частичные совокупности

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_{j_1}, \dots, x'_{n_1} \quad \text{и} \quad x''_1, x''_2, \dots, x''_{j_2}, \dots, x''_{n_2},$$

средние значения которых равны соответственно \bar{x}_1 и \bar{x}_2 . На основании этих совокупностей получим оценки s_1^2 и s_2^2 дисперсий общих совокупностей:

$$s_1^2 = \frac{\sum_{j_1=1}^{n_1} (x'_{j_1} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}, \quad s_2^2 = \frac{\sum_{j_2=1}^{n_2} (x''_{j_2} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1},$$

для которых числа степеней свободы равны соответственно

$$v_1 = n_1 - 1, \quad v_2 = n_2 - 1.$$

Требуется выяснить, являются ли эти оценки существенно различными, или же данные частичные совокупности можно рассматривать как взятые наудачу из нормальных общих совокупностей, имеющих равные дисперсии σ^2 .

Для решения этой задачи применяется статистика F , называемая дисперсионным отношением. Статистика F представляет отношение оценок s_1^2 и s_2^2 , полученных из независимых частичных совокупностей, взятых наудачу из нормальных общих совокупностей с одинаковой дисперсией σ^2 :

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \quad (6.81)$$

причем берется $s_1^2 > s_2^2$.

Распределение статистики F имеет вид

$$P(\bar{F}) = \frac{v_1^{\frac{v_1}{2}} v_2^{\frac{v_2}{2}} \Gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \int_{\bar{F}}^{\infty} \frac{F^{\frac{v_1-2}{2}}}{(v_2 + v_1 F)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} aF. \quad (6.82)$$

Это распределение можно получить непосредственно из бета-распределения второго рода, полагая в (5.152)

$$u = \frac{v_1}{v_2} F, \quad p = \frac{v_1}{2}, \quad q = \frac{v_2}{2}$$

и распространяя интегрирование от \bar{F} до ∞ .

Распределение (6.82), называемое *F-распределением Фишера*, выражает вероятность того, что некоторое значение F будет больше или равно \bar{F} :

$$P(\bar{F}) = P\{F \geq \bar{F}\}. \quad (6.83)$$

F -распределение не зависит от дисперсии общей совокупности, а зависит только от чисел степеней свободы ν_1 и ν_2 .

График функции

$$f(F) = \frac{\frac{\nu_1}{2} \frac{\nu_2}{2} \Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \frac{F^{\frac{\nu_1 - 2}{2}}}{(v_2 + \nu_1 F)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}} \quad (6.84)$$

дан на рис. 6.5.

Для статистики F составлены таблицы при разном числе степеней свободы и разных уровнях значимости. Имеются *таблицы значений F* , которые могут быть превзойдены соответственно с вероятностью 0,05; 0,025; 0,01 и 0,005 (табл. XVIII—XXI). Число степеней свободы ν_1 , соответствующее большей оценке s_1^2 , определяет столбец таблицы, а число ν_2 , соответствующее меньшей оценке s_2^2 , определяет строку таблицы.

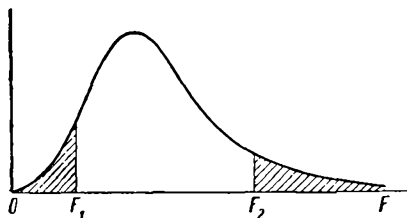


Рис 6.5. F -распределение.

Заметим при этом, что статистика F чаще всего применяется при дисперсионном анализе, в котором требуется только односторонний критерий значимости. Поэтому таблицы F -распределения составлены именно для случая применения одностороннего критерия значимости. Например, если при 5%-ном уровне значимости (см. табл. XVIII) $\nu_1 = 8$ и $\nu_2 = 10$, то вероятность, что наблюдаемое значение F будет больше 3,07, точно равна 0,05. Если при 1%-ном уровне значимости (см. табл. XX) $\nu_1 = 8$ и $\nu_2 = 10$, то вероятность, что наблюдаемое значение F будет больше 5,06, точно равна 0,01.

Нулевая гипотеза, которая проверяется при помощи статистики F , состоит в том, что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, т. е. частичные совокупности взяты из одной и той же нормальной общей совокупности или же из нормальных общих совокупностей равной дисперсии.

В случае, когда противопоставляемая гипотеза состоит в том, что $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, т. е. при одностороннем критерии значимости, значения F даются таблицами непосредственно. Если полученное из наблюдений значение F окажется больше табличного при взятом

уровне значимости, то нулевая гипотеза отвергается, т. е. разность между рассматриваемыми дисперсиями признается существенной; если же наблюдаемое значение F окажется меньше табличного, то нулевая гипотеза остается неопровергнутой, т. е. разность между сравниваемыми дисперсиями считается случайной.

В том же случае, когда гипотеза, противопоставляемая нулевой, состоит просто в том, что $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, критерий значимости будет двусторонним. В таком случае, вычислив отношение большей дисперсии s_1^2 к меньшей s_2^2 , мы должны удвоить вероятности таблиц значений F , чтобы получить эти значения при взятом уровне значимости. Например, чтобы получить значение F при 5%-ном уровне значимости, мы должны применить табл. XIX, дающую значение F при 2,5%-ном уровне значимости.

§ 4. Критерии согласия

1. Критерий согласия Колмогорова $K(\lambda)$. Путем рассмотрения статистик вместе с их основными ошибками можно с определенной степенью уверенности установить границы, внутри которых находятся соответствующие параметры общей совокупности, т. е. сделать определенные выводы, относящиеся лишь к отдельным свойствам случайных величин, а не ко всему их распределению, взятому в целом.

Поэтому необходимо иметь такой показатель, который измерял бы степень случайного расхождения (или согласия) между наблюдаемым рядом и распределением самой случайной величины в целом. Такой показатель также являлся бы случайной величиной, так что мы могли бы основывать наши выводы на его распределении, используя какой-либо уровень значимости.

Имеется несколько показателей такого рода, лежащих в основе соответствующих *критериев согласия*. Мы рассмотрим здесь критерии согласия Колмогорова $K(\lambda)$ и Пирсона $P(\chi^2)$. Оба эти критерия применяются в предположении, что объем частичной совокупности является достаточно большим.

Рассмотрим сначала *критерий согласия Колмогорова*.

Положим, что на основании достаточно большого числа независимых наблюдений над случайной величиной X составлена частичная совокупность значений этой величины

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Требуется выяснить, согласуется ли с этими данными гипотеза, что рассматриваемая случайная величина имеет определенную непрерывную интегральную функцию распределения $F(x)$.

Предположим, что эта гипотеза верна. Обозначим через $F_n(x)$ ступенчатую функцию накопленных частотей наблюдаемого ряда распределения

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq x_1, \\ \frac{k}{n} & \text{для } x_k < x \leq x_{k+1}, \\ 1 & \text{для } x > x_n \end{cases}$$

и образуем разность

$$|F_n(x) - F(x)|.$$

Наибольшее значение этой разности (это и есть тот показатель, о котором говорилось выше)

$$D_n = \max_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| \quad (6.85)$$

представляет случайную величину, предельное распределение которой было установлено Колмогоровым.

Точнее, *распределение Колмогорова* выражает предельную вероятность, что значение D_n , умноженное на \sqrt{n} , не будет превосходить заданного числа λ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{D_n \sqrt{n} \leq \lambda\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2} = K(\lambda), \quad (6.86)$$

какой бы ни была непрерывная функция $F(x)$.

На основании предельного соотношения (6.86) можно написать при больших n следующее приближенное равенство:

$$\mathbf{P} \left\{ F(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \leq F_n(x) \leq F(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right\} \approx K(\lambda). \quad (6.87)$$

Таблица значений функции

$$1 - K(\lambda) = \mathbf{P} \{D_n \sqrt{n} > \lambda\} \quad (6.88)$$

приведена в конце книги (табл. XXII).

Применение критерия согласия Колмогорова $K(\lambda)$ состоит в следующем.

Сравнивая наблюдаемые значения функций частотей $F_n(x)$ со значениями выравнивающей непрерывной интегральной функцией распределения $F(x)$ и найдя наибольшее абсолютное значение разности между ними $D_n^{(0)}$, составляют произведение

$$\lambda_0 = D_n^{(0)} \sqrt{n}. \quad (6.89)$$

Для этого значения λ_0 находят значение $1 - K(\lambda_0)$ из табл. XXII.

При выводах обычно пользуются 5%-ным уровнем значимости, при котором величина вероятности равна $P = 0,05$. Если значение $1 - K(\lambda)$, найденное по табл. XXII для данного значения λ_0 , будет

при взятом уровне значимости мало, т. е. не более 0,05, то это показывает, что осуществилось маловероятное событие; следовательно, расхождение между наблюдаемым рядом и выравнивающим распределением надо признать существенным, которое нельзя объяснить чисто случайными колебаниями, имеющими место в частичной совокупности. Если же найденное значение $1 - K(\lambda)$ не мало, то расхождение между наблюдаемым рядом и выравнивающим распределением следует признать случайным, и принятое распределение $F(x)$ можно с той же оговоркой считать согласованным с наблюдаемым распределением $F_n(x)$.

Критерий согласия Колмогорова может быть применен также для оценки расхождения между двумя рядами распределения, полученными в результате независимых испытаний относительно одной и той же величины x с непрерывной функцией распределения.

Пусть $F_{n_1}(x)$ и $F_{n_2}(x)$ представляют ступенчатые функции накопленных частот в частичных совокупностях достаточно большого объема n_1 и n_2 .

Образовав величину

$$\lambda_0 = D \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \quad (6.90)$$

где

$$D = \max_{-\infty < x < \infty} |F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)|, \quad (6.91)$$

применяют табл. XXII.

При вычислении критерия согласия Колмогорова необходимо иметь в виду, что число наблюдений должно быть достаточно велико и при этом недопустимо объединение в очень крупные разряды. Кроме того, случайная величина должна иметь распределение непрерывного типа.

В качестве примера вычислим критерий согласия $K(\lambda)$ между наблюдаемым распределением модуля упругости $E \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^2$ при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели и соответствующей нормальной функцией распределения (табл. 6.2).

Здесь $X_a = 130$, $m_1 = -0,3025$, $\sigma = 5,586$.

Значения нормальной функции распределения $F(x)$ находят по табл. IX для аргумента

$$x = \frac{x' - m_1 + 0,5}{\sigma}. \quad (6.92)$$

Так как накопленная частота соответствует верхней границе разряда, то в формуле (6.92) к отклонению от среднего значения, т. е. $x' - m_1$, соответствующему середине разряда, прибавляется 0,5, т. е. половина разряда c , равного единице. Найдем, например, x для $X_{(j)} = 62$. Здесь $x' = \frac{62 - 130}{4} = -17$,

$$x = \frac{-17 + 0,3025 + 0,5}{5,586} = -\frac{16,1975}{5,586} = -2,90.$$

Таблица 6.2

Схема вычисления критерия согласия Колмогорова
(для ряда распределения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели.
составленного на основании данных табл. 1.2)

| $X_{(j)}$ | n_j | N_j | x | $F_n(x)$ | $F(x)$ | $ F_n(x) - F(x) $ | $X_{(j)}$ | n_j | N_j | x | $F_n(x)$ | $F(x)$ | $ F_n(x) - F(x) $ |
|-----------|-------|-------|-------|----------|--------|-------------------|-----------|-------|-------|-------|----------|--------|-------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 62 | 1 | 1 | -2,90 | 0,002 | 0,002 | 0,000 | 134 | 21 | 251 | +0,32 | 0,628 | 0,626 | 0,002 |
| 66 | 1 | 2 | -2,72 | 0,005 | 0,003 | 0,002 | 138 | 27 | 278 | +0,50 | 0,696 | 0,691 | 0,005 |
| 70 | 2 | 4 | -2,54 | 0,010 | 0,005 | 0,004 | 142 | 23 | 301 | +0,68 | 0,752 | 0,752 | 0,000 |
| 74 | 3 | 7 | -2,36 | 0,018 | 0,009 | 0,007 | 146 | 25 | 326 | +0,86 | 0,815 | 0,805 | 0,010 |
| 78 | — | 7 | -2,18 | 0,018 | 0,015 | 0,003 | 150 | 15 | 341 | +1,04 | 0,852 | 0,851 | 0,001 |
| 82 | 3 | 10 | -2,00 | 0,025 | 0,023 | 0,002 | 154 | 17 | 358 | +1,22 | 0,895 | 0,889 | 0,006 |
| 86 | 8 | 18 | -1,83 | 0,045 | 0,034 | 0,011 | 158 | 11 | 369 | +1,40 | 0,922 | 0,919 | 0,003 |
| 90 | 5 | 23 | -1,65 | 0,058 | 0,049 | 0,009 | 162 | 8 | 377 | +1,58 | 0,942 | 0,943 | 0,001 |
| 94 | 8 | 31 | -1,47 | 0,078 | 0,071 | 0,007 | 166 | 6 | 383 | +1,75 | 0,958 | 0,960 | 0,002 |
| 98 | 9 | 40 | -1,29 | 0,100 | 0,099 | 0,001 | 170 | 5 | 388 | +1,93 | 0,970 | 0,973 | 0,003 |
| 102 | 9 | 49 | -1,11 | 0,122 | 0,133 | 0,011 | 174 | 4 | 392 | +2,11 | 0,980 | 0,983 | 0,003 |
| 106 | 18 | 67 | -0,93 | 0,198 | 0,176 | 0,022* | 178 | 4 | 396 | +2,29 | 0,990 | 0,983 | 0,001 |
| 110 | 16 | 83 | -0,75 | 0,208 | 0,227 | 0,019 | 182 | 2 | 398 | +2,47 | 0,995 | 0,993 | 0,002 |
| 114 | 22 | 105 | -0,57 | 0,262 | 0,284 | 0,022 | 186 | 1 | 399 | +2,65 | 0,998 | 0,996 | 0,002 |
| 118 | 27 | 132 | -0,39 | 0,330 | 0,348 | 0,018 | 190 | — | 399 | +2,65 | 0,998 | 0,998 | 0,000 |
| 122 | 30 | 162 | -0,21 | 0,405 | 0,417 | 0,012 | 194 | 1 | 400 | +3,01 | 1,000 | 0,999 | 0,001 |
| 126 | 32 | 194 | -0,04 | 0,485 | 0,484 | 0,001 | | | | | | | — |
| 130 | 36 | 230 | +0,14 | 0,575 | 0,556 | 0,019 | Σ | 400 | — | — | — | — | |

(О применении таблицы значений функции $F(x)$ при положительном и отрицательном аргументе см. гл. V, § 2, п. 4.)

Наблюдаемые накопленные частоты $F_n(x)$, определяемые по формуле (1.14), выписываются в столбце (5) таблицы, значения $F(x)$ — в столбце (6), а абсолютные значения разности $|F_n(x) - F(x)|$ — в столбце (7). Наибольшее значение разности оказалось (для $X_{(j)} = 106$) $D_n^{(0)} = 0,022$. Следовательно, $\lambda_0 = 0,022 \cdot \sqrt{400} = 0,440$. Для этого значения λ_0 по табл. XXII находим

$$1 - K(\lambda) = 0,99027.$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что нормальное распределение можно считать согласованным с наблюдаемым рядом распределения.

2. Критерий согласия Пирсона $P(\chi^2)$. Рассмотрим теперь критерий согласия Пирсона $P(\chi^2)$.

Величина вероятности $P(\chi^2)$ в известных случаях дает возможность судить о согласии между гипотезой и наблюдаемыми данными. Например, значение $P(\chi^2)$ может служить критерием согласия выравнивающего распределения с наблюдаемым рядом распределения. В этом случае величина (6.72) будет иметь вид

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - \tilde{n}_j)^2}{\tilde{n}_j}, \quad (6.93)$$

где n_j — наблюдаемые, а \tilde{n}_j — выравнивающие частоты.

Применение критерия $P(\chi^2)$ связано с указанием двух областей возможных значений величины χ^2 : область, попадание в которую мы условимся считать существенным, и область значений, которые возникают благодаря чисто случайным колебаниям, имеющим место в частичных совокупностях.

По табл. XVI мы находим вероятность $P(\chi_0^2)$ события $\chi^2 \geq \chi_0^2$, где χ_0^2 — наблюдаемое (данное) значение.

Для обоснованного применения критерия согласия $P(\chi^2)$ необходимо иметь в виду, что при выводе распределения величины (6.93) предполагается, что биномиальное распределение частоты n_j может быть сведено к нормальному. Но соответствующий предельный переход осуществляется достаточно быстро, только если ни одна из вероятностей p и q не очень мала (гл. V, § 2, п. 1). Отсюда следует, что применение критерия согласия $P(\chi^2)$ является обоснованным только в том случае, если ни одна из разрядных частот не будет очень мала.

Поэтому при применении критерия согласия $P(\chi^2)$ необходимо частоты крайних разрядов, представляющих обычно малые числа, объединять между собой. Это вносит некоторую неопределенность, которую можно устранить, если условиться при вычислении χ^2

объединять крайние частоты распределения так, чтобы частота объединенного разряда была не меньше пяти.

При употреблении критерия согласия $P(\chi^2)$ важное значение имеет правильный подсчет числа степеней свободы.

Число степеней свободы разрядных частот данного ряда или таблицы распределения показывает, сколько из этих частот остается свободными, т. е. сколько разрядных клеток может быть заполнено произвольно, если принять во внимание число независимых линейных связей, которым подчиняются эти частоты. При подборе выравнивающей функции распределения к наблюдаемому распределению такие линейные связи обуславливаются неизвестными параметрами, входящими в уравнения кривых распределения, если значения этих параметров приходится устанавливать на основе выравниваемого ряда, т. е. брать за эти параметры значения тех или иных статистик (обычно моментов). При подсчете числа степеней свободы ν надо из числа k разрядных частот вычесть число q таких статистик (линейных связей), т. е. находить по формуле

$$\nu = k - q. \quad (6.94)$$

[ср. (6.61)].

Например, если при подборе нормального распределения к наблюдаемому ряду распределения были приравнены только итоги этих распределений, а среднее значение и основное отклонение нормального распределения известны до опыта, то будет иметься одна линейная связь (сумма наблюдаемых частот равна n) и, следовательно, число степеней свободы будет равно

$$\nu = k - 1.$$

Вообще же в случае нормального распределения, устанавливаемого на основании наблюдаемого распределения, частоты подчинены трем связям. В самом деле, помимо условия, что сумма наблюдаемых частот (объем частичной совокупности) фиксирована, от выравнивающего нормального распределения естественно потребовать, чтобы выравнивающие частоты давали среднее значение и основное отклонение, равные соответствующим статистикам наблюдаемой частичной совокупности. Таким образом, в этом случае

$$\nu = k - 3.$$

При подборе биномиального распределения и распределения Пуассона

$$\nu = k - 2,$$

так как в этом случае имеются две связи: 1) сумма наблюдаемых частот фиксирована и 2) выравнивающие частоты должны давать среднее значение, равное соответствующей статистике наблюдаемой частичной совокупности.

Кривая распределения типа III подбирается путем аналогичного приравнивания среднего значения, μ_2 и μ_3 и фиксирования n , так что здесь имеются четыре связи; следовательно,

$$\nu = k - 4.$$

Кривые распределения типа I, IV и VI требуют еще приравнивания μ_4 , так что число связей возрастает до пяти; следовательно, в этом случае

$$\nu = k - 5.$$

Подобным же образом, при подборе кривой распределения типа A приравниваются первые четыре момента и фиксируется n , т. е. здесь тоже имеется пять связей, и число степеней свободы равно

$$\nu = k - 5.$$

Применение критерия согласия $P(\chi^2)$ сводится к вычислению значения χ^2 по формуле (6.93).

Вычислительная работа располагается по схеме табл. 6.3. В качестве примера взят ряд распределения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели

Таблица 6.3

Схема вычисления критерия согласия Пирсона
(для ряда распределения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели)

| $X(j)$ ($E \cdot 10^{-3}$ кг/см ²) | n_j | \tilde{n}_j | $n_j - \tilde{n}_j$ | $(n_j - \tilde{n}_j)^2$ | $\frac{(n_j - \tilde{n}_j)^2}{\tilde{n}_j}$ | $\frac{n_j^2}{\tilde{n}_j}$ |
|--|-------|---------------|---------------------|-------------------------|---|--|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 74и < | 7 | 6,42 | 0,58 | 0,3364 | 0,05 | 7,63 |
| 88 | 20 | 19,47 | 0,53 | 0,2809 | 0,01 | 20,54 |
| 102 | 44 | 48,90 | -4,90 | 24,0100 | 0,49 | 39,59 |
| 116 | 87 | 83,89 | 3,11 | 9,6721 | 0,12 | 90,23 |
| 130 | 100 | 98,35 | 1,65 | 2,7225 | 0,03 | 101,68 |
| 144 | 79 | 78,79 | 0,21 | 0,0441 | 0,00 | 79,21 |
| 158 | 42 | 43,12 | -1,12 | 1,2544 | 0,03 | 41,91 |
| 172 | 16 | 16,13 | -0,13 | 0,0169 | 0,00 | 15,87 |
| 186и > | 5 | 4,93 | 0,07 | 0,0049 | 0,00 | 5,07 |
| Σ | 400 | 400,00 | -6,15 +6,15 | — | 0,73 = χ^2 | 400,73 |
| $k = 9, \quad \nu = k - 3 = 6, \quad P(\chi^2) > 0,99$ | | | | | | $\frac{400,73}{400,00}$ $\chi^2 = 0,73$ |

($E \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^2$) (табл. 5.5). Сумма чисел столбца (6) схемы дает искомое значение χ^2 .

Проверка вычисления χ^2 производится по формуле

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{n_j^2}{\bar{n}_j} - n. \quad (6.95)$$

Эта формула получается непосредственно из формулы (6.93), если в последней раскрыть скобки и заметить, что сумма наблюдаемых частот должна равняться сумме выравнивающих частот. Для проверки вычисления χ^2 по формуле (6.95) образуется столбец (7), в котором помещаются частные от деления квадратов наблюдаемых частот на выравнивающие частоты. Сумма чисел этого столбца, уменьшенная на объем ряда, даст χ^2 .

В нижней части схемы производится подсчет числа степеней свободы и выписывается соответствующее значение $P(\chi^2)$.

В рассматриваемом случае $\chi^2 = 0,73$, число разрядов равно девяти, число степеней свободы равно $\nu = k - 3 = 6$. Для этих значений χ^2 и ν находим по табл. XVI

$$P(\chi^2) > 0,99.$$

Таким образом, вероятность случайного совокупного расхождения между наблюдаемыми и выравнивающими частотами не меньшего, чем полученное, близка к единице. Следовательно, можно считать, что полученные расхождения являются случайными, происшедшими в результате случайных колебаний, имеющих место в частичных совокупностях. Иначе говоря, можно считать выравнивание с помощью нормального распределения хорошо согласующимся с наблюдаемыми данными.

Подобным же образом, вычисляя критерий согласия $P(\chi^2)$ для ряда распределения возраста научных работников СССР (см. табл. 5.16), находим

$$\chi^2 = 1,47, \quad \nu = k - 5 = 6, \quad P(\chi^2) > 0,96.$$

Романовский предложил очень простое правило, значительно облегчающее применение критерия согласия Пирсона для оценки расхождения между наблюдаемыми и выравнивающими частотами:

Если

$$\frac{|\chi^2 - \nu|}{\sqrt{2\nu}} \geq 3, \quad (6.96)$$

то расхождение можно считать существенным; если же

$$\frac{|\chi^2 - \nu|}{\sqrt{2\nu}} < 3, \quad (6.97)$$

то расхождение можно считать случайным.

Это правило основывается на том, что

$$M(\chi^2) = \nu, \quad \sigma_{\chi^2}^2 = 2\nu$$

[см. [6.68*)] и что вероятность значений χ^2 , отклоняющихся от ν меньше чем на $3\sigma_{\chi^2}$, т. е. на $3\sqrt{2\nu}$ в ту или другую сторону, близка к единице.

Например, для ряда распределения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели имеем

$$\frac{|\chi^2 - \nu|}{\sqrt{2\nu}} = \frac{|0,73 - 61|}{\sqrt{12}} = \frac{5,27}{3,45} = 1,5 < 3.$$

Следовательно, расхождение между наблюдаемым и выравнивающим распределением можно считать случайным.

3. Значение подбора кривых распределения. Критерии согласия показывают, можем ли мы считать, что взятая кривая распределения действительно выравнивает исследуемый ряд распределения. Другими словами, критерии согласия показывают, можем ли мы для объяснения данного наблюдаемого ряда распределения использовать те объективные черты, которые образуют сущность взятого распределения. Например, при подборе кривой распределения для ряда распределения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели (табл. 5.4) было найдено, что эта кривая является, по-видимому, нормальной. Критерий согласия $P(\chi^2)$ подтвердил, что действительно можно считать нормальное распределение хорошо согласующимся с наблюдаемым распределением (п. 2). Следовательно, для объяснения рассматриваемого ряда мы можем применить те черты, которые лежат в основе нормального распределения (гл. V, § 2, п. 4).

Нахождение кривой распределения, другими словами, установление распределения самой случайной величины, дает возможность более глубоко исследовать явление, далеко не полно выражаемое данным конкретным рядом распределения. Представив на чертеже как найденную выравнивающую кривую распределения, так и многоугольник распределения, построенный на основе частичной совокупности, исследователь может ясно видеть характерные особенности, присущие изучаемому явлению. Благодаря этому статистический анализ задерживает внимание исследователя на отклонениях наблюдаемых данных от некоторого закономерного изменения явления, и перед исследователем возникает задача — выявить причины этих отклонений.

Рассмотрим, например, ряд распределения возраста научных работников СССР в 1928 г. (табл. 5.16).

Сравнивая выравнивающие частоты, вычисленные по уравнению кривой распределения типа I, с наблюдаемыми частотами (табл. 5.16 и рис. 5.27), мы видим, что при практически полном совпадении их между собой имеется резкий выступ наблюдаемых

частот по сравнению с выравнивающими для возраста от 40 до 45 лет. Такое резкое нарушение закономерного изменения возрастного состава научных работников, приходящееся только на один разряд возраста, является несомненным указанием на особую причину, которая повлияла на увеличение группы научных работников именно данного возраста. Можно думать, что здесь нашли свое отражение некоторые условия военного времени. Значительное превышение наблюдаемого числа научных работников по сравнению с выравнивающим числом приходится на возрастную группу от 40 до 45 лет, т. е. именно на ту группу, которая в период первой мировой войны имела возраст от 25 до 30 лет. Другими словами, научные работники этого возраста представляли в период первой мировой войны группу начинающих ученых, оставленных при вузах для приготовления к научной деятельности, т. е. принадлежали к той единственной группе, которая в течение всего военного периода была освобождена от военных обязанностей.

§ 5. Критерий независимости

1. Критерий независимости. Критерий $P(\chi^2)$ применяется при решении широкого круга задач статистического исчисления.

В частности, критерий $P(\chi^2)$ применяется в тех случаях, когда требуется выяснить, существует ли связь между исследуемыми случайными величинами или же они являются независимыми друг от друга. Решение этого вопроса дается при помощи величины $P(\chi^2)$, которая в данном случае называется *критерием независимости*.

Рассмотрим таблицу распределения двух случайных величин (табл. 1.15). Разделив каждую частоту этой таблицы на сумму всех частот, получим вероятности значений случайных величин. Например, вероятность появления значения $X_{1(j)}$ первой случайной величины X_1 , какими бы ни были значения второй величины X_2 , равна $\frac{n_{1.}}{n}$; вероятность появления значения $X_{2(j)}$ второй случайной величины X_2 , какими бы ни были значения первой величины X_1 , равна $\frac{n_{.j}}{n}$; вероятность совместного появления значений $X_{1(j)}$ и $X_{2(j)}$ равна $\frac{n_{j1} \cdot n_{j2}}{n}$.

В случае независимости случайных величин вероятность совместного появления значений $X_{1(j)}$ и $X_{2(j)}$ равна произведению их вероятностей:

$$\frac{n_{j1} \cdot n_{j2}}{n} = \frac{n_{1.}}{n} \cdot \frac{n_{.j}}{n}$$

[см. (4.16)]. Отсюда следует, что при независимости случайных величин частота некоторой внутренней клетки таблицы распре-

ления $n_{j_1 | j_2}$ равна произведению итоговых частот данной строки и столбца таблицы, деленному на сумму всех частот n . Таким образом, обозначая в предположении независимости рассматриваемую частоту через $\tilde{n}_{j_1 | j_2}$, будем иметь

$$\tilde{n}_{j_1 | j_2} = \frac{n_{j_1} \cdot n_{\cdot | j_2}}{n}. \quad (6.98)$$

Для построения критерия независимости наблюдаемые частоты $n_{j_1 | j_2}$ таблицы распределения сравниваются с выравнивающими частотами (6.98), вычисленными в предположении *независимости* случайных величин (это — нулевая гипотеза в данном случае).

Сумма квадратов разностей между наблюдаемыми и выравнивающими частотами таблицы распределения, деленных на соответствующую выравнивающую частоту, представляет в рассматриваемом случае статистику χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \frac{(n_{j_1 | j_2} - \tilde{n}_{j_1 | j_2})^2}{\tilde{n}_{j_1 | j_2}} \quad (6.99)$$

[ср. (6.93)].

Проверка вычислений производится по формуле

$$\chi^2 = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \frac{n_{j_1 | j_2}^2}{\tilde{n}_{j_1 | j_2}} - n. \quad (6.100)$$

Эта формула получается из (6.99) при помощи приема, аналогичного использованному при выводе (6.95).

Для отыскания числа степеней свободы в таблице распределения рассмотрим линейные связи между частотами этой таблицы.

Сумма частот в каждой строке таблицы определяется итоговой частотой строки, а сумма частот каждого столбца определяется итоговой частотой столбца. Следовательно, каждая из k_1 строк и каждый из k_2 столбцов налагает связь. Однако общее число $k_1 + k_2$ связей необходимо уменьшить на единицу, так как эти связи не являются алгебраически независимыми: между ними имеется одно отношение, состоящее в том, что сумма итогового столбца равна сумме итоговой строки, а именно, общему итогу n . Таким образом, имеется $k_1 + k_2 - 1$ независимых линейных связей. Следовательно,

$$v = k - q = k_1 k_2 - (k_1 + k_2 - 1) = (k_1 - 1)(k_2 - 1). \quad (6.101)$$

Этот же результат можно получить непосредственно, если принять во внимание, что частоты в $k_1 - 1$ строках и $k_2 - 1$ столбцах определяются по произволу, причем оставшаяся в каждом разряде частота будет единственным образом определяться из итоговой частоты. Отсюда число степеней свободы будет равно числу клеток, которые могут быть заполнены по произволу, т. е. будет

равно

$$v = (k_1 - 1)(k_2 - 1).$$

Применяя таблицу значений $P(\chi^2)$, мы можем по данным числам χ^2 и v найти величину $P(\chi^2)$, которая в рассматриваемом случае будет выражать степень расхождения между наблюдаемыми и выравнивающими частотами. Если величина $P(\chi^2)$ окажется малой ($P < 0,05$), то это означает, что предположение о независимости между изучаемыми случайными величинами не оправдалось, и, следовательно, можно считать установленным наличие связи между ними. Если же величина $P(\chi^2)$ не мала ($P \geq 0,05$), то это означает, что предположение о независимости между случайными величинами в какой-то мере оправдалось, т. е. можно считать установленным отсутствие связи между ними.

Таблица 6.4

Таблица распределения крепости и удлинения пряжи

| Крепость | Удлинение | | | |
|----------|---------------|-----------------|---------------|----------|
| | < 7 | 7—9,5 | 9,5 и > | Σ |
| < 225 | 51 (8,45) | 37 (73,13) | — (6,42) | 88 |
| 225—350 | 45 (80,83) | 759 (699,70) | 38 (61,47) | 842 |
| 350 и > | — (6,72) | 35 (58,17) | 35 (5,11) | 70 |
| Σ | 96 | 831 | 73 | 1000 |

Рассмотрим пример. Пусть на основании табл. 6.4 требуется выяснить, имеется ли связь между крепостью и удлинением пряжи. Предположим, что эти величины являются независимыми. Тогда выравнивающие частоты $\tilde{n}_{i,j}$, вычисленные на основании итоговых частот таблицы по формуле (6.98), будут представлены числами табл. 6.4, поставленными в скобках. Например, выравнивающая частота первой клетки таблицы равна

$$\frac{88 \cdot 96}{1000} = 8,45.$$

Вычисление суммы квадратов разностей между наблюдаемыми и выравнивающими частотами, деленных на соответствующую выравнивающую частоту, по формуле (6.99), показано в табл. 6.5. Таким образом, $\chi^2 = 459,19$. Для проверки вычислений найдем χ^2 по формуле (6.100) (табл. 6.6).

Замечая, что в рассматриваемом случае $v = (3 - 1)(3 - 1) = 4$, и обращаясь к табл. XVI, мы видим, что для данного числа степеней свободы уже при $\chi^2 = 25$ оказывается $P(\chi^2) < 0,0001$. Следовательно, при $\chi^2 = 459,19$ величина $P(\chi^2)$ является чрезвычайно малой. Таким образом, мы приходим к заключению, что предположение о независимости между изучаемыми величинами не оправдалось; табл. 6.4 обнаруживает несомненную связь между крепостью и удлинением пряжи.

Таблица 6.5

Вычисление χ^2 по формуле (6.99)

| Крепость | Удлинение | | | Σ |
|--------------------|--------------------------------------|--|-------------------------------------|----------|
| | < 7 | $7-9,5$ | $9,5 \text{ и } >$ | |
| < 225 | $\frac{(51-8,45)^2}{8,45} = 214,26$ | $\frac{(37-73,13)^2}{73,13} = 17,85$ | $\frac{(0-6,42)^2}{6,42} = 6,42$ | 238,53 |
| $225-350$ | $\frac{(45-80,83)^2}{80,83} = 15,88$ | $\frac{(759-699,70)^2}{699,70} = 5,03$ | $\frac{(38-61,47)^2}{61,47} = 8,96$ | 29,87 |
| $350 \text{ и } >$ | $\frac{(0-6,72)^2}{6,72} = 6,72$ | $\frac{(35-58,17)^2}{58,17} = 9,23$ | $\frac{(35-5,11)^2}{5,11} = 174,84$ | 190,79 |
| Σ | 236,85 | 32,11 | 190,22 | 459,19 |

Таблица 6.5

Вычисление χ^2 по формуле (6.100)

| Крепость | Удлинение | | | Σ |
|------------------------------------|------------------------------|---------------------------------|------------------------------|----------|
| | < 7 | $7-9,5$ | $9,5 \text{ и } >$ | |
| < 225 | $\frac{54^2}{8,42} = 307,81$ | $\frac{37^2}{73,13} = 18,72$ | — | 326,53 |
| $225-350$ | $\frac{45^2}{80,83} = 25,05$ | $\frac{759^2}{699,70} = 823,33$ | $\frac{38^2}{61,47} = 23,49$ | 871,87 |
| $350 \text{ и } >$ | — | $\frac{35^2}{58,17} = 21,06$ | $\frac{35^2}{5,11} = 239,73$ | 260,79 |
| Σ | 332,86 | 863,11 | 263,22 | 1459,19 |
| $\chi^2 = 1459,19 - 1000 = 459,19$ | | | | |

2. Коэффициент взаимной сопряженности. Если в результате применения статистики χ^2 связь между случайными величинами будет признана несущественной, то вопрос об измерении связи отпадает. Если же будет обнаружена существенная связь между случайными величинами, то необходимо определить непосредственную меру этой связи.

Сама статистика χ^2 не является такой мерой связи. Это ясно из того, что если мы, сохраняя неизменным соотношение между частотами таблицы, будем увеличивать общее число n наблюдений, то пропорционально этому будет увеличиваться и статистика χ^2 .

В соответствии с этим в качестве меры связи между случайными величинами может служить статистика

$$\varphi^2 = \frac{\chi^2}{n}, \quad (6.102)$$

или, принимая во внимание (6.98) и (6.100),

$$\varphi^2 = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \frac{n_{j_1 j_2}^2}{n_{j_1 \cdot} \cdot n_{\cdot j_2}} - 1. \quad (6.103)$$

Статистика φ^2 называется *показателем сопряженности*.

Вычисление показателя сопряженности по формуле (6.103) располагается по схеме табл. 6.7. В качестве примера взята таблица распределения крепости и удлинения пряжи (табл. 6.4).

Сначала, в первой строке каждой клетки этой схемы, помещаются соответствующие частоты таблицы распределения. Под ними, во второй строке клетки, выписываются квадраты этих частот. Затем производится деление каждого квадрата на итог частот соответствующего столбца. Полученные частные записываются в третьей строке соответствующих клеток схемы. Затем эти частные складываются для каждой строки схемы и найденные суммы 28,741, 732,043 и 18,255 выписываются в третьей строке клеток итогового столбца. Наконец, эти суммы делятся на соответствующие итоги частот строк 88, 842 и 70; полученные частные 0,327, 0,872 и 0,261 выписываются в последнем столбце схемы. Сумма этих чисел 1,459, уменьшенная на единицу, представляет искомое число φ^2 . Имеем

$$\varphi^2 = 0,459.$$

Для проверки вычислений в каждой клетке таблицы (в скобках) приводится деление квадрата частот на итог частот соответствующей строки. Полученные частные складываются для каждого столбца схемы и найденные суммы 31,962, 717,239 и 19,215 выписываются в клетках итоговой строки. Эти суммы делятся на соответствующие итоги столбцов 96, 831 и 73 и полученные частные 0,333, 0,863 и 0,263 выписываются в последней строке схемы. Сумма этих чисел 1,459, уменьшенная на единицу, дает φ^2 .

Т а б л и ц а 6.7

Вычисление показателя сопряженности

| Крепость | Удлинение | | | | |
|----------|----------------------------------|--|----------------------------------|--------------------------|-------|
| | < 7 | 7—9,5 | 9,5 и > | Σ | |
| < 225 | 51 2601 27,094 (29,557) | 37 1369 1,647 (15,557) | — | 88 — 28,741 — | 0,327 |
| 225—350 | 45 2025 21,024 (2,405) | 759 576 081 693,238 (684,182) | 38 1441 17,781 (1,715) | 842 — 732,043 — | 0,872 |
| 350 и > | — | 35 1225 1,474 (17,500) | 35 1225 16,781 (17,500) | 70 — 18,255 | 0,261 |
| Σ | 96 31,962 | 831 717,239 | 73 19,215 | 1000 — | |
| | (0,393) | (0,863) | (0,263) | — | 1,459 |

Величина показателя сопряженности может быть найдена по формуле (6.102), если предварительно был вычислен критерий независимости. В рассматриваемом примере

$$\varphi^2 = \frac{459,18}{1000} = 0,459.$$

Показатель сопряженности может быть применен при сравнении величины связей, представленных разными таблицами распределения, при условии, что эти таблицы имеют одинаковое число степеней свободы, но могут содержать различное число наблюдений.

Для сравнения величины связей с различными числами степеней свободы и различным числом наблюдений необходимо учесть не только число наблюдений, что было сделано при переходе от χ^2 к φ^2 , но также и число степеней свободы. Для этого служит статистика

$$K = \frac{\varphi^2}{V(k_1 - 1)(k_2 - 1)}, \quad (6.104)$$

где знак перед корнем берется положительный. Статистика K называется *коэффициентом взаимной сопряженности Чупрова*.

Если случайные величины независимы между собой, то наблюдаемая частота каждой клетки таблицы распределения будет равна соответствующей выравнивающей частоте $n_{j_1, j_2} = \tilde{n}_{j_1, j_2}$. Т. е. будем иметь $\chi^2 = 0$, откуда $\varphi^2 = 0$, и следовательно, $K = 0$.

Если же случайные величины находятся в строгой связи между собой, то каждому значению одной случайной величины будет соответствовать только одно значение другой величины; следовательно, частоты таблицы распределения будут расположены в клетках на диагонали таблицы и равны частотам итоговых столбца и строки: $n_{j_1, j_2} = n_{j_1 \cdot} = n_{\cdot j_2}$.

В таком случае числа разрядов k_1 и k_2 будут равны одному и тому же числу k . Подставляя в (6.103), получим

$$\varphi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{n_j^2}{n_j \cdot n_j} - 1 = k - 1.$$

Следовательно,

$$K = \frac{k-1}{\sqrt{(k-1)(k-1)}} = 1.$$

Таким образом, статистика K изменяется от нуля, при отсутствии связи между случайными величинами, до единицы, при строгой связи между ними:

$$0 \leq K \leq 1. \quad (6.105)$$

Для табл. 6.4 имеем

$$K = \frac{0,459}{\sqrt{(3-1)(3-1)}} = 0,230.$$

Находясь в пределах между 0 и 1, статистика K тем более приближается к своему верхнему пределу, чем ближе связь между случайными величинами к строгой функциональной зависимости, когда условные ряды распределения случайной величины X_2 приближаются к такому виду, при котором каждому значению X_1 соответствует лишь одно значение X_2 .

Таким образом, коэффициент взаимной сопряженности K представляет ясную характеристику связи между случайными величинами при любом виде связи между ними.

3. Коэффициент сходства. Полагая в выражении (6.104) $k_1 = k_2 = 2$, получим

$$K = \frac{\varphi^2}{\sqrt{(2-1)(2-1)}} = \varphi^2 = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{n_{j_1, l}^2}{n_{j_1 \cdot} \cdot n_{\cdot l}} - 1. \quad (6.106)$$

Таблица 6.8

Таблица из четырех (внутренних) клеток

| $X_1 \backslash X_2$ | $X_2 (1)$ | $X_2 (2)$ | Σ |
|----------------------|----------------|----------------|---------------|
| $X_1 (1)$ | n_{111} | n_{112} | $n_{11\cdot}$ |
| $X_1 (2)$ | n_{211} | n_{212} | $n_{21\cdot}$ |
| Σ | $n_{\cdot 11}$ | $n_{\cdot 12}$ | n |

Частоты, входящие в эту сумму, образуют таблицу из четырех (внутренних) клеток (табл. 6.8). Раскрывая сумму (6.106), имеем

$$\Phi^2 = \frac{n_{111}^2}{n_{11\cdot} n_{\cdot 11}} + \frac{n_{112}^2}{n_{11\cdot} n_{\cdot 12}} + \frac{n_{211}^2}{n_{21\cdot} n_{\cdot 11}} + \frac{n_{212}^2}{n_{21\cdot} n_{\cdot 12}} - 1.$$

Приводя к общему знаменателю и сокращая, получим

$$\Phi^2 = \frac{(n_{111}n_{212} - n_{112}n_{211})^2}{n_{11\cdot} n_{21\cdot} n_{\cdot 11} n_{\cdot 12}}. \quad (6.107)$$

Так как, согласно (6.102), $\chi^2 = n\Phi^2$, то в рассматриваемой таблице из четырех клеток имеем

$$\chi^2 = \frac{n(n_{111}n_{212} - n_{112}n_{211})^2}{n_{11\cdot} n_{21\cdot} n_{\cdot 11} n_{\cdot 12}} \quad (6.108)$$

с числом степеней свободы

$$v = (2 - 1)(2 - 1) = 1. \quad (6.109)$$

Квадратный корень из (6.107) называется *коэффициентом схождения* и обозначается буквой A :

$$A = \frac{n_{111}n_{212} - n_{112}n_{211}}{\sqrt{n_{11\cdot} n_{21\cdot} n_{\cdot 11} n_{\cdot 12}}}, \quad (6.110)$$

причем корень в знаменателе берется с положительным знаком.

Величина коэффициента схождения изменяется от -1 (когда $n_{111} = n_{212} = 0$) до $+1$ (когда $n_{112} = n_{211} = 0$). Если $n_{111}n_{212} = n_{112}n_{211}$, то коэффициент схождения равен нулю:

$$-1 \leq A \leq +1. \quad (6.111)$$

Нулевое значение коэффициента схождения указывает на независимость между признаками. При $n_{111}n_{212} > n_{112}n_{211}$ коэффициент схождения положителен, при $n_{111}n_{212} < n_{112}n_{211}$ этот показатель отрицателен.

Величина коэффициента взаимной сопряженности и коэффициента сходства находится в зависимости исключительно только от величины частот таблицы распределения. Ни значения признаков, ни порядок размещения частот в таблице не оказывают влияния на величину этих статистик. В силу этого рассматриваемые статистики могут быть применены для измерения связи как в случае количественных, так и в случае качественных признаков.

Пример. В табл. 6.9 приводятся данные о распределении 320 штамповок колец подшипников по высоте и наружному диаметру на нормальные (т. е. находящиеся в пределах допуска) и завышенные (т. е. превышающие наибольший предельный размер)*).

Требуется проверить, являются ли независимыми завышения штамповок против допускаемых размеров по высоте и диаметру.

Таблица 6.9

Распределение высоты и наружного диаметра колец подшипников

| Высота | Диаметр | | |
|------------|------------|------------|----------|
| | нормальный | завышенный | Σ |
| Нормальная | 239 | 60 | 299 |
| Завышенная | 14 | 7 | 21 |
| Σ | 253 | 67 | 320 |

Применяя (6.108), имеем

$$\chi^2 = \frac{320(239 \cdot 7 - 14 \cdot 60)^2}{299 \cdot 21 \cdot 253 \cdot 67} = 2,1.$$

По табл. XVI, при $\chi = 2,1$ и $\nu = 1$, находим $P > 0,10$.

Таким образом, данные табл. 6.9 не противоречат гипотезе о независимости получения завышенных высоты и наружного диаметра колец подшипников.

Коэффициент сходства для табл. 6.9 равен

$$A = \frac{239 \cdot 7 - 14 \cdot 60}{\sqrt{299 \cdot 21 \cdot 253 \cdot 67}} = 0,081.$$

§ 6. Оценка среднего значения

1. **Выяснение значимости среднего значения.** Перейдем теперь к оценке основных параметров случайных величин: среднего значения, основного отклонения и коэффициента корреляции.

*) И. В. Дунин-Барковский и Н. В. Смирнов, 1955, стр. 325 (11)

Оценка среднего значения производится при помощи статистики t (§ 3, п. 2). При помощи этой статистики можно выяснить значимость среднего значения, найти доверительные границы для среднего значения в общей совокупности и оценить расхождение между средними значениями в двух частичных совокупностях.

Положим, что имеется частичная совокупность из n значений, полученных путем независимых испытаний относительно случайной величины x со средним значением \bar{x} и оценкой основного отклонения s . Требуется выяснить, может ли эта совокупность рассматриваться как частичная совокупность, образованная из общей совокупности со средним значением \bar{x}_0 . Другими словами, требуется выяснить значимость среднего значения, т. е. решить, отличается ли существенно среднее значение \bar{x} частичной совокупности от среднего значения \bar{x}_0 общей совокупности.

При решении этого вопроса заметим, что все величины, входящие в формулу (6.74), берутся из наблюдений, кроме среднего значения \bar{x}_0 общей совокупности. Но и это последнее не является препятствием для применения статистики t , так как она применяется при проверке той или иной гипотезы, высказываемой относительно величины \bar{x}_0 . Таким образом, в формулу (6.74) вместо неизвестного \bar{x}_0 подставляется определенное значение, которому по предположению равен параметр \bar{x}_0 ; значения же \bar{x} и s находятся из данной частичной совокупности.

Если значение t не окажется значимым, тогда сомнение в правильности гипотезы может быть отброшено, и эта гипотеза относительно среднего значения общей совокупности может быть

Таблица 6.10

Добавочные часы сна под действием двух лекарств А и В

| № больного | А | В | Разность В - А | Отклонение от среднего | Квадрат отклонения от среднего |
|---------------|------|-------|-------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| 1 | +0,7 | +1,9 | +1,2 | -0,38 | 0,1444 |
| 2 | -1,6 | +0,8 | +2,4 | +0,82 | 0,6724 |
| 3 | -0,2 | +1,1 | +1,3 | -0,28 | 0,0784 |
| 4 | -1,2 | +0,1 | +1,3 | -0,28 | 0,0784 |
| 5 | -0,1 | -0,1 | 0,0 | -1,58 | 2,4964 |
| 6 | +3,4 | +4,4 | +1,0 | -0,58 | 0,3364 |
| 7 | +3,7 | +5,5 | +1,8 | +0,22 | 0,0484 |
| 8 | +0,8 | +1,6 | +0,8 | -0,78 | 0,6084 |
| 9 | 0,0 | +4,6 | +4,6 | +3,02 | 9,1204 |
| 10 | +2,0 | +3,4 | +1,4 | -0,18 | 0,0324 |
| Σ | +7,5 | +23,3 | +15,8 | -4,06 +4,06 | 13,6160 |

принята. Но чем больше $|t|$, тем более значимое действие производит рассматриваемая причина.

В качестве примера определения реальной значимости среднего значения в случае малого числа наблюдений рассмотрим результаты опыта по изучению действия двух снотворных лекарств A и B , проводившегося над 10 больными. Добавочные часы сна под действием этих лекарств и необходимые вычисления показаны в табл. 6.10*).

Так как для испытания каждого лекарства были взяты одни и те же больные, то разность x добавочных часов сна под действием лекарств B и A представляет сравнительное действие двух лекарств как снотворных средств.

При образовании статистики t по формуле (6.74) принимается $\bar{x}_0 = 0$, потому что в данном случае нулевая гипотеза состоит в том, что рассматриваемые два лекарства вызывают одно и то же действие, т. е. среднее значение разности равно 0.

Из табл. 6.10 находим

$$\bar{x} = \frac{15,8}{10} = 1,58,$$

$$s = \sqrt{\frac{13,6160}{9}} = \sqrt{1,513} = 1,23, \quad t = 1,58 : \frac{1,23}{\sqrt{10}} = 4,06.$$

Обращаясь к табл. XVII, мы видим, что при $v = 9$ значение t будет случайно превышать по абсолютной величине 3,25 только в одном случае из ста; следовательно, изучаемая разность между действиями лекарств является существенной. Лекарство B оказывается более действенным, чем лекарство A .

Совершенно так же, как в рассматриваемом примере, располагаются вычисления при решении, например, вопроса о том, какой из двух процессов производства, возможных при обработке некоторого материала, является более эффективным.

2. Доверительные границы для среднего значения в общей совокупности. Положим, что из общей совокупности значений случайной величины, имеющей нормальное распределение, путем независимого выбора образована частичная совокупность из n значений. Пусть среднее значение этой частичной совокупности равно \bar{x} , а несмещенная оценка дисперсии общей совокупности равна s^2 . На основании этих данных требуется найти границы, внутри которых с определенной степенью надежности находится среднее значение общей совокупности \bar{x}_0 .

Выбрав 5%-ный уровень значимости, мы при данном числе степеней свободы находим из табл. XVII значение $t_{0,05}$ такое, что

$$P\{|t| \geq t_{0,05}\} = 0,05, \quad (6.112)$$

*) Стьюдент, 1908, стр. 1 (IV).

т. е. вероятность того, что абсолютное значение наблюдаемой величины t будет не меньше табличного $t_{0,05}$, равна 0,05.

Следовательно, вероятность противоположного неравенства будет равна

$$P\{|t| < t_{0,05}\} = 0,95. \quad (6.113)$$

Неравенство, заключенное в фигурных скобках этой формулы, равносильно неравенствам $-t_{0,05} < t < t_{0,05}$. Подставляя сюда значение t из (6.74), находим

$$-t_{0,05} < \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t_{0,05},$$

откуда

$$\bar{x} - t_{0,05} \frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{x}_0 < \bar{x} + t_{0,05} \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (6.114)$$

Таким образом, с вероятностью 0,95 мы можем утверждать, что среднее значение общей совокупности лежит между

$$\bar{x} - t_{0,05} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \bar{x} + t_{0,05} \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (6.115)$$

Крайние значения (6.115) называются *доверительными границами* для среднего значения общей совокупности при 5%-ном уровне значимости, а вероятность того, что промежуток с этими крайними значениями накроет среднее значение общей совокупности, называется *доверительной вероятностью*. [Ср. § 1, п. 4.] При $P = 0,05$ и $v = 9$ из табл. XVII находим $t_{0,05} = 2,26$ (рис. 6.6). Подобным же образом мы можем найти доверительные границы при других уровнях значимости. Для этого надо в выражения (6.115) вместо $t_{0,05}$ подставить из табл. XVII соответствующие значения t .

Пример. Произведены испытания ударной вязкости десяти образцов осевой стали. Требуется определить границы, между которыми лежит среднее значение общей совокупности при 5%-ном уровне значимости. Результаты испытаний и необходимые вычисления приведены в табл. 6.11. Из этой таблицы находим

$$\bar{x} = \frac{50,3}{10} = 5,03, \quad s = \sqrt{\frac{2,0210}{9}} = 0,474.$$

Так как при $P = 0,05$ и $v = 9$ имеем $t_{0,05} = 2,26$, то $t_{0,05} \frac{s}{\sqrt{n}} = 2,26 \cdot \frac{0,474}{\sqrt{10}} = 0,34$.

Таким образом, с вероятностью 0,95 мы можем утверждать, что среднее значение ударной вязкости осевой стали в общей

совокупности лежит между границами

$$5,03 - 0,34 = 4,69 \quad \text{и} \quad 5,03 + 0,34 = 5,37.$$

3. Оценка расхождения между средними значениями. Кроме выяснения значимости среднего значения, статистика t применяется при проверке гипотезы, что две независимые частичные совокупности объемов n_1 и n_2 взяты из одной и той же нормально распределенной общей совокупности, имеющей среднее значение $\bar{x}_0 = 0$ и дисперсию σ^2 .

Таблица 6.11

Результаты испытаний ударной вязкости десяти образцов стали
(x в кг/см²)

| № | x | $x - \bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$ |
|----------|------|----------------|-------------------|
| 1 | 5,4 | +0,37 | 0,1369 |
| 2 | 5,7 | +0,67 | 0,4489 |
| 3 | 5,5 | +0,47 | 0,2209 |
| 4 | 5,0 | -0,03 | 0,0009 |
| 5 | 4,8 | -0,23 | 0,0529 |
| 6 | 5,3 | +0,27 | 0,0729 |
| 7 | 5,0 | -0,03 | 0,0009 |
| 8 | 4,4 | -0,63 | 0,3969 |
| 9 | 4,2 | -0,83 | 0,6889 |
| 10 | 5,0 | -0,03 | 0,0009 |
| Σ | 50,3 | -1,78 +1,78 | 2,0210 |

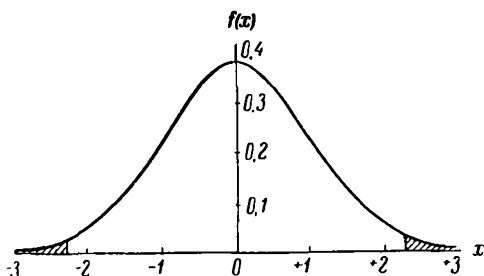


Рис. 6.6. Доверительные границы для среднего значения в общей совокупности при 5%-ном уровне значимости.

Пусть средние значения рассматриваемых частичных совокупностей равны \bar{x}_1 и \bar{x}_2 , а оценки дисперсии будут

$$s_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (x_{1(j)} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}, \quad s_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} (x_{2(j)} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1}, \quad (6.116)$$

и пусть проверяемая гипотеза верна.

Основой проверки гипотезы является разность $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$, дисперсия которой равна

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}^2 = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \sigma^2 \quad (6.117)$$

[ср. (5.108)].

Так как оценки s_1^2 и s_2^2 дисперсии σ^2 имеют вес $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$, то полная оценка дисперсии σ^2 будет равна

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (x_{1(j)} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2(j)} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}. \quad (6.118)$$

Величины $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ и s^2 являются статистически независимыми. Поэтому, на основании (6.74) и (6.117), находим

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}. \quad (6.119)$$

Таким образом, мы можем воспользоваться таблицей распределения статистики t , взяв число степеней свободы вместо (6.76) равным

$$\nu = n_1 + n_2 - 2. \quad (6.120)$$

Пример. Рассмотрим данные, полученные при наблюдении веса определенного объема азота при 15°C и 760 мм Нг. В первом ряде опытов взвешивался азот, приготовленный из азотистых соединений, во втором ряде — азот, приготовленный из воздуха (табл. 6.12 *).

Таблица 6.12

Вес азота при двух рядах опытов (г)

| I | II |
|---------|---------|
| 2,30143 | 2,31017 |
| 2,29890 | 2,30986 |
| 2,29816 | 2,31010 |
| 2,30182 | 2,31010 |
| 2,29869 | 2,31024 |
| 2,29940 | 2,31010 |
| 2,29849 | 2,31028 |
| 2,29889 | 2,31035 |
| | 2,31026 |
| | 2,31024 |

Средний вес азота при первом ряде опытов оказался равным 2,29947 г, а при втором ряде равным 2,31016 г. Таким образом, разность между средними оказалась равной 0,01069, т. е. было найдено, что азот воздуха почти на $1/200$ тяжелее азота, извлеченного из его соединений.

Для выяснения значимости этой разности применим статистику t . Необходимые вычисления приведены в табл. 6.13.

Применяя формулу (6.118), находим

$$s^2 = \frac{0,0000133152 + 0,0000001931}{16} = 0,0000008443,$$

откуда

$$s = 0,00092.$$

Следовательно, статистика t , вычисляемая по формуле (6.119), будет равна

$$t = \frac{0,01069}{0,00092} \cdot \sqrt{\frac{80}{18}} = 24.$$

Для $\nu = 16$ и $t = 24$ табл. XVII дает $P < 0,001$.

Таким образом, вероятность случайных значений t , которые по абсолютной величине не меньше наблюдаемого значения t , ничтожно мала. Следовательно, наблюдаемое значение t является не случайным, а существенным. Поэтому предположение о том, что азот, приготовленный из воздуха, и азот из азотистых соединений ничем — после надлежащего очищения — между собой не отличаются, должно быть отвергнуто. Действительно, вскоре после описанных опытов было показано, что наблюдавшаяся при этих

*) Р э л е й, 1903, стр. 49, 106, 107 (VII, 2).

Таблица 613

Вычисление сумм квадратов
(пример — вес азота)

| $x_{1(j)} - \bar{x}_1$ | $(x_{1(j)} - \bar{x}_1)^2$ | $(x_{2(j)} - \bar{x}_2)$ | $(x_{2(j)} - \bar{x}_2)^2$ |
|------------------------|----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| +0,00196 | 0,0000038417 | +0,00001 | 0,0000000001 |
| -57 | 3249 | -30 | 900 |
| -137 | 17161 | -6 | 36 |
| +235 | 55225 | -15 | 225 |
| -78 | 6084 | +8 | 64 |
| -7 | 49 | -6 | 36 |
| -98 | 9604 | +12 | 144 |
| -58 | 3364 | +19 | 361 |
| | | +10 | 100 |
| | | +8 | 64 |
| -0,00429 | | -0,00057 | |
| +0,00431 | 0,00001 33152 | +0,00058 | 0,0000001931 |

опытах разность плотностей определяется присутствием в азоте, полученном из воздуха, небольшого количества газа, более тяжелого, чем азот. Так был открыт аргон.

§ 7. Оценка дисперсии

1. Критерий F Фишера. Для сравнения дисперсий применяются критерий F Фишера и критерий R Романовского.

При образовании статистики

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

берется

$$s_1^2 > s_2^2. \quad (6.121)$$

Таким образом, табличные значения F больше 1. Поэтому при применении таблиц XVIII—XXI надо за s_1^2 брать большую из двух оценок дисперсии.

При случайности расхождения между оценками s_1^2 и s_2^2 можно считать подтвержденной гипотезу о том, что частичные совокупности взяты из нормальных общих совокупностей с одинаковой дисперсией; если же расхождение между оценками s_1^2 и s_2^2 существенно, то рассматриваемая гипотеза должна быть отвергнута.

Приведем пример. Производилось сравнение точности химического анализа у двух лаборантов, один из которых (А) был новичком в работе, а другой (В) опытным работником. Лаборант А

выполнил 20 анализов, а лаборант *B* 13 анализов одного и того же химического состава.

Результаты анализов и необходимые вычисления приведены в табл. 6.14, в которой числа x_1 и x_2 представляют уменьшенное на 4,50% содержание угля в исследуемом составе (в %)*.

На основании этих данных находим

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 4,50 + \frac{6,55}{100} = 4,57, & \bar{x}_2 &= 4,50 + \frac{5,77}{100} = 4,56; \\ \sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 &= \sum x_1^2 - \frac{(\sum x_1)^2}{n} = 6457 - \frac{131^2}{20} = 5599, \\ 100^2 s_1^2 &= \frac{5599}{19} = 294,7, & s_1^2 &= 0,0295, \\ \sum (x_2 - \bar{x}_2)^2 &= 2101 - \frac{75^2}{13} = 1668, \\ 100^2 s_2^2 &= \frac{1668}{12} = 139,0 & s_2^2 &= 0,0139.\end{aligned}$$

Таким образом, средние значения у обоих лаборантов примерно равны:

$$\bar{x}_1 = 4,57; \quad \bar{x}_2 = 4,56.$$

Однако результаты анализа лаборанта *A* имеют, по-видимому, большее рассеяние, чем результаты анализа лаборанта *B*:

$$s_1^2 = 0,0295, \quad v_1 = 19; \quad s_2^2 = 0,0139, \quad v_2 = 12.$$

Заметим при этом, что v_1 соответствует большей оценке.

Для оценки расхождения между s_1^2 и s_2^2 вычислим дисперсионное отношение

$$F = \frac{0,0295}{0,0139} = 2,12.$$

По табл. XVIII при $v_1 = 19$ и $v_2 = 12$ находим, что при 5%-ном уровне значимости

$$F = 2,50.$$

Таким образом, наблюдаемое значение дисперсионного отношения не достигает 5%-ного уровня значимости, и, следовательно, нет основания считать наблюдаемую разницу в точности анализа у лаборантов *A* и *B* существенной.

*) Дэвис, 1957, стр. 67 (VII, 2).

2. Критерий R Романовского. Сравнение дисперсий при помощи критерия R Романовского состоит в следующем.

Вводится величина

$$\theta = \frac{v_2 - 2}{v_2} F, \quad (6.122)$$

где F определяется из (6.81).

Математическое ожидание этой величины в случае независимого выбора из нормальных общих совокупностей с одинаковой дисперсией равно единице:

Таблица 6.14

Сравнение точности химического анализа у двух лаборантов

| Лаборант А | | | Лаборант В | | |
|------------|-------|---------|------------|-------|---------|
| № анализа | x_1 | x_1^2 | № анализа | x_2 | x_2^2 |
| 1 | -10 | 100 | 1 | -8 | 64 |
| 2 | 16 | 256 | 2 | -3 | 9 |
| 3 | -8 | 64 | 3 | 20 | 400 |
| 4 | 9 | 81 | 4 | 22 | 484 |
| 5 | 5 | 25 | 5 | 3 | 9 |
| 6 | -5 | 25 | 6 | 5 | 25 |
| 7 | 5 | 25 | 7 | 10 | 100 |
| 8 | -11 | 121 | 8 | 14 | 196 |
| 9 | 25 | 625 | 9 | -21 | 441 |
| 10 | 22 | 484 | 10 | 2 | 4 |
| 11 | 16 | 256 | 11 | 7 | 49 |
| 12 | 3 | 9 | 12 | 8 | 64 |
| 13 | 40 | 1600 | 13 | 16 | 256 |
| 14 | 0 | 0 | | | |
| 15 | -5 | 25 | | | |
| 16 | 16 | 256 | | | |
| 17 | 30 | 900 | | | |
| 18 | -14 | 196 | | | |
| 19 | 25 | 625 | | | |
| 20 | -28 | 784 | | | |
| Σ | +131 | 6457 | Σ | +75 | 2101 |
| m_1 | 6,55 | — | m_1 | 5,77 | |

$$M(\theta) = 1, \quad (6.123)$$

а основное отклонение равно

$$\sigma_\theta = + \sqrt{\frac{2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 4)}}. \quad (6.124)$$

Поэтому в рассматриваемом случае можно с большой вероятностью, — во всяком случае большей, чем 0,889, — ожидать, что отклонение θ от 1 по абсолютной величине не превысит $3\sigma_\theta$ [см. гл. IV, § 5, п. 2].

В силу этого по величине критерия

$$R = \frac{|\theta - 1|}{\sigma_\theta} \quad (6.125)$$

можно делать заключение о существенности или случайности расхождения между оценками s_1^2 и s_2^2 .

Если

$$R \geq 3,$$

то расхождение между ними считается существенным; если же

$$R < 3,$$

то расхождение признается случайным.

Для применения критерия R одно из чисел степеней свободы должно быть больше 4; оно принимается за v_2 .

Рассмотрим пример. При сравнении точности химического анализа у двух лаборантов (табл. 6.14) было найдено

$$F = 2,12, \quad \nu_1 = 19, \quad \nu_2 = 12.$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{12-2}{12} \cdot 2,12 = 1,77 \quad \sigma_\theta = \sqrt{\frac{2 \cdot (19+12-2)}{19 \cdot (12-4)}} = 0,62,$$

откуда

$$R = \frac{|1,77 - 1|}{0,62} = 1,24.$$

Поэтому разницу в точности анализа у лаборантов нельзя признать существенной.

§ 8. Оценка коэффициента корреляции

1. Преобразование Фишера. В случае малого числа испытаний и сравнительно высокой корреляции распределение коэффициента корреляции r в частичных совокупностях из n пар значений, взятых из нормальной общей совокупности значений двух случайных

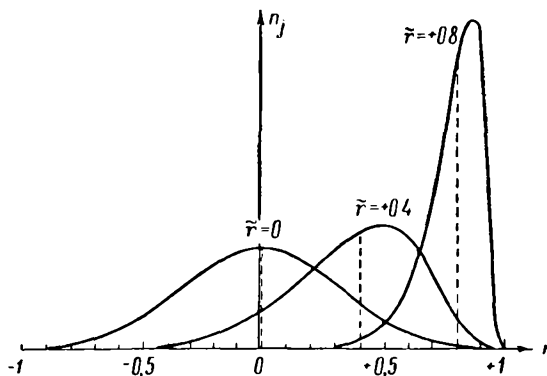


Рис. 6.7. Распределение коэффициента корреляции r при $n = 12$.

величин, в которой коэффициент корреляции равен \tilde{r} , существенно отличается от нормального распределения. Например, при $n = 12$ распределения коэффициента корреляции r для значений

$$\tilde{r} = 0; \quad +0,4; \quad +0,8,$$

представленные на рис. 6.7, показывают, что при значениях \tilde{r} , приближающихся к 1, кривая распределения коэффициента корреляции в частичных совокупностях становится все более

скошенной. Поэтому при малом числе испытаний нельзя воспользоваться основной ошибкой коэффициента корреляции для оценки \tilde{r} при помощи таблицы интеграла вероятностей.

Для оценки коэффициента корреляции применяется найденное Фишером преобразование, при котором коэффициент корреляции в частных совокупностях приравнивается гиперболическому тангенсу некоторой величины z :

$$r = \text{th } z, \quad (6.126)$$

откуда

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}. \quad (6.127)$$

(см.: Митропольский А. К., Краткие математические таблицы, 4 изд., М., 1968, стр. 18).

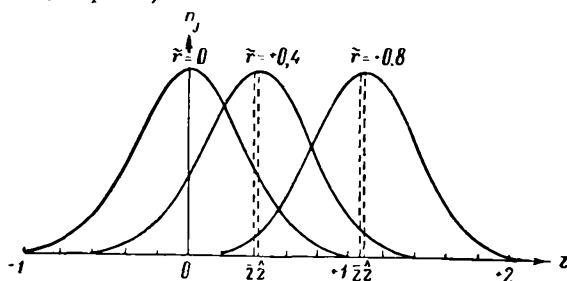


Рис. 6.8. Распределение величины z при $n=12$.

Распределение величины z является почти неизменным по форме для изменяющихся \tilde{r} и n и с возрастанием n быстро приближается к нормальному со средним значением

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\tilde{r}}{1-\tilde{r}} + \frac{\tilde{r}}{2(n-1)} \quad (6.128)$$

и дисперсией

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-3}. \quad (6.129)$$

Таким образом, основная ошибка z является независимой от \tilde{r} . Распределение величины z при $n=12$ и

$$\tilde{r} = 0; +0,4; +0,8$$

представлено на рис. 6.8.

При помощи статистики z можно решить два вопроса: 1) является ли наблюдаемый коэффициент корреляции r существенно отличным от предполагаемого коэффициента корреляции \tilde{r} в общей совокупности и 2) будут ли существенно отличаться друг от друга коэффициенты корреляции r' и r'' , полученные из двух частных совокупностей.

Для решения этих вопросов надо на основании r и \tilde{r} определить значения z и \tilde{z} по формулам (6.127) и (6.128). Тогда ввиду нормальности распределения статистики z легко решить, будет ли разность $z - \tilde{z}$ существенной или случайной.

Чтобы избежать необходимости вычислять z в каждом случае, составлены таблицы, дающие возможность найти значения r по данным значениям z (табл. XXIII) и значения z по данным значениям r (табл. XXIV). Соотношение между статистикой z и коэффициентом корреляции r представлено на рис. 6.9.

Рассмотрим пример. Положим, что в частичной совокупности из 25 пар значений двух случайных величин коэффициент корреляции оказался равным $r = 0,7$. Требуется выяснить, является ли это значение совместимым с предположением, что в общей совокупности коэффициент корреляции равен $\tilde{r} = 0,5$.

При данных значениях r и \tilde{r} из табл. XXIV находим $z = 0,8673$, $\tilde{z} = 0,5493$, так что

$$z - \tilde{z} = 0,3180, \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{22}} = 0,2132.$$

Следовательно,

$$\frac{z - \tilde{z}}{\sigma_z} = 1,49.$$

Так как разность $z - \tilde{z}$ значительно меньше удвоенной основной ошибки, то при 5%-ном уровне значимости значение этой разности не является значимым, и, следовательно, коэффициент корреляции в общей совокупности вполне может быть равным $\tilde{r} = 0,5$.

95%-ные доверительные границы для \tilde{r} находятся обычным способом (ср. § 1, п. 4). Значение \tilde{z} должно быть таким, чтобы имело место неравенство

$$|z - \tilde{z}| < 1,96\sigma_z = 0,4187.$$

Следовательно,

$$0,8673 - 0,4187 < \tilde{z} < 0,8673 + 0,4187,$$

или

$$0,45 < \tilde{z} < 1,29,$$

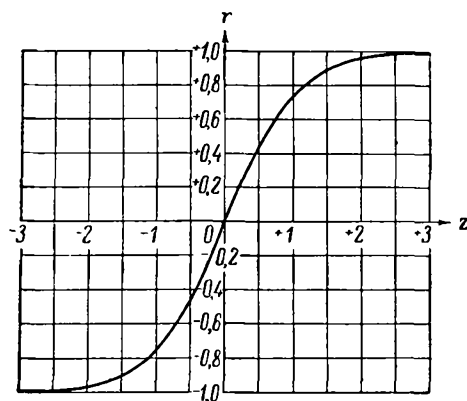


Рис. 6.9. Соотношение между r и z .

откуда по табл. XXIII находим

$$0,4219 < \tilde{r} < 0,8591.$$

Таким образом, 95%-ные доверительные границы для \tilde{r} приближенно равны 0,42 и 0,86.

2. Проверка наличия корреляции в общей совокупности. Для случая $\tilde{r}=0$, т. е. при решении вопроса, будет ли наблюдаемое значение коэффициента корреляции r указывать какую-либо корреляцию в общей совокупности, применяется статистика t . Эта статистика в рассматриваемом случае равна

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} \quad (6.130)$$

с числом степеней свободы

$$\nu = n - 2. \quad (6.131)$$

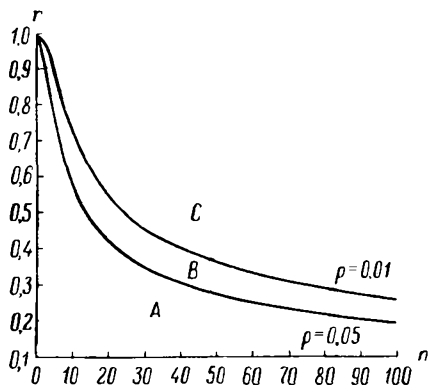


Рис. 6.10. Области, в которых коэффициент корреляции является незначимым (A), значимым (B) или весьма значимым (C).

Чтобы установить, является ли значение r значимым, мы делаем предположение, что случайные величины x и y в общей совокупности являются некоррелированными. Тогда, на основании табл. XVII, мы приходим к заключению, что если полученное по формуле (6.130) значение t будет превосходить табличное значение,

соответствующее принятому уровню значимости, то сделанное предположение о некоррелированности случайных величин в общей совокупности является необоснованным.

Пусть, например, на основании частичной совокупности из $n = 11$ пар значений, взятых из нормальной двумерной общей совокупности, получен коэффициент корреляции $r = 0,6$. Тогда

$$t = \frac{0,6 \cdot 3}{\sqrt{1-0,36}} = \frac{1,8}{0,8} = 2,25.$$

Табл. XVII показывает, что вероятность получить $t > 2,25$ при $\nu = 9$ больше 0,05. Следовательно, в этом случае не имеется основания считать сомнительным предположение о некоррелированности случайных величин в общей совокупности.

Пусть, далее, $n = 18$, $r = 0,5$. Тогда

$$t = \frac{0,5 \cdot 4}{\sqrt{1-0,25}} = \frac{2}{0,866} = 2,31.$$

Так как вероятность получить $t > 2,31$ при $v = 16$ оказывается меньше 0,05, то предположение о некоррелированности случайных величин в общей совокупности следует признать необоснованным.

Рассматриваемый здесь вопрос может быть непосредственно решен при помощи номограммы наименьших значений коэффициента корреляции при разных уровнях значимости P и данном числе степеней свободы $v = n - 2$ (рис. 6.10). На этой номограмме определены области, в которых коэффициент корреляции является незначимым, значимым или весьма значимым.

3. Сравнение коэффициентов корреляции в независимых частичных совокупностях. Рассмотрим теперь две независимые частичные совокупности из n_1 и n_2 пар значений случайных величин. Пусть в первой совокупности коэффициент корреляции равен r' , а во второй равен r'' . Требуется выяснить, являются эти частичные совокупности взятыми из одной и той же общей совокупности или же между ними имеется существенное различие.

Предположим, что частичные совокупности взяты из одной и той же общей совокупности. Тогда разность между значениями

$$z' = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r'}{1-r'} \quad \text{и} \quad z'' = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r''}{1-r''}$$

этих частичных совокупностей будет иметь нормальное распределение с основной ошибкой

$$\sigma_{z'-z''} = \sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}. \quad (6.132)$$

Если

$$|z' - z''| < 2\sigma_{z'-z''}, \quad (6.133)$$

то разность является незначимой при 5%-ном уровне значимости. В таком случае предположение, что частичные совокупности взяты из одной и той же общей совокупности, является не лишенным доверия.

Положим, например, что в первой частичной совокупности, состоящей из 19 пар значений случайных величин, коэффициент корреляции равен $r' = 0,6$, а во второй частичной совокупности, состоящей из 23 пар, коэффициент корреляции равен $r'' = 0,8$.

Проверим гипотезу, что эти частичные совокупности взяты из одной и той же нормальной общей совокупности.

Из табл. XXIV находим $z' = 0,693$, $z'' = 1,099$. При рассматриваемой гипотезе основная ошибка разности значений z равна

$$\sigma_{z'-z''} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{20}} = \sqrt{0,1125} = 0,335.$$

Таким образом,

$$|z' - z''| = 0,406 < 2\sigma_{z'-z''}.$$

Следовательно, разность между значениями z не является значимой при 5%-ном уровне значимости. Поэтому рассматриваемая гипотеза является не лишенной доверия.

Если в приведенном примере значение r' не будет дано, то мы можем найти те границы, между которыми оно должно лежать при условии, что абсолютное значение разности r' и r'' будет незначимым при 5%-ном уровне значимости. Чтобы это условие было удовлетворено, необходимо, чтобы имело место неравенство

$$|z' - z''| < 1,96\sigma_{z' - z''} = 0,657.$$

Следовательно,

$$1,099 - 0,657 < z' < 1,099 + 0,657,$$

или

$$0,442 < z' < 1,756.$$

Откуда по табл. XXIII находим

$$0,41 < r' < 0,94.$$

4. Комбинированная оценка коэффициента корреляции в общей совокупности. При исследовании связи между случайными величинами может оказаться, что коэффициенты корреляции, вычисленные на основании нескольких независимых частичных совокупностей, отличаются между собой. В таких случаях необходимо выяснить, можно ли данные частичные совокупности рассматривать как взятые наудачу из одной и той же нормальной общей совокупности или одинаково коррелированных общих совокупностей; и если этот вопрос будет решен в положительном смысле, то найти комбинированную оценку значения коэффициента корреляции \bar{r} в общей совокупности.

Положим, что на основании частичных совокупностей, состоящих из n_h пар значений двух случайных величин ($h = \overline{1, k}$), вычислены коэффициенты корреляции, оказавшиеся равными r_h .

Для проверки однородности оценок r_h предположим, что частичные совокупности взяты из нормальных общих совокупностей с одинаковыми коэффициентами корреляции. Тогда при помощи преобразования Фишера (6.128) мы получим значения статистик z_h , имеющих приближенно нормальное распределение с общим средним значением и дисперсией

$$\sigma_{z_h}^2 = \frac{1}{n_h - 3}. \quad (6.134)$$

Оценка их общего среднего значения \bar{z} , имеющая наименьшую дисперсию, находится, согласно (6.28), путем взвешивания значе-

ний z_h обратно пропорционально их дисперсиям. Следовательно, эта оценка \bar{z} будет равна

$$\bar{z} = \frac{\sum_h (n_h - 3) z_h}{\sum_h (n_h - 3)}. \quad (6.135)$$

При помощи этой оценки составляется сумма

$$\sum_h (n_h - 3) (z_h - \bar{z})^2, \quad (6.136)$$

которая имеет приближенно χ^2 -распределение с $h - 1$ степенями свободы. Поэтому значимость вычисленного значения суммы (6.136) может быть проверена на основании таблицы значений χ^2 (табл. XVI).

Сумму (6.136) можно, на основании (6.135), представить в виде, более удобном для вычислений:

$$\begin{aligned} \sum_h (n_h - 3) (z_h - \bar{z})^2 &= \sum_h (n_h - 3) z_h^2 - \bar{z}^2 \sum_h (n_h - 3) = \\ &= \sum_h (n_h - 3) z_h^2 - \frac{\left[\sum_h (n_h - 3) z_h \right]^2}{\sum_h (n_h - 3)}. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Если вычисленное значение величины (6.137) не будет значимым как значение χ^2 с $h - 1$ степенями свободы, то значения коэффициентов корреляции в частичных совокупностях можно считать однородными. В этом случае значение \bar{z} , даваемое формулой (6.135), будет оценкой значения \bar{z} , соответствующего коэффициенту корреляции \tilde{r} в общей совокупности. Следовательно, искомая оценка коэффициента корреляции \tilde{r} будет равна

$$r = \text{th } \bar{z} \quad (6.138)$$

[ср. (6.126)] и может быть найдена по табл. XXIII.

Пусть, например, на основании шести независимых частичных совокупностей объема n_h , указанного в столбце (2) табл. 6.15, найдены коэффициенты корреляции r_h , приведенные в столбце (3) этой таблицы. Требуется выяснить, можно ли считать эти r_h однородными, и при положительном ответе на этот вопрос найти оценку коэффициента корреляции в общей совокупности.

Выписав из табл. XXIV шесть значений z_h , соответствующих коэффициентам корреляции r_h (столбец (4) табл. 6.15), и производя необходимые вычисления (столбцы (5) — (7)), находим $\chi^2 = 0,21$. При $v = 5$ это значение χ^2 не является значимым, так что коэффициенты корреляции r_h можно считать однородными.

Таблица 6.15

Вычисление χ^2 для оценки коэффициента корреляции

| h | n_h | r_h | z_h | $n_h - 3$ | $(n_h - 3) z_h$ | $(n_h - 3) z_h^2$ |
|---|-------|-------|--------|-----------|-----------------|-------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 1 | 31 | 0,68 | 0,8291 | 28 | 23,2148 | 19,2474 |
| 2 | 27 | 0,73 | 0,9287 | 24 | 22,2888 | 20,6996 |
| 3 | 25 | 0,71 | 0,8872 | 22 | 19,5184 | 17,3167 |
| 4 | 23 | 0,67 | 0,8107 | 20 | 16,2140 | 13,1447 |
| 5 | 30 | 0,70 | 0,8673 | 27 | 23,4171 | 20,3097 |
| 6 | 28 | 0,69 | 0,8484 | 25 | 21,2100 | 17,9946 |
| Σ | 164 | — | — | 146 | 125,8631 | 108,7127 |
| $\chi^2 = 108,7127 - \frac{(125,8631)^2}{146} = 0,21$ | | | | | | |

Поэтому для определения \bar{z} мы можем применить формулу (6.135). Имеем $\bar{z} = \frac{125,8631}{146} = 0,8621$. На основании этого значения находим по табл. XXIII оценку коэффициента корреляции в общей совокупности:

$$r = 0,6974 \approx 0,7.$$

§ 9. Дисперсионный анализ

1. Задача дисперсионного анализа. В любом ряде испытаний имеется несколько факторов, вызывающих изменчивость средних значений наблюдаемых случайных величин. Эти факторы могут принадлежать к одному или многим источникам изменчивости. Например, при лабораторных испытаниях какого-либо продукта производства изменчивость может возникнуть в зависимости частью от сырого материала, частью от способа производства и частью от ошибок при испытаниях.

Исследование влияния тех или иных факторов на изменчивость средних значений наблюдаемых случайных величин является задачей дисперсионного анализа.

Дисперсионный анализ состоит в выделении и оценке отдельных факторов, вызывающих изменчивость. С этой целью производится разложение дисперсии наблюдаемой частичной совокупности на составляющие, порождаемые независимыми факторами. Каждая из этих составляющих дает оценку дисперсии в общей совокупности.

Для проверки значимости этих оценок дисперсии сравнивают их с оценкой дисперсии, вызываемой только в силу случайного состава частичной совокупности. Проверка значимости оценок дисперсии производится при помощи таблиц значений статистики F .

Если наблюдаемое значение статистики F окажется меньше табличного, то это указывает, что не имеется оснований приписывать какое-либо значение влиянию рассматриваемого фактора на изменчивость средних значений случайной величины; если же наблюдаемое значение F окажется больше табличного, то рассматриваемый фактор влияет на изменчивость средних значений.

После того как при помощи дисперсионного анализа будет произведена оценка влияния факторов на изменчивость средних значений случайной величины в целом и вопрос будет решен в положительном смысле, т. е. рассматриваемая оценка дисперсии будет признана значимой, необходимо перейти к подробному исследованию отдельных факторов. Для этого производится оценка расхождения средних значений, полученных при испытаниях по отдельному фактору. К решению этого вопроса привлекается статистика t .

2. Простая группировка. Техника дисперсионного анализа изменяется в зависимости от числа изучаемых одновременно независимых источников изменчивости. Если факторы, вызывающие изменчивость средних значений случайных величин, принадлежат к одному источнику, то мы будем иметь *простую группировку*.

Положим, что имеется p факторов

$$A_1, A_2, \dots, A_g, \dots, A_p,$$

принадлежащих к одному источнику изменчивости. Пусть было произведено n наблюдений, причем под действием фактора A_g наблюдалось n_g значений величины x_g . Предположим, что все значения x_g распределены одинаково и нормально, т. е. рассматриваемые факторы не оказывают существенного влияния на изменчивость средних значений случайных величин x_g . Это — нулевая гипотеза.

Обозначим через x_{gh} значение h -го члена в g -й группе. Тогда среднее значение каждой группы будет равно

$$\bar{x}_g = \frac{\sum_{h=1}^{n_g} x_{gh}}{n_g}, \quad (6.139)$$

а общее среднее значение для всей частичной совокупности из наблюдений будет равно

$$\bar{x} = \frac{\sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^{n_g} x_{gh}}{n}. \quad (6.140)$$

Для выполнения дисперсионного анализа надо общую сумму квадратов

$$Q = \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^{n_g} (x_{gh} - \bar{x})^2, \quad (6.141)$$

т. е. сумму квадратов отклонений всех наблюдаемых значений от их общего среднего значения, разложить на составляющие: сумму квадратов между группами

$$Q_A = \sum_{g=1}^p n_g (\bar{x}_g - \bar{x})^2, \quad (6.142)$$

т. е. взвешенную сумму квадратов отклонений средних значений по группам от общего среднего значения, и сумму квадратов внутри групп

$$Q_R = \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^{n_g} (x_{gh} - \bar{x}_g)^2, \quad (6.143)$$

т. е. сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений от среднего значения соответствующей группы:

$$Q = Q_A + Q_R. \quad (6.144)$$

[Ср. (2.111).]

Сумма Q_A соответствует источнику изменчивости, в то время как сумма Q_R отражает влияние случайных факторов.

Суммы Q , Q_A и Q_R можно представить в виде, удобном для вычислений:

$$Q = \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^{n_g} x_{gh}^2 - n\bar{x}^2, \quad (6.145)$$

$$Q_A = \sum_{g=1}^p n_g \bar{x}_g^2 - n\bar{x}^2, \quad (6.146)$$

$$Q_R = \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^{n_g} x_{gh}^2 - \sum_{g=1}^p n_g \bar{x}_g^2. \quad (6.147)$$

В силу тождества (6.144) обычно вычисляются непосредственно только общая сумма квадратов Q и сумма квадратов между группами Q_A ; сумма же квадратов внутри групп Q_R получается путем вычитания Q_A из Q :

$$Q_R = Q - Q_A; \quad (6.148)$$

поэтому сумма Q_R называется также остаточной суммой квадратов.

Работа по вычислению сумм квадратов может быть значительно упрощена. Замечая, что отклонения от средних значений

независимы от выбора начала отсчета, мы можем все значения x_{gh} уменьшить на одно и то же число, отчего значения трех сумм квадратов не изменятся.

Суммы квадратов Q , Q_A и Q_R , деленные на соответствующие числа степеней свободы $n-1$, $p-1$ и $n-p$, дадут три несмещенные оценки дисперсии σ^2 :

$$s^2 = \frac{Q}{n-1}, \quad (6.149)$$

$$s_A^2 = \frac{Q_A}{p-1}, \quad (6.150)$$

$$s_R^2 = \frac{Q_R}{n-p}. \quad (6.151)$$

Первая из этих оценок называется *общей оценкой дисперсии*, вторая — *оценкой дисперсии по факторам* (или оценкой дисперсии между группами) и третья — *остаточной оценкой дисперсии* (или оценкой дисперсии внутри групп).

Число степеней свободы проверяется путем сложения тем же способом, как и сумма квадратов (6.144), а именно:

$$n-1 = (p-1) + (n-p). \quad (6.152)$$

Действия при выполнении дисперсионного анализа располагаются по схеме табл. 6.16.

Таблица 6.16

Схема дисперсионного анализа в случае простой группировки

| Изменчивость (источник вариации) | Сумма квадратов | Число степеней свободы | Оценка дисперсии |
|-------------------------------------|--|------------------------------|---------------------------|
| Общая | $Q = \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^{n_g} (x_{gh} - \bar{x})^2$ | $n-1$ | $s^2 = \frac{Q}{n-1}$ |
| По факторам (между группами) | $Q_A = \sum_{g=1}^p n_g (x_g - \bar{x})^2$ | $p-1$ | $s_A^2 = \frac{Q_A}{p-1}$ |
| Остаточная (внутри групп) | $Q_R = \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^{n_g} (x_{gh} - \bar{x}_g)^2$ | $n-p$ | $s_R^2 = \frac{Q_R}{n-p}$ |

Для нулевой гипотезы могут быть получены определенные выводы из этой схемы. Здесь при сравнении оценок дисперсии мы можем применить статистику F , которая действует именно в предположении нормального распределения в общей совокупности (§ 3, п. 3).

Сравнению подвергаются оценка дисперсии s_A^2 , вызываемая рассматриваемыми факторами, и остаточная оценка дисперсии s_R^2 , имеющая место уже после того, как влияние факторов было устранено.

Если нулевая гипотеза верна, то оценки дисперсии должны различаться между собой лишь случайно; в этом случае статистика F будет показывать с большой вероятностью только несущественные расхождения между оценками дисперсии.

Если же статистика F обнаружит существенное расхождение между s_A^2 и s_R^2 , то это будет указывать на недопустимость нулевой гипотезы. В таком случае мы имеем основание признать материал неоднородным, т. е. приходим к выводу, что источник изменчивости оказывает влияние на средние значения случайных величин.

3. Неравное число наблюдений по факторам. В качестве примера дисперсионного анализа в общем случае неравного числа наблюдений по факторам рассмотрим данные относительно срока службы в четырех партиях электрических ламп (табл. 6.17 *).

Для изготовления каждой партии ламп была взята проволока разных сортов; все же прочие условия производства были одинаковыми для каждой партии. Требуется выяснить, отличаются ли партии ламп между собой по сроку службы. Если ответ будет положительным, то можно думать, что качество проволоки варьирует реально, и, следовательно, для достижения стандартизации производства электрических ламп необходимо достигнуть большей однородности проволоки во всех партиях.

Таблица 6.17

Пример дисперсионного анализа
(срок службы электрических ламп)

| Номера партий ламп | Срок службы электрических ламп (в тысячах часов) (значения X) | Сумма $\sum X$ | Число экземпляров в партии n_g | Среднее значение \bar{X} |
|--------------------|--|----------------|----------------------------------|----------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 1 | 1,60 1,61 1,65 1,68 1,70 | 11,76 | 7 | 1,68 |
| | 1,72 1,80 | | | |
| 2 | 1,58 1,64 1,64 1,70 1,75 | 8,31 | 5 | 1,66 |
| 3 | 1,46 1,55 1,60 1,62 1,64 | 13,09 | 8 | 1,64 |
| | 1,66 1,74 1,82 | | | |
| 4 | 1,51 1,52 1,53 1,67 1,60 | 9,41 | 6 | 1,57 |
| | 1,68 | | | |
| | | 42,57 | 26 | 1,64 |

*) М. Кендалл, 1951, стр. 179 (II).

Найдем суммы значений X и средние значения срока службы ламп в каждой партии [столбцы (3)—(5) табл. 6.17]. Средние значения в каждой партии оказались следующими:

$$\bar{X}_1 = \frac{11,76}{7} = 1,68; \quad \bar{X}_2 = \frac{8,31}{5} = 1,66;$$

$$\bar{X}_3 = \frac{13,09}{8} = 1,64; \quad \bar{X}_4 = \frac{9,41}{6} = 1,57.$$

Наконец, общее среднее значение равно

$$\bar{X} = \frac{42,57}{26} = 1,64.$$

Мы видим, что средние значения в каждой партии различны; поэтому требуется определить, является ли различие между средними значениями существенным или, может быть, это различие объясняется просто случайным составом частичных совокупностей.

Для облегчения вычислений, необходимых при решении поставленного вопроса, будем вместо значений X рассматривать отклонения x этих значений от общего среднего значения. Эти отклонения, суммы их, средние значения их, суммы квадратов их и произведения квадратов средних значений на соответствующее число испытаний располагаются в табл. 6.18.

Таблица 6.18

Вычисление средних значений и сумм квадратов
(пример — срок службы электроламп)

| № | x_{gh} | Σx_{gh} | n_g | \bar{x}_g | Σx_{gh}^2 | $n_g \bar{x}_g^2$ |
|-----|---|-----------------|-------|-------------|-------------------|-------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 1 | -0,04 -0,03 +0,01 +0,04 +0,06 +0,08 +0,16 | +0,28 | 7 | +0,04 | 0,0398 | 0,0112 |
| 2 | -0,06 0,00 0,00 +0,06 +0,11 | +0,11 | 5 | +0,02 | 0,0193 | 0,0020 |
| 3 | -0,18 -0,09 -0,04 -0,02 0,00 +0,02 +0,10 +0,18 | -0,03 | 8 | 0,00 | 0,0853 | 0,0000 |
| 4 | -0,13 -0,12 -0,11 -0,07 -0,04 +0,04 | -0,43 | 6 | -0,07 | 0,0515 | 0,0294 |
| | | -0,07 | 26 | 0,01 | 0,1959 | 0,0426 |

Применяя формулы (6.145)—(6.147) и замечая, что в данном случае $\bar{x} = 0$, находим

$$Q = 0,1959, \quad Q_A = 0,0426, \quad Q_R = 0,1533.$$

На основании этих сумм квадратов находим оценки дисперсии s^2 , s_A^2 , s_R^2 по формулам (6.149)—(6.151).

Таким образом, схема дисперсионного анализа для рассматриваемого случая примет вид, указанный в табл. 6.19.

Таблица 6.19
Дисперсионный анализ данных таблицы 6.18
(срок службы электроламп)

| Изменчивость | Суммы квадратов | Число степеней свободы | Оценка дисперсии |
|----------------|-----------------|------------------------|------------------|
| Общая | 0,1959 | 25 | 0,0078 |
| Между партиями | 0,0426 | 3 | 0,0142 |
| Остаточная | 0,1533 | 22 | 0,0070 |

Отсюда получаем

$$F = 0,0142/0,0070 = 2,03, \quad \nu_1 = 3, \quad \nu_2 = 22.$$

При этих числах степеней свободы табл. XVIII значений F для $P = 0,05$ дает 3,05. Следовательно, наблюдаемое значение F не является значимым при 5%-ном уровне значимости, и мы приходим к заключению, что, поскольку это касается данного критерия значимости, не имеется оснований сомневаться относительно однородности рассматриваемой совокупности электроламп.

К тому же выводу приходим, применяя критерий Романовского (6.125), в котором в случае дисперсионного анализа θ и σ_θ примет вид

$$\theta = \frac{n-p-2}{n-p} \cdot \frac{s_A^2}{s_R^2}, \quad (6.153)$$

$$\sigma_\theta = \sqrt{\frac{2(n-3)}{(p-1)(n-p-4)}}. \quad (6.154)$$

Имеем

$$\theta = \frac{20}{22} \cdot 2,03 = 1,85, \quad \sigma_\theta = \frac{46}{54} = 0,92,$$

$$R = \frac{|\theta - 1|}{\sigma_\theta} = 0,92 < 3.$$

Следовательно, остается прежнее заключение, т. е. рассматриваемая совокупность ламп является однородной.

4. Равное число наблюдений по факторам. Примером дисперсионного анализа в случае равного числа наблюдений по факторам могут служить результаты опытов в сосудах над урожаем некоторого растения (по данным Н. Ф. Деревницкого). Опыты производились в пяти вариантах (без удобрений и при четырех раз-

личных удобрений); в каждом варианте опыт повторялся четыре раза (табл. 6.20 *).

Таблица 6.20

Результаты опытов в сосудах над урожаем некоторого растения

| № | Варианты опыта | Урожай X | Сумма $\sum X$ | Среднее значение \bar{X} |
|---|---------------------|-------------|-------------------|-------------------------------|
| 1 | Без удобрения | 67 67 55 42 | 231 | 57,75 |
| 2 | $K_2O + N$ | 98 96 91 66 | 351 | 87,75 |
| 3 | $K_2O + P_2O_5$ | 60 69 50 35 | 214 | 53,50 |
| 4 | $N + P_2O_5$ | 79 64 81 70 | 294 | 73,50 |
| 5 | $N + P_2O_5 + K_2O$ | 90 70 79 88 | 327 | 81,75 |
| | | | 1417 | 70,85 |

Произведем анализ этих данных с целью оценить в целом влияние применения удобрений на урожайность растения. Для этого надо проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что удобрения не влияют на урожайность.

Замечая, что величина дисперсии не зависит от начала отсчета, мы можем, для упрощения вычислительной работы, уменьшить каждое показание опыта на целое число, ближайшее к общему среднему значению. Это число в рассматриваемом случае равно 70. Тогда необходимые вычисления могут быть расположены в табл. 6.21.

Таблица 6.21

Вычисление средних значений и сумм квадратов для данных табл. 6.20

| Варианты опыта | x_{gh} | $\sum x_{gh}$ | n_g | \bar{x}_g | $\sum x_{gh}^2$ | $n_g \bar{x}_g^2$ |
|-------------------|----------------|---------------|-------|-------------|-----------------|-------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 1 | -3 -3 -15 -28 | -49 | 4 | -12,25 | 1027 | 600,25 |
| 2 | +28 +26 +21 -4 | +71 | 4 | +17,75 | 1917 | 1260,25 |
| 3 | -10 -1 -20 -35 | -66 | 4 | -16,50 | 1726 | 1089,00 |
| 4 | +9 -6 +11 0 | +14 | 4 | + 3,50 | 238 | 49,00 |
| 5 | +20 0 +9 +18 | +47 | 4 | +11,75 | 805 | 552,25 |
| | | -17 | 20 | +0,85 | 5713 | 3550,75 |

*) В. И. Романовский, 1947, стр. 106 (VII, 8).

Суммы квадратов находятся по формулам (6.145) — (6.147):

$$Q = 5713 - 20 \cdot (0,85)^2 = 5713 - 14,45 = 5698,55,$$

$$Q_A = 3550,75 - 14,45 = 3536,30, \quad Q_R = 5713 - 3550,75 = 2162,25.$$

Вычислив затем оценки дисперсии s^2 , s_A^2 и s_R^2 по формулам (6.149) — (6.151), мы можем дисперсионный анализ расположить по схеме табл. 6.22.

Таблица 6.22

Дисперсионный анализ данных табл. 6.20

| Изменчивость | Сумма квадратов | Число степеней свободы | Оценка дисперсии |
|--------------|-----------------|------------------------|------------------|
| Общая | 5698,55 | 19 | 299,924 |
| По факторам | 3536,30 | 4 | 884,075 |
| Остаточная | 2162,25 | 15 | 144,150 |

Для оценки влияния удобрений достаточно сравнить оценки дисперсии по факторам s_A^2 и остаточную s_R^2 . Так как в рассматриваемом случае $s_A^2 > s_R^2$, то дисперсионное отношение берется в виде

$$F = \frac{s_A^2}{s_R^2}$$

[ср. (6.81)].

Имеем

$$F = \frac{884,075}{144,150} = 6,13,$$

причем

$$v_1 = 4, \quad v_2 = 15.$$

Обратимся теперь к таблицам значений дисперсионного отношения. При данных числах степеней свободы по табл. XVIII находим $F = 3,06$, а по табл. XX $F = 4,89$.

Так как в обоих случаях, т. е. и при 5%-ном, и при 1%-ном уровнях значимости, наблюдаемое значение F больше табличного, то гипотеза о том, что удобрения не оказывают влияния на урожайность, должна быть отвергнута.

К тому же самому выводу мы приходим, применяя критерий R Романовского. Вычисляя θ и σ_θ по формулам (6.153) и (6.154), имеем

$$\theta = \frac{13}{15} F = 5,32; \quad \sigma_\theta = \sqrt{\frac{34}{44}} = 0,879.$$

Отсюда

$$R = \frac{|\theta - 1|}{\sigma_\theta} = \frac{4,32}{0,879} = 4,91.$$

Так как $R > 3$, то, следовательно, нельзя утверждать, что в рассматриваемых опытах удобрения не влияют на урожайность растений.

5. Оценка влияния отдельных факторов. В тех случаях, когда дисперсионный анализ обнаруживает наличие существенного влияния факторов на изменчивость средних значений случайной величины в целом, переходят к оценке влияния отдельных факторов (см. п. 1). С этой целью при помощи статистики t производится оценка расхождения между средними значениями, полученными при испытаниях по отдельным факторам (см. § 6, п. 3). Таким образом, статистика t применяется как вспомогательный прием для дальнейшего подробного изучения результатов дисперсионного анализа.

Например, выяснив при помощи дисперсионного анализа, что удобрения оказывают влияние на урожайность растения, т. е. средние значения урожайности в целом существенно различаются между собой (п. 4), мы можем перейти к исследованию влияния отдельных удобрений. Для этого надо сравнить средние значения урожайности по испытаниям с различными удобрениями.

Так, сравнивая средние

57,75 и 73,50,

полученные при испытаниях без удобрения и с удобрением $N + P_2O_5$, применим для отыскания t формулу (6.119), в которой принимается $s = s_R$, а числа n_1 и n_2 приравняются числам наблюдений по факторам, т. е. 4. Имеем

$$t = \frac{|57,75 - 73,50|}{\sqrt{144,150}} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 4}{4 + 4}} = \frac{15,75}{8,489} = 1,86,$$

с числом степеней свободы, определяемым числом степеней свободы s_R^2 ; в данном случае это $v = 15$.

По табл. XVII для $v = 15$ находим, что вероятность получить значение, по абсолютной величине превосходящее наблюдаемое, больше 0,05: $P > 0,05$. Следовательно, разность между рассматриваемыми средними значениями можно считать несущественной.

Сравним теперь средние 57,75 и 87,75, полученные при испытаниях без удобрения и с удобрением $K_2O + N$. Поступая подобно предыдущему, имеем

$$t = \frac{30,00}{8,489} = 3,53.$$

Здесь уже $P < 0,05$. Поэтому расхождение между средними значениями следует признать существенным и удобрение $K_2O + N$, по-видимому, более эффективным.

6. Двойная группировка. Если факторы, вызывающие изменчивость средних значений случайных величин, принадлежит к двум

источникам A_g ($g = \overline{1, p}$) и B_h ($h = \overline{1, q}$), то будем иметь двойную группировку.

В этом случае разложение суммы квадратов отклонений Q всех $n = pq$ наблюдаемых значений от их общего среднего значения

$$Q = \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^q (x_{gh} - \bar{x})^2 \quad (6.155)$$

имеет вид

$$Q = Q_A + Q_B + Q_R, \quad (6.156)$$

где Q_A представляет взвешенную, т. е. умноженную на число q , сумму квадратов отклонений средних значений по группам A от общего среднего значения

$$Q_A = q \sum_{g=1}^p (\bar{x}_g - \bar{x})^2; \quad (6.157)$$

Q_B представляет взвешенную, т. е. умноженную на число p , сумму квадратов отклонений средних значений по группам B от общего среднего значения

$$Q_B = p \sum_{h=1}^q (\bar{x}_h - \bar{x})^2, \quad (6.158)$$

а Q_R представляет остаточную сумму квадратов отклонений, которая получается путем вычитания Q_A и Q_B из общей суммы квадратов Q

$$Q_R = \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^q (x_{gh} - \bar{x}_g - \bar{x}_h + \bar{x})^2. \quad (6.159)$$

Суммы Q , Q_A , Q_B , Q_R удобно вычислять по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^q x_{gh}^2 - n\bar{x}^2, & Q_A &= q \sum_{g=1}^p \bar{x}_g^2 - n\bar{x}^2, \\ Q_B &= p \sum_{h=1}^q \bar{x}_h^2 - n\bar{x}^2, & Q_R &= Q - Q_A - Q_B. \end{aligned} \right\} \quad (6.160)$$

Числа степеней свободы каждой из сумм квадратов отклонений Q , Q_A , Q_B и Q_R равны соответственно

$$pq - 1, \quad p - 1, \quad q - 1 \quad \text{и} \quad (p - 1)(q - 1),$$

а несмещенные оценки дисперсий общей совокупности будут

$$s^2 = \frac{Q}{pq - 1}, \quad s_A^2 = \frac{Q_A}{p - 1}, \quad s_B^2 = \frac{Q_B}{q - 1}, \quad s_R^2 = \frac{Q_R}{(p - 1)(q - 1)}, \quad (6.161)$$

причем

$$pq - 1 = (p - 1) + (q - 1) + (p - 1)(q - 1). \quad (6.162)$$

Вычислительная работа в случае двойной группировки располагается по схеме табл. 6.23.

Таблица 6.23

Схема дисперсионного анализа в случае двойной группировки

| Изменчивость | Сумма квадратов | Число степеней свободы | Оценка дисперсии |
|--------------------|--|------------------------|----------------------------------|
| Общая | $Q = \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^q (x_{gh} - \bar{x})^2$ | $pq - 1$ | $s^2 = \frac{Q}{pq - 1}$ |
| Между группами A | $Q_A = q \sum_{g=1}^p (\bar{x}_g - \bar{x})^2$ | $p - 1$ | $s_A^2 = \frac{Q_A}{p - 1}$ |
| Между группами B | $Q_B = p \sum_{h=1}^q (\bar{x}_h - \bar{x})^2$ | $q - 1$ | $s_B^2 = \frac{Q_B}{q - 1}$ |
| Остаточная | $Q_R = \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^q (x_{gh} - \bar{x}_g - \bar{x}_h + \bar{x})^2$ | $(p-1)(q-1)$ | $s_R^2 = \frac{Q_R}{(p-1)(q-1)}$ |

Значения сумм квадратов и числа степеней свободы проверяются по формулам (6.156) и (6.162).

Проверка нулевой гипотезы, т. е. гипотезы об однородности общей совокупности, производится путем сравнения оценки дисперсии s_A^2 между группами A и оценки дисперсии s_B^2 между группами B с остаточной оценкой дисперсии s_R^2 . Предполагая распределение значений в общей совокупности нормальным, мы можем применить статистику F . Если наблюдаемые значения того или иного из отношений

$$\frac{s_A^2}{s_R^2} \quad \text{или} \quad \frac{s_B^2}{s_R^2}$$

при данных числах степеней свободы будут превышать табличное значение F , то гипотеза однородности должна быть отвергнута. В этом случае анализ может быть закончен проверкой значимости разности средних значений каких-либо двух групп источника изменчивости A или же каких-либо двух групп источника изменчивости B . Эта проверка производится при помощи статистики t .

Рассмотрим пример. При спектрографическом исследовании были произведены испытания с целью проверить влияние различных электродов (A) и фотопластинок (B) на величину $Y = \Delta \lg J$, характеризующую интенсивность света. Результаты испытаний приведены в табл. 6.24 *).

*) Ш е р м а н, 1951, стр. 517 (VII. 2).

Таблица 6.24

Результаты испытаний для выяснения влияния электродов (A)
и фотопластинок (B) на величину $Y = \Delta \lg J$

| | B_1 | B_2 | B_3 | B_4 | B_5 | Σ | Средние по строкам |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|--------------------|
| A_1 | 4 | 18 | 26 | 38 | 44 | 130 | 26 |
| A_2 | 3 | 19 | 25 | 35 | 43 | 125 | 25 |
| A_3 | 6 | 18 | 24 | 28 | 39 | 115 | 23 |
| A_4 | 7 | 13 | 21 | 31 | 38 | 110 | 22 |
| Σ | 20 | 68 | 96 | 132 | 164 | 480 | |
| Средние по столбцам | 5 | 17 | 24 | 33 | 41 | | 24 |

Таблица 6.25

Отклонения значений таблицы 6.24 от общего среднего значения

| | B_1 | B_2 | B_3 | B_4 | B_5 | Σ | Средние по строкам |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|--------------------|
| A_1 | -20 | -6 | 2 | 14 | 20 | 10 | 2 |
| A_2 | -21 | -5 | 1 | 11 | 19 | 5 | 1 |
| A_3 | -18 | -6 | 0 | 4 | 15 | -5 | -1 |
| A_4 | -17 | -11 | -3 | 7 | 14 | -10 | -2 |
| Σ | -76 | -28 | 0 | 36 | 68 | 0 | |
| Средние по столбцам | -19 | -7 | 0 | 9 | 17 | | 0 |

Таблица 6.26

Дисперсионный анализ данных табл. 6.25

| Изменчивость | Сумма квадратов | Число степеней свободы | Оценка дисперсии |
|-----------------------|-----------------|------------------------|------------------|
| Общая | 3250 | 19 | 171,05 |
| Между электродами | 50 | 4 | 12,50 |
| Между фотопластинками | 3120 | 3 | 1040,00 |
| Остаточная | 80 | 12 | 6,67 |

Для упрощения вычисления заменим значения исследуемой величины отклонениями от общего среднего значения, равного 24. Эти отклонения показаны в табл. 6.25.

Выполняя затем действия, указанные в табл. 6.23, построим схему дисперсионного анализа для рассматриваемого примера (табл. 6.26).

Сравнивая оценку дисперсии между электродами s_A^2 с остаточной s_R^2 , получим

$$F = \frac{12,50}{6,67} = 1,84,$$

причем $v_1 = 4$, $v_2 = 12$.

При данных числах степеней свободы табличное значение дисперсионного отклонения при 5%-ном уровне значимости (табл. XVIII) равно $F = 3,26$.

Так как наблюдаемое значение дисперсионного отношения меньше табличного, то гипотеза о том, что электроды не влияют на величину $Y = \Delta \lg J$, не вызывает сомнений.

Сравним теперь оценку дисперсии между фотопластинками s_B^2 с остаточной s_R^2 . Имеем

$$F = \frac{1040,00}{6,67} = 156,$$

причем $v_1 = 3$, $v_2 = 12$.

При данных числах степеней свободы имеем соответственно:

по табл. XVIII $F = 3,49$, по табл. XX $F = 5,95$.

В обоих случаях наблюдаемое значение дисперсионного отношения больше табличного. Следовательно, гипотеза о том, что фотопластинки не влияют на величину $Y = \Delta \lg J$, должна быть отвергнута.

§ 10. Последовательный анализ

1. Последовательный анализ. Рассмотренные выше методы проверки гипотез применяются при условии, что было произведено наперед установленное число наблюдений. Часто, однако, можно сделать надлежащий вывод при меньшем числе наблюдений. Это достигается при помощи метода последовательного анализа.

Метод последовательного анализа состоит в том, что наблюдения производятся последовательно, и после каждого наблюдения делаются расчеты, на основании которых или принимается проверяемая «нулевая» гипотеза, или принимается противопоставляемая ей «альтернативная» гипотеза, или же принимается решение продолжать наблюдения; причем эти наблюдения

прекращаются сразу же, как только оказалось возможным сделать выводы с заранее назначенной степенью надежности.

Благодаря этому при последовательном анализе число наблюдений, необходимых для достаточно обоснованных выводов, сокращается в значительной степени по сравнению с методами, требующими наперед установленного числа наблюдений.

Основная величина, вычисляемая в последовательном анализе после каждого наблюдения, называется отношением правдоподобия.

Для составления этой величины положим, что в результате n последовательных независимых наблюдений получены значения x_1, x_2, \dots, x_n случайной величины x , плотность распределения которой $f(x, \theta)$ зависит от единственного параметра θ . Пусть проверяемая гипотеза состоит в том, что $\theta = \theta_0$, а противопоставляемая ей гипотеза — в том, что $\theta = \theta_1$.

Обозначим через p_{0n} значение совместной плотности вероятности (в дискретном случае — совместную вероятность) в предположении, что проверяемая гипотеза верна, а через p_{1n} — значение плотности вероятности в предположении, что верна противопоставляемая гипотеза. Тогда *отношение правдоподобия* будет дано формулой

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \prod_{h=1}^n \frac{f(x_h, \theta_1)}{f(x_h, \theta_0)}. \quad (6.163)$$

Отношение правдоподобия вычисляется после каждого наблюдения, причем каждое вычисление основывается на всех произведенных наблюдениях.

Пусть, далее, величина α представляет вероятность ошибочного отбрасывания проверяемой гипотезы, а величина β — вероятность ошибочного принятия этой гипотезы (см. § 1, п. 5). Тогда

1) если окажется, что

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha}, \quad (6.164)$$

то наблюдения прекращаются и принимается проверяемая гипотеза

$$\theta = \theta_0;$$

2) если окажется, что

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} \geq \frac{1 - \beta}{\alpha}, \quad (6.165)$$

то наблюдения прекращаются и принимается противопоставляемая гипотеза

$$\theta = \theta_1;$$

3) если окажется, что

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{p_{1n}}{p_{0n}} < \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad (6.166)$$

то не будет оснований для того или иного вывода с требуемой надежностью; поэтому производятся дополнительные наблюдения.

Число таких наблюдений ограничено, так как можно показать, что вероятность того, что последовательный анализ закончится, т. е. будет выбрано θ_0 или θ_1 , равна единице.

Логарифмируя (6.163), мы видим, что вычисление отношения правдоподобия сводится к сложению и вычитанию, а именно после каждого наблюдения надо к алгебраической сумме $\lg p_{1n} - \lg p_{0n}$ прибавить

$$\lg f(x_{n+1}, \theta_1) - \lg f(x_{n+1}, \theta_0).$$

2. Оценка вероятности появления события. Неравенства (6.164)—(6.166) для проверки гипотез могут быть приложены к разным типам задач. Мы остановимся на применении последовательного анализа для оценки вероятности появления некоторого события в случае биномиального распределения и для оценки среднего значения в случае нормального распределения.

Положим, что производятся независимые испытания, при которых может появиться или не появиться некоторое событие. Требуется проверить гипотезу, что вероятность p появления этого события равна p_0 . Пусть гипотеза, противопоставляемая проверяемой, будет состоять в том, что $p = p_1$, причем $p_1 > p_0$. Полагая $x = 1$ в случае появления события и $x = 0$ в случае его не появления, находим, что вместо плотности $f(x, \theta)$ необходимо рассмотреть распределение

$$f(1, p) = p, \quad f(0, p) = q \quad (p + q = 1). \quad (6.167)$$

Положим теперь, что после n испытаний оказалось m появлений события. Вероятность этого будет равна

$$p_{0n} = p_0^m q_0^{n-m}, \quad (6.168)$$

если верна проверяемая гипотеза, и будет равна

$$p_{1n} = p_1^m q_1^{n-m}, \quad (6.169)$$

если верна противопоставляемая гипотеза.

Следовательно, отношение правдоподобия (6.163) равно

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^m \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{n-m}, \quad (6.170)$$

и его логарифм равен

$$\lg \frac{p_{1n}}{p_{0n}} = m \lg \frac{p_1}{p_0} + (n-m) \lg \frac{q_1}{q_0}. \quad (6.171)$$

Назначив определенные численные значения величинам p_0 , p_1 , α и β , мы можем для окончательных выводов применять неравенства (6.164) — (6.165).

Пусть, например,

$$p_0 = 0,1; \quad p_1 = 0,3; \quad \alpha = 0,02; \quad \beta = 0,03.$$

Здесь

$$\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{3}{98}, \quad \frac{1-\beta}{\alpha} = \frac{97}{2}$$

и отношение правдоподобия равно

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \left(\frac{3}{1}\right)^m \left(\frac{7}{9}\right)^{n-m} = \left(\frac{7}{9}\right)^n \left(\frac{27}{7}\right)^m.$$

Подставляя в (6.164) получаем неравенство

$$\left(\frac{7}{9}\right)^n \left(\frac{27}{7}\right)^m \leq \frac{3}{98},$$

которое может быть заменено равносильным ему неравенством

$$m \leq \frac{\lg \frac{3}{98}}{\lg \frac{27}{7}} + n \cdot \frac{\lg \frac{9}{7}}{\lg \frac{27}{7}},$$

или

$$m \leq -2,58 + 0,186n. \quad (*)$$

Подобным же образом для (6.165) получаем неравенство

$$\left(\frac{7}{9}\right)^n \left(\frac{27}{7}\right)^m \geq \frac{97}{2},$$

которое обращается в неравенство

$$m \geq \frac{\lg \frac{97}{2}}{\lg \frac{27}{7}} + n \cdot \frac{\lg \frac{9}{7}}{\lg \frac{27}{7}},$$

или

$$m \geq 2,88 + 0,186n. \quad (**)$$

Если будет удовлетворено неравенство (*), то надо принять гипотезу $p = 0,1$; если же будет удовлетворено неравенство (**), то надо принять гипотезу $p = 0,3$; наконец, если ни то, ни другое из этих неравенств не будет удовлетворено, то надо продолжить испытания.

Действия при последовательном анализе становятся особенно простыми, если мы обратимся к графическому изображению. Рассматривая величины n и m как координаты точки, проведем прямые

$$m = -2,58 + 0,186n \quad \text{и} \quad m = 2,88 + 0,186n.$$

Эти прямые разделяют плоскость tn на три области соответственно трем решениям (6.164)—(6.166) при каждом испытании (рис. 6.11).

После каждого испытания на чертеже отмечается кружком общее число появлений t против общего числа испытаний n . Если для какого-либо числа n кружок окажется ниже нижней прямой, то испытания прекращаются и принимается проверяемая гипотеза

Таблица 6.27

Последовательный анализ
для проверки гипотезы, что доля
брака в партии равна $p_0 = 0,1$,
по сравнению с противопоставляемой
гипотезой, что доля брака
равна $p_1 = 0,3$

| n | x_n | t | n | x_n | t |
|-----|-------|-----|-----|-------|-----|
| 1 | 0 | 0 | 12 | 1 | 4 |
| 2 | 0 | 0 | 13 | 0 | 4 |
| 3 | 1 | 1 | 14 | 1 | 5 |
| 4 | 0 | 1 | 15 | 0 | 5 |
| 5 | 0 | 1 | 16 | 0 | 5 |
| 6 | 0 | 1 | 17 | 0 | 5 |
| 7 | 0 | 1 | 18 | 1 | 6 |
| 8 | 0 | 1 | 19 | 0 | 6 |
| 9 | 1 | 2 | 20 | 0 | 6 |
| 10 | 0 | 2 | 21 | 0 | 6 |
| 11 | 1 | 3 | 22 | 1 | 7 |

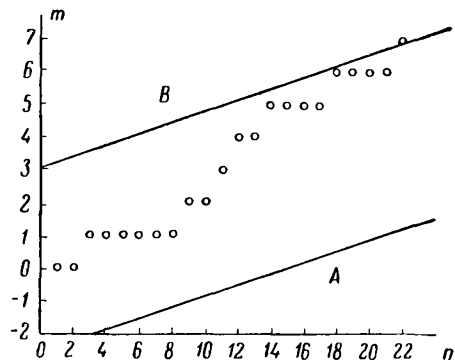


Рис. 6.11. Последовательный анализ для проверки гипотезы, что доля брака в партии равна $p_0 = 0,1$, по сравнению с противопоставляемой гипотезой, что доля брака равна $p_1 = 0,3$.

$p = 0,1$; если кружок окажется выше верхней прямой, то испытания тоже прекращаются и принимается противопоставляемая гипотеза $p = 0,3$; если же кружок будет находиться между прямыми, то нет оснований сделать заключения с принятыми вероятностями α и β ; поэтому необходимо продолжить испытания.

Произведенные испытания относительно доли браковочной продукции дали результаты, приведенные в табл. 6.27 *). Изображая эти данные при помощи описанного приема, мы видим, что после 22-го испытания кружок оказался выше верхней прямой. Это значит, что при $n = 22$ удовлетворяется неравенство (**). Следовательно, надо принять гипотезу $p = 0,3$. Другими словами, партия должна быть забракована, если допустимая доля брака не должна превышать 0,1.

3. Оценка среднего значения. Положим, что распределение случайной величины x является нормальным, с основным отклонением, равным σ . Требуется проверить гипотезу, что среднее значение

*) Вальд, 1960, стр. 128 (IV).

распределения равно $\bar{X} = \bar{x}_0$, по сравнению с противопоставляемой гипотезой, что $\bar{X} = \bar{x}_1$ ($\bar{x}_1 > \bar{x}_0$).

В этом случае совместная плотность вероятности для значений x_1, x_2, \dots, x_n , полученных при n независимых наблюдениях, будет равна

$$p_{0n} = \frac{1}{(\sigma \sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x}_0)^2}, \quad (6.172)$$

если верна проверяемая гипотеза; если же верна противопоставляемая гипотеза, то рассматриваемая совместная плотность будет равна

$$p_{1n} = \frac{1}{(\sigma \sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x}_1)^2}. \quad (6.173)$$

Поэтому отношение правдоподобия равно

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{h=1}^n [(x_h - \bar{x}_1)^2 - (x_h - \bar{x}_0)^2]}, \quad (6.174)$$

а его натуральный логарифм равен

$$\lg \frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{\sigma^2} \left(\sum_{h=1}^n x_h - \frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}{2} n \right). \quad (6.175)$$

В таком случае неравенство (6.164) может быть заменено равносильным ему неравенством

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{\sigma^2} \left(\sum_{h=1}^n x_h - \frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}{2} n \right) \leq \ln \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

или

$$\sum_{h=1}^n x_h \leq \frac{\sigma^2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_0} \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + \frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}{2} n. \quad (6.176)$$

Подобным же образом неравенство (6.165) примет вид

$$\sum_{h=1}^n x_h \geq \frac{\sigma^2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_0} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} + \frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}{2} n. \quad (6.177)$$

Если после n -го наблюдения удовлетворено неравенство (6.176), то принимается проверяемая гипотеза, что $\bar{X} = \bar{x}_0$; если же будет удовлетворено неравенство (6.177), то принимается противопоставляемая гипотеза, что $\bar{X} = \bar{x}_1$.

Пусть, например,

$$\bar{x}_0 = 11,5, \quad \sigma = 0,35.$$

Эти значения приближенно равны среднему значению и основному отклонению ряда распределения ударной вязкости малоуглеродистой стали (см. табл. 1.5). Проверим гипотезу, что в рассматриваемой нормальной общей совокупности с основным отклонением $\sigma = 0,35$ среднее значение равно 11,5. Пусть противопоставляемая гипотеза будет состоять в том, что в этой совокупности среднее значение равно 11,7, и положим

$$\alpha = 0,01 \quad \text{и} \quad \beta = 0,02.$$

Тогда неравенства (6.176) и (6.177) примут вид

$$\sum_{h=1}^n x_h \leq \frac{0,1225}{0,2} \ln \frac{0,02}{0,99} + 11,6n$$

и

$$\sum_{h=1}^n x_h \geq \frac{0,1225}{0,2} \ln \frac{0,98}{0,01} + 11,6n,$$

или

$$\sum_{h=1}^n x_h \leq -2,4 + 11,6n \quad \text{и} \quad \sum_{h=1}^n x_h \geq 1,4 + 11,6n.$$

Таблица 6.28

Последовательный анализ для проверки гипотезы, что среднее значение ударной вязкости малоуглеродистой стали равно $x = 11,5 \text{ кгм/см}^2$, по сравнению с противопоставляемой гипотезой, что $x = 11,7 \text{ кгм/см}^2$

| n | x_n | $-2,4 + 11,6n$ | $\sum_{h=1}^n x_h$ | $+1,4 + 11,6n$ |
|-----|-------|----------------|--------------------|----------------|
| 1 | 11,4 | 9,2 | 11,4 | 13,0 |
| 2 | 11,7 | 20,8 | 23,1 | 24,6 |
| 3 | 11,7 | 32,4 | 34,8 | 36,2 |
| 4 | 11,5 | 44,0 | 46,3 | 47,8 |
| 5 | 11,3 | 55,6 | 57,6 | 59,4 |
| 6 | 11,8 | 67,2 | 69,4 | 71,0 |
| 7 | 12,2 | 78,8 | 81,6 | 82,6 |
| 8 | 11,5 | 90,4 | 93,1 | 94,2 |
| 9 | 11,3 | 102,0 | 104,4 | 105,8 |
| 10 | 11,2 | 113,6 | 115,6 | 117,4 |
| 11 | 11,0 | 125,2 | 126,6 | 129,0 |
| 12 | 10,4 | 136,8 | 137,0 | 140,6 |
| 13 | 11,2 | 148,4 | 148,2 | 152,2 |

Взяв значения x в том порядке, как они были получены при испытаниях (см. табл. 1.1), мы можем необходимые вычисления расположить в табл. 6.28.

Как и в случае оценки вероятности появления события (п. 2), действия при последовательном анализе можно свести к построению соответствующего чертежа.

Проведя прямые $m = -2,4 + 11,6 n$ и $m = 1,4 + 11,6 n$, будем после каждого испытания наносить на чертеж кружок, изображающий сумму всех наблюдаемых значений, $\sum x_n$ (рис. 6.12). Испытания продолжаются до тех пор,

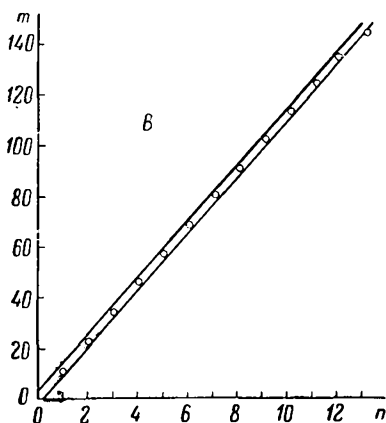


Рис. 6.12. Последовательный анализ для проверки гипотезы, что среднее значение ударной вязкости малоуглеродистой стали равно $\bar{x} = 11,5 \text{ кгм/см}^2$, по сравнению с противопоставляемой гипотезой, что $\bar{x} = 11,7 \text{ кгм/см}^2$.

A — область принятия гипотезы $\bar{x} = \bar{x}_0$,
B — область принятия гипотезы, что $\bar{x} = \bar{x}_1$.

пока кружок не выйдет из промежутка между проведенными прямыми. Как только кружок окажется ниже нижней прямой или выше верхней прямой, испытания прекращаются; принимается в первом случае проверяемая гипотеза, во втором — противопоставляемая гипотеза.

В рассматриваемом примере кружок после 13-го испытания оказался ниже нижней прямой; следовательно, должна быть принята проверяемая гипотеза, что среднее значение ударной вязкости малоуглеродистой стали равно $11,5 \text{ кгм/см}^2$.

§ 11. Критерии случайности

1. Критерий случайности Романовского. Необходимым условием применения методов оценки является обеспечение случайности при составлении частичных совокупностей.

Наиболее надежным способом обеспечения случайности при производстве наблюдения является применение таблицы случайных чисел (гл. I, § 1, п. 4).

Ввиду исключительной важности таблицы случайных чисел (табл. III) при решении задач статистического исчисления необходимо быть уверенным в том, что числа этой таблицы действительно являются случайными.

О случайности чисел можно судить по распределению цифр в таблице. Если числа случайны, то вероятность появления любой цифры 0, 1, 2, ..., 9 должна быть одинаковой, а именно равной 0,1. Следовательно, среди всех 4000 цифр рассматриваемой таблицы случайных чисел каждая цифра должна встречаться около 400 раз, отклоняясь в ту или другую сторону на небольшое число.

Подсчитав, сколько раз встречалась та или иная цифра в этой таблице, получим следующий ряд:

| | | | | | | | | | | | |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| Цифры | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Сумма |
| Встречаемость | 389 | 387 | 432 | 415 | 381 | 417 | 408 | 413 | 373 | 385 | 4000 |

Таким образом, цифры встречаются в таблице случайных чисел практически одинаково.

Аналитическое решение вопроса о случайности чисел дается при помощи критерия случайности Романовского.

Для установления этого критерия рассмотрим бесконечную последовательность испытаний, независимых по отношению к некоторому событию A , предполагая, что вероятность появления события A не изменяется от испытания к испытанию, т.е. равна некоторому постоянному числу p . Вероятность события B , противоположного событию A , обозначим через q , так что $q = 1 - p$.

Положим, что последовательность рассматриваемых испытаний представляет ряд

$$B V A V A A B V B A V B A \dots \quad (6.178)$$

Требуется выяснить, можно ли считать этот ряд случайным, т.е. таким, в котором появление и непоявление события A зависит единственно только от вероятностей p и q , а не от каких-либо факторов, нарушающих эти вероятности.

Обращаясь к таблице случайных чисел, положим, например, что появление цифры «0» обозначает событие A , а появление какой-либо другой цифры — событие B . Выписывая цифры, начиная с первого столбца таблицы, получим ряд

$$1534 \ 6128 \ 6047 \ 0806 \ 99 \dots$$

В этом ряде цифра «0» распределяется неправильным образом. Возникает вопрос, можно ли это распределение рассматривать как случайное?

Разложим ряд (6.178) на частные последовательности

$$B V A, B A, A, B V B A, B V A, \dots,$$

где A появляется только в конце каждой частной последовательности, и обозначим буквой l длину такой частной последовательности.

В таблице случайных чисел такими частными последовательностями будут

$$1534612860, \ 470, \ 80, \dots$$

Длину l можно назвать *редкостью* события A . Вероятность, что редкость события A будет иметь значение l , равна

$$P(l) = q^{l-1}p,$$

т. е. равна вероятности появления частной последовательности $ВВ \dots ВА$, состоящей из l членов.

Исследуя ряд распределения редкости события

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} l: & 1 & 2 & 3 & \dots & l & \dots \\ P(l): & p & qp & q^2p & \dots & q^{l-1}p & \dots \end{array} \right\}, \quad (6.179)$$

находим

$$\begin{aligned} M(l) &= 1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2p + \dots = p(1 + 2q + 3q^2 + \dots) = \\ &= p \frac{d}{dq} (1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = p \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Таким образом, обозначая математическое ожидание редкости через \bar{l} , имеем

$$\bar{l} = \frac{1}{p}.$$

Центральные моменты ряда l находятся при помощи производящей функции

$$\bar{G}(v) = \sum_{l=1}^{\infty} pq^{l-1} e^{v(l-1)} \quad (6.180)$$

[ср. (4.111)].

В частности, дисперсия редкости l равна

$$\bar{\mu}_2 = \bar{l}^2 q,$$

четвертый момент равен

$$\bar{\mu}_4 = \frac{q(9q + p^2)}{p^4}.$$

Положим теперь, что в результате наблюдений получены значения l_1, l_2, \dots, l_n редкости l . Среднее значение и дисперсия этих значений равны

$$\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n l_j, \quad \mu^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (l_j - \bar{l})^2.$$

При достаточно большом числе n имеют место приближенные равенства:

$$P\{-\varepsilon \leq l - \bar{l} \leq \varepsilon\} = \Phi(\alpha) \quad \left(\alpha = \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\bar{l} \sqrt{q}} \right);$$

$$P\{-\varepsilon \leq \mu_2 - \bar{\mu}_2 \leq \varepsilon\} = \Phi(\beta) \quad \left(\beta = \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sqrt{\bar{\mu}_4 + \frac{n-3}{n-1} \bar{\mu}_2^2}} \right),$$

где $\Phi(x)$ есть интеграл вероятностей (5.41).

Принимая вероятность 0,997, соответствующую $\alpha = \beta = 3$, практически равной достоверности, получим *критерий случайности Романовского*:

«Если проверяются неравенства:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{|\bar{l} - \tilde{l}| \sqrt{n}}{\tilde{l} \sqrt{q}} < 3 \quad \left(\tilde{l} = \frac{1}{p} \right) \\ \text{и} \quad & \frac{|\mu_2 - \tilde{\mu}_2| \sqrt{n}}{\sqrt{\tilde{\mu}_4 + \frac{n-3}{n-1} \tilde{\mu}_2^2}} < 3 \quad \left(\tilde{\mu}_2 = \tilde{l}^2 q, \quad \tilde{\mu}_4 = \frac{q(9q + p^2)}{p^4} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.181)$$

то исследуемый ряд испытаний можно считать случайным».

В применении к таблице случайных чисел событием A будем считать появление нуля, а событием B — появление любой другой цифры. Тогда величины, входящие в формулы (6.181), будут равны:

$$\begin{aligned} p &= 0,1, \quad q = 0,9, \quad \tilde{l} = \frac{1}{p} = 10, \\ \tilde{\mu}_2 &= \tilde{l}^2 q = 90, \quad \tilde{\mu}_4 = \frac{q(9q + p^2)}{p^4} = 72\,990, \end{aligned}$$

а величины \bar{l} и μ_2 находятся из таблицы случайных чисел.

Как указано выше, в рассматриваемой таблице случайных чисел цифра «0» встречается 389 раз. Значения редкости l , начиная с первого столбца таблицы, оказались следующими:

10, 3, 2, 17, 7, 12, 4, 2, 14, 5 и т. д.

Сводя эти значения в ряд, взяв величину разряда равной пяти, получим табл. 6.29.

Среднее значение и дисперсия этого ряда равны

$$\bar{l} = 10,49, \quad \mu_2 = 87,85.$$

Подставляя эти статистики в (6.181), получим

$$\begin{aligned} \frac{|10,49 - 10| \sqrt{389}}{10 \sqrt{0,9}} &= \frac{0,49 \cdot 19,72}{10 \cdot 0,949} = 1,018 < 3, \\ \frac{|87,85 - 90| \sqrt{389}}{\sqrt{72\,990 + \frac{389}{388} \cdot 90^2}} &= \frac{42,40}{284,7} = 0,149 < 3. \end{aligned}$$

Таким образом, критерий случайности Романовского, основанный на неравенствах (6.181), полностью проверяется. Следовательно, с вероятностью 0,997 можно утверждать, что числа рассматриваемой таблицы случайных чисел действительно являются случайными.

2. Проверка случайности при помощи критерия согласия Пирсона. Проверка случайности чисел в таблице случайных чисел может быть произведена при помощи критерия согласия Пирсона $P(\chi^2)$.

С этой целью рассмотрим два следующих случая.

Подсчитаем сначала количество встреч n_j цифры «0» среди каждых десяти цифр таблицы случайных чисел и сравним полученный ряд с соответствующим распределением Пуассона. Частоты распределения Пуассона обуславливаются исключительно только вероятностью появления цифры «0» среди десяти цифр и, следовательно, представляют *случайные* числа. В рассматриваемом случае $p = 0,1$, $\lambda = 1,0$. Умножая значения p_m (табл. X) на $n = 400$, находим \tilde{n}_j .

Таблица 6.29

Ряд распределения редкости нуля
в таблице случайных чисел

| l | n_j | l | n_j |
|-------|-------|----------|-------|
| 1—5 | 159 | 31—35 | 6 |
| 6—10 | 87 | 36—40 | 4 |
| 11—15 | 54 | 41—45 | 1 |
| 16—20 | 34 | 46—50 | 1 |
| 21—25 | 25 | 51—55 | 3 |
| 26—30 | 15 | | |
| | | Σ | 389 |

Вычисление $P(\chi^2)$ для этого случая показано в табл. 6.30. При определении числа степеней свободы заметим, что в рассматриваемом случае имеется только одна линейная связь, а именно — суммы наблюдаемых и выравнивающих частот должны быть равными между собой, параметр же λ распределения Пуассона известен до опыта; следовательно, $v = k - 1$.

Так как найденная вероятность $P(\chi^2)$ больше 0,05 то расхождение между, наблюдаемыми и выравнивающими частотами можно считать случайным. Таким образом, подтверждается, что числа таблицы случайных чисел действительно являются случайными.

Найдем теперь числа \tilde{n}_j , представляющие вероятности соответствующих значений редкости l , умноженные на объем ряда. Другими словами, построим ряд распределения *случайных* чисел l .

Вероятность, что l получит одно из значений 1, 2, 3, 4, 5, равна

$$p + pq + pq^2 + pq^3 + pq^4 = p \frac{1 - q^5}{1 - q} = 1 - q^5;$$

вероятность, что l получит одно из значений 6, 7, 8, 9, 10, равна:

$$pq^5 + pq^6 + pq^7 + pq^8 + pq^9 = pq^5 \frac{1 - q^5}{1 - q} = q^5 (1 - q^5);$$

вероятность, что l получит одно из значений 11, 12, 13, 14, 15, равна

$$q^{10} (1 - q^5)$$

Т а б л и ц а 6.30

Вычисление $P(\chi^2)$

| m | n_j | \bar{n}_j | $n_j - \bar{n}_j$ | $\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{\bar{n}_j}$ | $\frac{n_j^2}{\bar{n}_j}$ |
|--|-------|-------------|-------------------|---|---------------------------|
| 0 | 146 | 147 | -1 | 0,01 | 145,01 |
| 1 | 152 | 147 | +5 | 0,17 | 157,17 |
| 2 | 79 | 74 | +5 | 0,34 | 84,34 |
| 3 | 15 | 25 | -10 | 4,00 | 9,00 |
| 4 | 6 | 6 | +1 | 0,14 | 9,14 |
| 5 | 2 | 1 | | | |
| | } 8 | | } 7 | | |
| Σ | 400 | 400 | -11 +11 | $\chi^2 = 4,66$ | 404,66 |
| $\chi^2 = 4,66, \quad v = k - 1 = 4, \quad P(\chi^2) > 0,30$ | | | | | -404,66 400,00 |
| | | | | | $\chi^2 = 4,66$ |

Т а б л и ц а 6.31

Вычисление $P(\chi^2)$

| l | n_j | \bar{n}_j | $n_j - \bar{n}_j$ | $\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{\bar{n}_j}$ | $\frac{n_j^2}{\bar{n}_j}$ |
|--|-------|-------------|-------------------|---|---------------------------|
| 1-5 | 159 | 159 | 0 | 0,00 | 159,00 |
| 6-10 | 87 | 94 | -7 | 0,52 | 80,52 |
| 11-15 | 54 | 57 | -3 | 0,16 | 51,16 |
| 16-20 | 34 | 33 | +1 | 0,03 | 35,03 |
| 21-25 | 25 | 19 | +6 | 1,89 | 31,89 |
| 26-30 | 15 | 11 | +4 | 1,45 | 20,45 |
| 31-35 | 6 | 7 | -1 | 0,14 | 5,14 |
| 36-40 | 4 | 4 | | | |
| 41-45 | 1 | 2 | | | |
| 46-50 | 1 | 2 | | | |
| 51-55 | 3 | 1 | | | |
| | } 9 | | } 9 | | |
| Σ | 389 | 389 | -11 +11 | $\chi^2 = 4,19$ | 393,19 |
| $\chi^2 = 4,19, \quad v = k - 1 = 7, \quad P(\chi^2) > 0,70$ | | | | | -393,19 389,00 |
| | | | | | $\chi^2 = 4,19$ |

и т. д. Подставляя в эти выражения $q = 0,9$, мы после умножения на $n = 389$ получим числа \tilde{n}_j . Например,

$$1 - q^5 = 1 - 0,5905 = 0,4095; \quad 0,4095 \cdot 389 = 159.$$

Вычисление $P(\chi^2)$ для этого случая показано в табл. 6.31.

Так как в этом случае вероятность $P(\chi^2)$ больше 0,05, то можно утверждать, что наблюдаемое распределение величины l отличается от ее теоретического распределения лишь случайно, а не существенно. Таким образом, и в этом случае критерий $P(\chi^2)$ подтверждает вывод о том, что числа рассматриваемой таблицы случайных чисел являются действительно случайными.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Обыкновенные корреляционные уравнения

1. Установление корреляционных уравнений по способу наименьших квадратов. Изучение связи между случайными величинами представляет одну из основных задач статистического исчисления. Наиболее простым и важным случаем такой связи является корреляционная зависимость между случайными величинами, выражаемая корреляционными уравнениями.

Корреляционные уравнения дают возможность вычислять вероятные значения одной случайной величины в зависимости от отдельных значений других случайных величин.

Вероятным значением $\bar{X}_{(j)}|_1$ случайной величины X_2 называется «приближенное» к $X_{2(j)}$ значение этой величины, вычисленное на основании корреляционного уравнения, выражающего зависимость X_2 от X_1 .

Вычисление вероятных значений по корреляционным уравнениям имеет большую практическую важность, особенно в тех случаях, когда непосредственное определение изучаемого признака или сопряжено с порчей и даже уничтожением образца, или же сопровождается значительной трудностью.

Если случайная величина X_2 находится в корреляционной зависимости только от одной случайной величины X_1 и обратно, то выражающие эту связь уравнения называются *обыкновенными* корреляционными уравнениями. Если же каждая из случайных величин

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

находится в корреляционной зависимости от многих других из этих величин, то выражающие эту зависимость уравнения называются *множественными* корреляционными уравнениями.

Рассмотрим сначала обыкновенные корреляционные уравнения.

Установление корреляционного уравнения сводится к определению типа уравнения и вычислению коэффициентов, входящих в это уравнение.

Тип корреляционного уравнения обуславливается характером связи между случайными величинами. В большинстве случаев характер этой связи оказывается таким, что для ее выражения применяется корреляционное уравнение в виде полинома того или иного порядка.

Установим корреляционное уравнение, выражающее зависимость вероятного значения $\bar{X}_{(j)}|1$ случайной величины X_2 от случайной величины X_1 . При этом для удобства вычислений сначала выразим приближенно первый условный основной момент $r_{(j)}|1$ при помощи полинома h_1 -го порядка относительно $\xi_{1(j)}$

$$r_{(j)}|1 = \sum_{g_1=0}^{h_1} k_{g_1|}^{(h_1)} \xi_{1(j)}^{g_1}. \quad (7.1)$$

В приближенное равенство

$$r_{(j)}|1 \approx r_{(j)}^{(h_1)}|1 \quad (7.2)$$

мы вложим следующее содержание. Коэффициенты $k_{g_1|}^{(h_1)}$ уравнения (7.1) будут находиться по способу наименьших квадратов, т. е. при условии, чтобы сумма квадратов разностей между левой и правой частями приближенного равенства (7.2)

$$w_{h_1} = \sum_{j=1}^{k_1} p_{j1} \cdot \left\{ r_{(j)}|1 - \sum_{g_1=0}^{h_1} k_{g_1|}^{(h_1)} \xi_{1(j)}^{g_1} \right\}^2 \quad (7.3)$$

обращалась в минимум. [Ср. гл. VI, § 2, п. 6.]

Для определения коэффициентов $k_{g_1|}^{(h_1)}$ надо взять частные производные функции (7.3) по $k_{f_1|}^{(h_1)}$ и приравнять их нулю. Имеем

$$\sum_{j=1}^{k_1} p_{j1} \cdot \xi_{1(j)}^{f_1} \left\{ r_{(j)}|1 - \sum_{g_1=0}^{h_1} k_{g_1|}^{(h_1)} \xi_{1(j)}^{g_1} \right\} = 0. \quad (7.4)$$

Придавая показателю степени f_1 значения от 0 до h_1 , получим систему $h_1 + 1$ уравнений [см. (2.115)]

$$r_{f_1|1} = \sum_{g_1=0}^{h_1} k_{g_1|}^{(h_1)} r_{g_1+f_1|0} \quad (f_1 = \overline{0, h_1}). \quad (7.5)$$

Эти уравнения называются *нормальными уравнениями*.

Уравнения (7.5) являются линейными относительно коэффициентов $k_{g_1|}^{(h_1)}$. Именно стремлением получить после дифференцирования функции w_{h_1} линейную систему уравнений и обуславливается выбор степени 2 в выражении (7.3).

При решении системы нормальных уравнений применяется теорема Крамера, согласно которой

$$k_{g_1|}^{(h_1)} = \frac{D_{g_1}^{(h_1)}}{D^{(h_1)}} \quad (g_1 = \overline{0, h_1}), \quad (7.6)$$

где определитель $D^{(h_1)}$ равен

$$D^{(h_1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & r_{h_1|0} \\ 0 & 1 & r_{3|0} & \dots & r_{h_1+1|0} \\ 1 & r_{3|0} & r_{4|0} & \dots & r_{h_1+2|0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{h_1|0} & r_{h_1+1|0} & r_{h_1+2|0} & \dots & r_{2h_1|0} \end{vmatrix}, \quad (7.7)$$

а определитель $D_{g_1}^{(h_1)}$ получается из определителя $D^{(h_1)}$ путем замены в нем элементов g_1 -го столбца *) основными моментами $r_{0|1}$, $r_{1|1}$, $r_{2|1}$, ..., $r_{h_1|1}$, стоящими в левых частях нормальных уравнений (7.5).

Уравнение (7.1) называется корреляционным уравнением h_1 -го порядка. Мы имеем

$$r_{(j)|1}^{(h_1)} = \sum_{g_1=0}^{h_1} \frac{D_{g_1}^{(h_1)}}{D^{(h_1)}} \xi_{1(j)}^{g_1}. \quad (7.8)$$

Для оценки степени приближения корреляционного уравнения h_1 -го порядка (7.8) к графику зависимости $r_{(j)|1}$ от $\xi_{1(j)}$ берется минимальное значение ω_{h_1} , которое получается, если в выражение (7.3) подставить найденные коэффициенты $k_{g_1|1}^{(h_1)}$.

2. Способ Чебышева. Аналитическое решение задачи определения коэффициентов корреляционного уравнения (7.1) не представляет, как мы видели, большой трудности. Однако на практике способ наименьших квадратов очень неудобен.

В большинстве случаев, приступая к вычислениям, мы не имеем сведений относительно порядка корреляционного уравнения, которое давало бы достаточно точное приближение к графику упомянутой зависимости. Поэтому приходится постепенно повышать порядок корреляционного уравнения.

Но, как видно из (7.1), коэффициенты $k_{g_1|1}^{(h_1)}$, найденные для корреляционного уравнения h_1 -го порядка, утрачивают свое значение при переходе к корреляционному уравнению $(h_1 + 1)$ -го порядка. В силу этого, если достигнутое приближение оказывается недостаточным и требуется — для получения большего приближения — повысить порядок корреляционного уравнения, то приходится вновь проделывать всю вычислительную работу: устанавливать и решать новые нормальные уравнения и вычислять для оценки приближения новые суммы, аналогичные сумме (7.3).

*) Счет начинается с нуля.

Для устранения этих неудобств Чебышев предложил особый способ решения задачи подбора полинома того или иного порядка. При способе Чебышева члены уравнения более высокого порядка прибавляются последовательно, с сохранением уже произведенных вычислений и оценкой достоинства формулы, получаемой в каждом случае.

Корреляционное уравнение, устанавливаемое по способу Чебышева, имеет следующий *общий вид*:

$$r_{(j)|1}^{(h_1)} = \sum_{g_1=1}^{h_1} \frac{D_{g_1}^{(g_1)} D_{g_1}^{(g_1)*}}{D^{(g_1-1)} D^{(g_1)}}. \quad (7.9)$$

В этом уравнении $D^{(g_1)}$ и $D^{(g_1-1)}$ — такие же определители, как (7.7); $D_{g_1}^{(g_1)}$ — определитель, получаемый из $D^{(g_1)}$ путем замены в нем элементов g_1 -го столбца основными моментами $r_{0|1}, r_{1|1}, r_{2|1}, \dots, r_{g_1|1}$; наконец, $D_{g_1}^{(g_1)*}$ — определитель, получаемый из $D^{(g_1)}$ путем замены элементов g_1 -го столбца степенями переменной ξ_1 :

$$1, \xi_{1(j)}, \xi_{1(j)}^2, \dots, \xi_{1(j)}^{g_1}.$$

Постепенно повышая порядок корреляционного уравнения, начиная с $h_1 = 1$, мы можем представить уравнение (7.9) в виде

$$\begin{aligned} r_{(j)|1}^{(h_1)} = & r_{1|1} \xi_{1(j)} + \frac{b_1}{a_1} (\xi_{1(j)}^2 - r_{3|0} \xi_{1(j)} - 1) + \\ & + \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}} \left\{ \xi_{1(j)}^3 - r_{4|0} \xi_{1(j)} - r_{3|0} - \frac{a_2}{a_1} (\xi_{1(j)}^2 - r_{3|0} \xi_{1(j)} - 1) \right\} + \\ & + \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ a_2 & a_3 & b_2 \\ a_4 & a_5 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}} \left\{ \xi_{1(j)}^4 - r_{5|0} \xi_{1(j)} - r_{4|0} - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}} (\xi_{1(j)}^3 - r_{4|0} \xi_{1(j)} - r_{3|0}) - \right. \\ & \left. - \frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_5 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}} (\xi_{1(j)}^2 - r_{3|0} \xi_{1(j)} - 1) \right\} + \dots \quad (7.10) \end{aligned}$$

В этом уравнении

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= r_{4|0} - r_{3|0}^2 - 1, \\ a_2 &= r_{5|0} - r_{4|0}r_{3|0} - r_{3|0}, \\ a_3 &= r_{6|0} - r_{4|0}^2 - r_{3|0}^2, \\ a_4 &= r_{6|0} - r_{5|0}r_{3|0} - r_{4|0}, \\ a_5 &= r_{7|0} - r_{5|0}r_{4|0} - r_{4|0}r_{3|0}, \\ a_6 &= r_{8|0} - r_{5|0}^2 - r_{4|0}^2; \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= r_{2|1} - r_{3|0}r_{1|1}, \\ b_2 &= r_{3|1} - r_{4|0}r_{1|1}, \\ b_3 &= r_{4|1} - r_{5|0}r_{1|1}; \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} &= a_1a_3 - a_2^2, \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1b_2 - a_2b_1, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \end{vmatrix} &= a_1a_5 - a_2a_4, \\ \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_5 & a_3 \end{vmatrix} &= a_3a_4 - a_2a_5 = - \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_3 & a_5 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} &= a_4 \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_3 & a_5 \end{vmatrix} - a_5 \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \end{vmatrix} + a_6 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ a_2 & a_3 & b_2 \\ a_4 & a_5 & b_3 \end{vmatrix} &= b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_3 & a_5 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Переход от приближенных условных основных моментов $r_{(j)|1}^{(h_1)}$ к вероятным значениям выполняется по формуле

$$\tilde{X}_{(j)|1} = \bar{X}_2 + r_{(j)|1}^{(h_1)} \bar{\sigma}_2. \quad (7.14)$$

[Ср. (2.117).]

Применяя (7.10), мы можем переходить от корреляционного уравнения первого порядка к корреляционным уравнениям более высоких порядков. Показателем того, на каком порядке

корреляционного уравнения следует остановиться, служит *критерий корреляционного уравнения*

$$\xi_{h_1} = \xi_{h_1-1} - \frac{D_{h_1}^{(h_1)2}}{D^{(h_1-1)} D^{(h_1)}} \quad (7.15)$$

с его основной ошибкой

$$\sigma_{\xi_{h_1}} = \sqrt{\frac{\xi_{h_1}}{n}}, \quad (7.16)$$

причем

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^{h_1} p'_{j,1} r_{(j)11}^2 - r_{111}^2. \quad (7.17)$$

Если величина критерия ξ_{h_1} оказывается достаточно малой в сравнении с его основной ошибкой $\sigma_{\xi_{h_1}}$, то мы можем остановиться на корреляционном уравнении h_1 -го порядка.

Основная ошибка $\sigma_{2,1}^{(h_1)}$ корреляционного уравнения (7.9) вычисляется по формуле

$$\frac{\sigma_{2,1}^{(h_1)^2}}{\sigma_2^2} = 1 - \sum_{g_1=1}^{h_1} \frac{D_{g_1}^{(g_1)^2}}{D^{(g_1-1)} D^{(g_1)}}. \quad (7.18)$$

Остановившись на первом члене уравнения (7.10), получим *корреляционное уравнение первого порядка*

$$r_{(j)11}^{(1)} = r_{111} \xi_{1(j)}, \quad (7.19)$$

основная ошибка которого равна

$$\sigma_{2,1}^{(1)} = \sigma_2 \sqrt{1 - r_{111}^2}. \quad (7.20)$$

Для оценки корреляционного уравнения первого порядка служит *критерий линейности*

$$\xi_1 = \eta_{21}^2 - r_{111}^2 \quad (7.21)$$

с основной ошибкой

$$\sigma_{\xi_1} = \sqrt{\frac{\xi_1}{n}}. \quad (7.22)$$

Принимая во внимание (7.14), мы можем корреляционное уравнение (7.19) представить в виде

$$\tilde{X}_{(j)11} = \bar{X}_2 + r_{111} \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1} (X_{1(j)} - \bar{X}_1). \quad (7.23)$$

Подобным же образом находим

$$\tilde{X}_{11(j)} = \bar{X}_1 + r_{111} \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2} (X_{2(j)} - \bar{X}_2). \quad (7.24)$$

Присоединяя к первому члену уравнения (7.10) его второй член, получим *корреляционное уравнение второго порядка*

$$r_{(j)11}^{(2)} = r_{11} \xi_{1(j)} + \frac{b_1}{a_1} (\xi_{1(j)}^2 - r_{310} \xi_{1(j)} - 1) \quad (7.25)$$

с основной ошибкой

$$\sigma_{2.1}^{(2)} = \sigma_2 \sqrt{1 - r_{11}^2 - \frac{b_1^2}{a_1}}. \quad (7.26)$$

Для оценки этого уравнения служит *критерий квадратичности*

$$\xi_2 = \xi_1 - \frac{b_1^2}{a_1} \quad (7.27)$$

с основной ошибкой

$$\sigma_{\xi_2} = \sqrt{\frac{\xi_2}{n}}. \quad (7.28)$$

Присоединяя к первым двум членам уравнения (7.10) его третий член, получим *корреляционное уравнение третьего порядка*

$$r_{(j)11}^{(3)} = r_{11} \xi_{1(j)} + \frac{b_1}{a_1} (\xi_{1(j)}^2 - r_{310} \xi_{1(j)} - 1) + \\ + \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}} \left\{ \xi_{1(j)}^3 - r_{410} \xi_{1(j)} - r_{310} - \frac{a_2}{a_1} (\xi_{1(j)}^2 - r_{310} \xi_{1(j)} - 1) \right\}. \quad (7.29)$$

Основная ошибка этого корреляционного уравнения вычисляется по формуле

$$\frac{\sigma_{2.1}^{(3)2}}{\sigma_2^2} = 1 - r_{11}^2 - \frac{b_1^2}{a_1} - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}{a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}}. \quad (7.30)$$

Для оценки корреляционного уравнения третьего порядка находится *критерий кубичности*

$$\xi_3 = \xi_2 - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}{a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}} \quad (7.31)$$

с основной ошибкой

$$\sigma_{\xi_3} = \sqrt{\frac{\xi_3}{n}}. \quad (7.32)$$

Присоединяя после этого четвертый член уравнения (7.10), получим *корреляционное уравнение четвертого порядка*, основная ошибка которого равна

$$\frac{\sigma_{2.1}^{(4)^2}}{\sigma_2^2} = 1 - r_{11}^2 - \frac{b_1^2}{a_1} - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}{a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ a_2 & a_3 & b_2 \\ a_4 & a_5 & b_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}}. \quad (7.33)$$

Для оценки корреляционного уравнения четвертого порядка вычисляется критерий ξ_4 :

$$\xi_4 = \xi_3 - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ a_2 & a_3 & b_2 \\ a_4 & a_5 & b_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}} \quad (7.34)$$

с основной ошибкой

$$\sigma_{\xi_4} = \sqrt{\frac{\xi_4}{n}}. \quad (7.35)$$

Поступая описанным способом, мы можем получить корреляционное уравнение того или иного порядка, достаточно точно выражающее зависимость $r_{(f)}^{(h)}|_1$ от $\xi_{1(f)}$. Применяя затем формулу (7.14), находим искомое вероятное значение $\bar{X}_{(f)|1}$.

3. Корреляционные уравнения первого порядка. Последовательность вычислений при установлении корреляционного уравнения первого порядка рассмотрим на примере корреляционного урав-

Таблица 7.1

Статистики для таблицы распределения объемного веса при влажности 10% и модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели

| | |
|----------------------------|--|
| $m_{110} = +0,335$ | $m_{011} = -0,082$ |
| $m_{210} = 3,440$ | $m_{012} = 2,632$ |
| $\mu_{210} = 3,328$ | $\mu_{012} = 2,625$ |
| $\sigma_1 = 1,824$ | $\sigma_2 = 1,620$ |
| $\bar{X}_1 = 0,455$ | $\bar{X}_2 = 128\,852 \text{ кг/см}^2$ |
| $\bar{\sigma}_1 = 0,05472$ | $\bar{\sigma}_2 = 22\,680 \text{ кг/см}^2$ |
| $m_{111} = +2,572$ | $\mu_{111} = +2,590$ |
| $r_{111} = 0,880$ | $\eta_{21} = 0,882$ |

нения, выражающего зависимость модуля упругости при сжатии вдоль волокон (X_2) от объемного веса при влажности 10% (X_1) древесины резонансовой ели (табл. 1.16).

Статистики для этой таблицы оказались следующими (табл. 7.1).

В результате вычислений находим

$$\xi_1 = 0,004 \pm 0,003.$$

Таким образом, мы можем остановиться на корреляционном уравнении первого порядка.

Подставляя полученные статистики в уравнение (7.23), находим для выражения исследуемой зависимости корреляционное уравнение

$$\tilde{X}_{(j),11} = -37\,188 + 354\,990X_{1(j)}$$

с основной ошибкой

$$\bar{\sigma}_{2,1} = 10\,780 \text{ кг/см}^2.$$

Вероятные значения модуля упругости $\tilde{X}_{(j),11}$, вычисленные на основании этого уравнения, вместе с наблюдаемыми условными средними значениями $\bar{X}_{(j),11}$, при данных значениях $X_{1(j)}$ объемного веса древесины резонансовой ели, приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Средние и вероятные значения модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели

| Объемный вес | Средние значения модуля упругости | Вероятные значения модуля упругости |
|--------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 0,325 | 79 138 | 81 404 |
| 0,355 | 91 896 | 92 351 |
| 0,385 | 101 244 | 103 298 |
| 0,415 | 116 290 | 114 245 |
| 0,445 | 125 492 | 125 192 |
| 0,475 | 135 852 | 136 139 |
| 0,505 | 147 108 | 147 086 |
| 0,535 | 158 910 | 158 033 |
| 0,565 | 166 162 | 168 980 |
| 0,595 | 172 000 | 179 927 |
| 0,625 | 200 000 | 190 874 |
| Σ | (1 494 092) | (1 497 529) |

Данные этой таблицы представлены на рис. 7.1 (кружки — наблюдаемые условные средние значения, сплошная прямая — вероятные значения). На этом же рисунке пунктирными линиями

показана зона колебаний, определяемая основной ошибкой корреляционного уравнения.

Сравнивая вероятные значения с соответствующими средними значениями, мы видим между ними практически полное совпадение.

4. Корреляционные уравнения второго порядка. Рассмотрим корреляцию между крепостью X_1 (г) и удлинением X_2 (%) хлопчатобумажной пряжи (табл. 1.18) и поставим задачу — установить корреляционное уравнение, выражающее зависимость удлинения от крепости пряжи.

Статистики для табл. 1.18 и величины a и b корреляционных уравнений приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Статистики для таблицы
распределения крепости и удлинения
хлопчатобумажной пряжи

| Статистики | Крепость | Удлинение |
|----------------|----------|-----------|
| m_1 | -0,130 | -0,038 |
| m_2 | 3,244 | 3,356 |
| m_3 | -1,162 | -1,892 |
| m_4 | 30,580 | 35,000 |
| μ_2 | 3,227 | 3,354 |
| μ_3 | +0,099 | -1,510 |
| μ_4 | 30,304 | 34,782 |
| r_3 | +0,017 | -0,246 |
| r_4 | 2,910 | 3,086 |
| \bar{X} | 271,75 | 7,98 |
| σ | 1,796 | 1,832 |
| $\bar{\sigma}$ | 44,90 | 0,916 |
| v | 16,52 | 11,48 |

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| $m_{111} = +2,476,$ | $m_{211} = -1,288,$ |
| $\mu_{111} = +2,471,$ | $\mu_{211} = -0,522,$ |
| $r_{111} = +0,751,$ | $r_{211} = -0,088,$ |
| $\eta_{21} = 0,754,$ | |
| $a_1 = 1,910,$ | $b_1 = -0,101.$ |

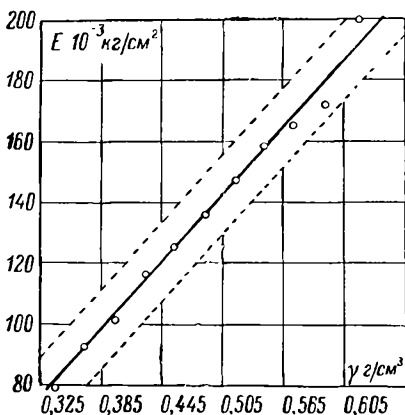


Рис. 7.1. Зависимость модуля упругости при сжатии вдоль волокон от объемного веса при влажности 10% древесины резонансовой ели.

Для определения порядка корреляционного уравнения находим

$$\xi_1 = 0,005 \pm 0,002, \quad \xi_2 = 0.$$

Следовательно, зависимость удлинения от крепости пряжи можно, по-видимому, достаточно хорошо выразить корреляционным уравнением второго порядка.

Это корреляционное уравнение оказалось следующим:

$$\begin{aligned} r_{(2)11}^{(2)} &= 0,751\xi_{1(1)} + \frac{-0,101}{1,910}(\xi_{1(1)}^2 - 0,017\xi_{1(1)} - 1) = \\ &= 0,053 + 0,752\xi_{1(1)} - 0,053\xi_{1(1)}^2 \end{aligned}$$

с основной ошибкой

$$\sigma_{2.1}^{(2)} = 1,203.$$

Чтобы проверить правильность полученного уравнения, вычислим его другим способом, по формуле (7.8).

Таблица 7.4

Наблюдаемые условные
средние значения и вероятные
значения удлинения пряжи

| $X_{1(j)}$ | $\bar{X}_{(j) 1}$ | $\tilde{X}_{(j) 1}$ |
|------------|-------------------|---------------------|
| 125 | 5,50 | 5,26 |
| 150 | 5,60 | 5,81 |
| 175 | 6,33 | 6,32 |
| 200 | 6,77 | 6,81 |
| 225 | 7,29 | 7,26 |
| 250 | 7,70 | 7,68 |
| 275 | 8,06 | 8,08 |
| 300 | 8,45 | 8,44 |
| 325 | 8,75 | 8,77 |
| 350 | 9,11 | 9,08 |
| 375 | 9,40 | 9,35 |
| 400 | 9,50 | 9,59 |
| 425 | 9,50 | 9,81 |
| Σ | (101,96) | (102,26) |

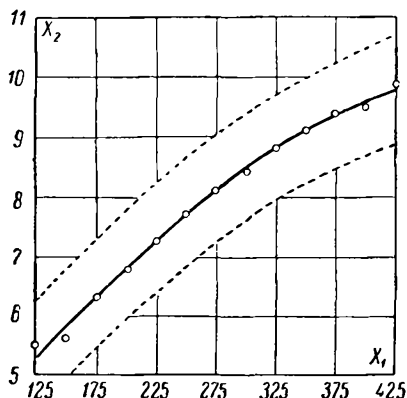


Рис. 7.2. Зависимость удлинения X_2 от крепости X_1 хлопчатобумажной пряжи.

Легко видеть, что

$$D^{(2)} = a_1 = 1,910, \quad D_0^{(2)} = -b_1 = +0,101,$$

$$D_1^{(2)} = r_{111}a_1 - r_{310}b_1 = 1,436, \quad D_2^{(2)} = b_1 = -0,101.$$

Следовательно,

$$r_{(j)|1}^{(2)} = \frac{0,101}{1,910} + \frac{1,436}{1,910} \xi_{1(j)} - \frac{0,101}{1,910} \xi_{1(j)}^2 = 0,053 + 0,752\xi_{1(j)} - 0,053\xi_{1(j)}^2,$$

как установлено выше.

Найденное уравнение можно, на основании (7.14), представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{(j)|1}^{(2)} = & 7,98 + 0,916 \left\{ 0,053 + 0,752 \left(\frac{X_{1(j)} - 271,75}{44,90} \right) - \right. \\ & \left. - 0,053 \left(\frac{X_{1(j)} - 271,75}{44,90} \right)^2 \right\} = 2,09 + 0,0284X_{1(j)} - 0,0000241X_{1(j)}^2. \end{aligned}$$

Вероятные значения удлинения $\tilde{X}_{(j)|1}$ при данных значениях $X_{1(j)}$ крепости пряжи, вычисленные по этому уравнению, вместе с наблюдаемыми условными средними значениями $\bar{X}_{(j)|1}$, приведены в табл. 7.4 и изображены на рис. 7.2.

5. Корреляционные уравнения третьего порядка. Примером корреляционных уравнений третьего порядка может служить корреляционное уравнение, выражающее зависимость предела прочности

Таблица 7.5

Статистики таблицы распределения ударной вязкости a_k и предела прочности при разрыве σ_B осевой стали

| | | |
|---|---|---|
| $m_{1 0} = +0,2149$ $m_{2 0} = 2,4475$ $m_{3 0} = +2,6650$ $m_{4 0} = 16,6018$ $m_{5 0} = +31,7320$ $m_{6 0} = 167,4286$ $m_{7 0} = +410,6043$ $m_{8 0} = 2077,3856$ | $\mu_{2 0} = 2,4013$ $\mu_{3 0} = 1,1069$ $\mu_{4 0} = 14,9831$ $\mu_{5 0} = 14,8839$ $\mu_{6 0} = 137,5674$ $\mu_{7 0} = 183,9507$ $\mu_{8 0} = 1572,8545$ | $r_{3 0} = 0,2975$ $r_{4 0} = 2,5984$ $r_{5 0} = 1,6620$ $r_{6 0} = 9,9133$ $r_{7 0} = 8,5543$ $r_{8 0} = 47,2008$ |
| $\bar{X}_1 = 8,715 \pm 0,055 \text{ кгм/см}^2$ $c_1 = 1 \text{ кгм/см}^2$ | | |
| $\sigma_1 = 1,5496 \pm 0,0390$ $v_1 = 17,78 \pm 0,46\%$ | | |
| $m_{0 1} = +0,0240$ $c_2 = 2 \text{ кг/мм}^2$ $\sigma_2 = 1,3773 \pm 0,0315$ | $m_{0 2} = 1,8976$ $\bar{X}_2 = 56,048 \pm 0,098 \text{ кг/мм}^2$ $v_2 = 4,91 \pm 0,12\%$ | $\mu_{0 2} = 1,8970$ |
| $m_{1 1} = -0,7092$ $m_{2 1} = -0,0721$ $m_{3 1} = -4,6384$ $m_{4 1} = -2,8988$ | $\mu_{1 1} = -0,7144$ $\mu_{2 1} = +0,1762$ $\mu_{3 1} = -4,7170$ $\mu_{4 1} = +0,7419$ | $r_{1 1} = -0,3347$ $r_{2 1} = +0,0533$ $r_{3 1} = -0,9204$ $r_{4 1} = +0,0934$ |
| $\eta_{21} = 0,3644,$ $a_1 = 1,5099$ $a_4 = 6,8205$ $b_1 = +0,1529$ | | |
| $a_2 = 0,5915$ $a_3 = 3,4627$ $b_2 = -0,0507$ | | |
| $a_3 = 3,0731$ $a_6 = 37,6869$ $b_3 = +0,6497$ | | |
| $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 4,2902$ | | |
| $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -0,1670$ | | |
| $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 28,5603$ | | |
| $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ a_2 & a_3 & b_2 \\ a_4 & a_5 & b_3 \end{vmatrix} = -0,0436$ | | |

при разрыве X_2 (σ_B , кг/мм²) от ударной вязкости X_1 (a_k , кгм/см²) осевой стали (табл. 1.17).

Необходимые статистики для этого случая приведены в табл. 7.5 (см. гл. II).

Установим порядок корреляционного уравнения.

Так как в рассматриваемом примере зависимости предела прочности при разрыве от ударной вязкости осевой стали имеем

$$\eta_{21} = 0,3644 \pm 0,0318, \quad r_{111} = -0,3347 \pm 0,0316,$$

то критерий линейности будет равен $\zeta_1 = 0,0209 \pm 0,0052$. Следовательно,

$$\frac{\zeta_1}{\sigma_{\zeta_1}} = 4,02;$$

это указывает на то, что зависимость предела прочности при разрыве от ударной вязкости осевой стали не может быть представлена корреляционным уравнением первого порядка.

Критерий квадратичности равен

$$\zeta_2 = 0,0054 \pm 0,0026, \quad \text{причем} \quad \zeta_2/\sigma_{\zeta_2} = 2,07.$$

Критерий кубичности равен

$$\zeta_3 = 0,011 \pm 0,0012, \quad \text{причем} \quad \zeta_3/\sigma_{\zeta_3} = 0,92.$$

Наконец, величина ζ_4 только на 0,00001 меньше ζ_3 , т. е. практически остается равной ζ_3 .

Таким образом, мы приходим к заключению, что для выражения зависимости предела прочности при разрыве от ударной вязкости осевой стали надо взять корреляционное уравнение третьего порядка.

Подставляя найденные статистики в (7.29), получим корреляционное уравнение третьего порядка в следующем виде:

$$\begin{aligned} r_{(ij)11}^{(3)} = & -0,3347\xi_{1(j)} \\ & -0,1013 - 0,0301\xi_{1(j)} + 0,1013\xi_{1(j)}^2 \\ & + 0,0116 + 0,1011\xi_{1(j)} - 0,0389\xi_{1(j)}^3 \\ & - 0,0152 - 0,0045\xi_{1(j)} + 0,0152\xi_{1(j)}^2 \\ & - 0,1049 - 0,2682\xi_{1(j)} + 0,1165\xi_{1(j)}^2 - 0,0389\xi_{1(j)}^3. \end{aligned} \quad (*)$$

Основная ошибка этого корреляционного уравнения равна

$$\sigma_{21}^{(3)} = 1,1958.$$

Для проверки правильности найденного корреляционного уравнения вычислим его по формуле (7.8).

Входящие в эту формулу определители равны:

$$\begin{aligned} D^{(3)} &= 4,2902, & D_0^{(3)} &= -0,4502, \\ D_1^{(3)} &= -1,1507, & D_2^{(3)} &= +0,4999, & D_3^{(3)} &= -0,1670. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} r_{(j)11}^{(3)} &= \frac{1}{4,2902} (-0,4502 - 1,1507\xi_{1(j)} + 0,4999\xi_{1(j)}^2 - 0,1670\xi_{1(j)}^3) = \\ &= -0,1049 - 0,2682\xi_{1(j)} + 0,1165\xi_{1(j)}^2 - 0,0389\xi_{1(j)}^3. \end{aligned}$$

Получив для величины

$$\xi_{1(j)} = \frac{x_{1(j)} - m_{1|0}}{\sigma_1} \quad (**)$$

те или иные значения, найдем соответствующие значения $r_{(j)11}^{(3)}$. Вычисления располагаются в табл. 7.6.

По значениям $r_{(j)11}^{(3)}$ находим вероятные значения предела прочности при разрыве осевой стали. Для этого применяется формула (7.14), которая в рассматриваемом случае примет вид

$$\tilde{X}_{(j)11}^{(3)} = 56,048 + 2,7546r_{(j)11}^{(3)} \quad (***)$$

с основной ошибкой

$$\bar{\sigma}_{2,1} = 2,3916.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 7.7.

Для проверки правильности найденных вероятных значений вычислим их другим способом.

Подставляя в (***) вместо $r_{(j)11}^{(3)}$ соответствующее ему выражение из (*) и заменяя $\xi_{1(j)}$ через (**), получим

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{(j)11}^{(3)} &= 56,048 + 2,7546 \left\{ -0,1049 - 0,2682 \left(\frac{X_{1(j)} - 8,7149}{1,5496} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 0,1165 \left(\frac{X_{1(j)} - 8,7149}{1,5496} \right)^2 - 0,0389 \left(\frac{X_{1(j)} - 8,7149}{1,5496} \right)^3 \right\}, \end{aligned}$$

или

$$\tilde{X}_{(j)11}^{(3)} = 89,13 - 9,3684X_{1(j)} + 0,8866X_{1(j)}^2 - 0,0288X_{1(j)}^3 \quad (:::)$$

Вычисление вероятных значений по этому уравнению приведено в табл. 7.8.

Таблица 7.6

Вычисление $r_{(j),1}^{(3)}$ по уравнению (*)

| $X_1(j)$ | $x_1(j) - m_1 0$ | $\xi_1(j)$ | $\xi_1^2(j)$ | $\xi_1^3(j)$ | $-0,1049 - 0,2682\xi_1(j) + 0,1165\xi_1^2(j) - 0,0389\xi_1^3(j) = r_{(j),1}^{(3)}$ | |
|----------|------------------|------------|--------------|--------------|--|---------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 4,5 | -4,2149 | -2,7200 | 7,3984 | -20,1236 | -0,1049 + 0,7295 + 0,8619 + 0,7828 | +2,2693 |
| 5,5 | -3,2149 | -2,0747 | 4,3044 | -8,9303 | -0,1049 + 0,5564 + 0,5015 + 0,3474 | +1,3004 |
| 6,5 | -2,2149 | -1,4293 | 2,0429 | -2,9199 | -0,1049 + 0,3833 + 0,2380 + 0,1136 | +0,6300 |
| 7,5 | -1,2149 | -0,7840 | 0,6147 | -0,4819 | -0,1049 + 0,2103 + 0,0716 + 0,0187 | +0,1957 |
| 8,5 | -0,2149 | -0,1387 | 0,0192 | -0,0027 | -0,1049 + 0,0372 + 0,0022 + 0,0001 | -0,0654 |
| 9,5 | +0,7851 | +0,5056 | 0,2566 | +0,1300 | -0,1049 - 0,1359 + 0,0299 - 0,0051 | -0,2160 |
| 10,5 | +1,7851 | +1,1520 | 1,3271 | +1,5288 | -0,1049 - 0,3090 + 0,1546 - 0,0595 | -0,3188 |
| 11,5 | +2,7851 | +1,7973 | 3,2303 | +5,8058 | -0,1049 - 0,4820 + 0,3763 - 0,2258 | -0,4364 |
| 12,5 | +3,7851 | +2,4426 | 5,9663 | +14,5733 | -0,1049 - 0,6551 + 0,6951 - 0,5669 | -0,6318 |

На рис. 7.3 изображены наблюдаемые условные средние значения предела прочности при разрыве осевой стали (кружки) и

Таблица 7.7

Наблюдаемые условные средние значения $\bar{X}_{(j)|1}$ и вероятные значения $\tilde{X}_{(j)|1}^{(3)}$ предела прочности при разрыве осевой стали

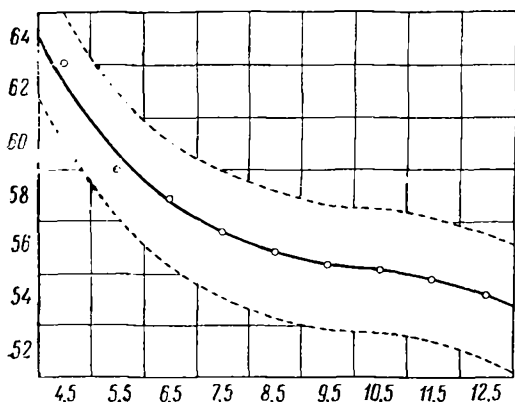


Рис. 7.3. Зависимость предела прочности при разрыве от ударной вязкости осевой стали.

| $X_{1(j)}$ | $\bar{X}_{(j) 1}$ | $\tilde{X}_{(j) 1}^{(3)}$ |
|------------|-------------------|---------------------------|
| 4,5 | 63,00 | 62,30 |
| 5,5 | 59,00 | 59,63 |
| 6,5 | 57,87 | 57,79 |
| 7,5 | 56,59 | 56,59 |
| 8,5 | 55,84 | 55,87 |
| 9,5 | 55,45 | 55,46 |
| 10,5 | 55,18 | 55,17 |
| 11,5 | 54,87 | 54,85 |
| 12,5 | 54,25 | 54,31 |
| Σ | (512,05) | (511,97) |

вероятные значения (сплошная кривая). На этом же рисунке показана зона колебаний, ограниченная пунктирными кривыми,

Таблица 7.8

Вычисление $\tilde{X}_{(j)|1}^{(3)}$ по уравнению $\left(\begin{smallmatrix} ** \\ ** \end{smallmatrix} \right)$

| $X_{1(j)}$ | $X_{1(j)}^2$ | $X_{1(j)}^3$ | $89,13 - 9,3634X_{1(j)} + 0,8866X_{1(j)}^2 - 0,0288X_{1(j)}^3 =$ | $\tilde{X}_{(j) 1}^{(3)}$ |
|------------|--------------|--------------|--|---------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 4,5 | 20,25 | 91,125 | $89,13 - 42,1578 + 17,9536 - 2,6244$ | 62,30 |
| 5,5 | 30,25 | 166,375 | $89,13 - 51,5262 + 23,8196 - 4,7916$ | 59,63 |
| 6,5 | 42,25 | 274,625 | $89,13 - 66,8945 + 37,4588 - 7,9092$ | 57,79 |
| 7,5 | 56,25 | 421,875 | $89,13 - 70,2630 + 49,8712 - 12,1500$ | 56,59 |
| 8,5 | 72,25 | 614,125 | $89,13 - 79,5314 + 64,0568 - 17,6868$ | 55,87 |
| 9,5 | 90,25 | 857,375 | $89,13 - 88,9998 + 80,0156 - 24,6924$ | 55,45 |
| 10,5 | 110,25 | 1157,625 | $89,13 - 98,3382 + 97,7476 - 33,3396$ | 55,17 |
| 11,5 | 132,25 | 1520,875 | $89,13 - 107,7366 + 117,2528 - 43,8012$ | 54,84 |
| 12,5 | 156,25 | 1953,125 | $89,13 - 117,1050 + 138,5312 - 56,2500$ | 54,31 |

проведенными по обе стороны от сплошной кривой на расстоянии, равном основной ошибке корреляционного уравнения.

Таблица 7.9

Статистики таблицы распределения температуры (X_1) и ударной вязкости (X_2) углеродистой стали

| | | |
|---|---|---|
| $m_{1 0} = -0,1034$ $m_{2 0} = 5,6690$ $m_{3 0} = 1,0345$ $m_{4 0} = 76,0345$ $m_{5 0} = 94,5517$ $m_{6 0} = 1731,6207$ $m_{7 0} = 4223,7931$ $m_{8 0} = 47811,2069$ | $\mu_{2 0} = 5,0583$ $\mu_{3 0} = 2,6047$ $\mu_{4 0} = 76,7875$ $\mu_{5 0} = 134,0279$ $\mu_{6 0} = 1802,5145$ $\mu_{7 0} = 5501,3179$ $\mu_{8 0} = 51830,2796$ | $r_{3 0} = 0,2289$ $r_{4 0} = 3,0010$ $r_{5 0} = 2,3290$ $r_{6 0} = 13,9264$ $r_{7 0} = 18,9982$ $r_{8 0} = 79,1664$ |
| $\bar{X}_1 = 57^\circ,93$ $\sigma_1 = 2,2491$ $c_1 = 20^\circ$ | | |
| $m_{0 1} = -0,3621$ $m_{0 2} = 10,3621$, $\mu_{0 2} = 10,2310$ $c_2 = 1 \text{ кгм/см}^2$ $\bar{X}_2 = 11,1379 \text{ кгм/см}^2$ $\sigma_2 = 3,198$ | | |
| $m_{1 1} = 5,2931$ $m_{2 1} = -10,5000$ $m_{3 1} = 76,5690$ $m_{4 1} = -158,0172$ | $\mu_{1 1} = 5,2557$ $\mu_{2 1} = -7,5777$ $\mu_{3 1} = 74,4254$ $\mu_{4 1} = -99,1944$ | $r_{1 1} = 0,7396$ $r_{2 1} = -0,4681$ $r_{3 1} = 2,0453$ $r_{4 1} = -1,2120$ |
| $\eta_{21} = 0,8805$ | | |
| $a_1 = 1,9487$ $a_4 = 10,3923$ $b_1 = -0,6356$ | $a_2 = 1,4132$ $a_5 = 11,2219$ $b_2 = -0,1472$ | $a_3 = 4,8680$ $a_6 = 64,7362$ $b_3 = -2,9136$ |
| $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 7,4891$ | $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,6114$ | $\begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \end{vmatrix} = 7,1817$ $\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_5 & a_3 \end{vmatrix} = 34,7309$ |
| $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 43,2919$ | $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ a_2 & a_3 & b_2 \\ a_4 & a_5 & b_3 \end{vmatrix} = +1,3119$ | |

Сравнивая вероятные значения, вычисленные на основании корреляционного уравнения, с наблюдаемыми средними значениями, мы видим, что корреляционное уравнение третьего порядка достаточно хорошо выражает зависимость предела прочности при разрыве от ударной вязкости осевой стали.

6. Корреляционные уравнения четвертого порядка. Исследуем зависимость ударной вязкости углеродистой стали с 0,40% С от температуры (табл. 1.25).

Статистики для этого случая приведены в табл. 7.9.

Вычислим критерии корреляционных уравнений (табл. 7.10).

Таблица 7.10

Критерии корреляционных уравнений для табл. 1.25

$$\xi_1 = \eta^2 - r^2 = 0,7753 - 0,5338 = 0,2415$$

$$\sigma_{\xi_1} = 0,0645 \quad \frac{\xi_1}{\sigma_{\xi_1}} = 3,74$$

$$\xi_2 = \xi_1 - \frac{b_1^2}{a_1} = 0,2415 - 0,2073 = 0,0342$$

$$\sigma_{\xi_2} = 0,0243 \quad \frac{\xi_2}{\sigma_{\xi_2}} = 1,41$$

$$\xi_3 = \xi_2 - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}{a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}} = 0,0342 - 0,0256 = 0,0086$$

$$\sigma_{\xi_3} = 0,0122 \quad \frac{\xi_3}{\sigma_{\xi_3}} = 0,70$$

$$\xi_4 = \xi_3 - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ a_2 & a_3 & b_2 \\ a_4 & a_5 & b_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}} = 0,0086 - 0,0053 = 0,0033$$

$$\sigma_{\xi_4} = 0,0075 \quad \frac{\xi_4}{\sigma_{\xi_4}} = 0,44$$

Ввиду малой величины критерия ζ_4 мы можем принять для выражения исследуемой зависимости корреляционное уравнение четвертого порядка.

Подставляя найденные выше статистики в (7.10) и вычисляя $\sigma_{2,1}^{(h)}$ по формуле (7.18), получим

$$\begin{aligned} r_{(j)1}^{(1)} &= 0,7306\xi_{1(j)}, \quad \sigma_{2,1}^{(1)} = 2,1840; \\ r_{(j)1}^{(2)} &= 0,7306\xi_{1(j)} + \frac{-0,6356}{1,9487}(\xi_{1(j)}^2 - 0,2289\xi_{1(j)} - 1) = \\ &= 0,3262 + 0,8379\xi_{1(j)} - 0,3262\xi_{1(j)}^2, \quad \sigma_{2,1}^{(2)} = 1,6274; \\ r_{(j)1}^{(3)} &= r_{(j)1}^{(2)} + \frac{0,6114}{7,4891}\{\xi_{1(j)}^3 - 3,0010\xi_{1(j)} - 0,2289 - \\ &\quad - \frac{1,4132}{1,9487}(\xi_{1(j)}^2 - 0,2289\xi_{1(j)} - 1)\} = \\ &= +0,3262 + 0,8379\xi_{1(j)} - 0,3262\xi_{1(j)}^2 \\ &\quad - 0,0187 - 0,2449\xi_{1(j)} + 0,0816\xi_{1(j)}^3 \\ &\quad + 0,0592 + 0,0136\xi_{1(j)} - 0,0592\xi_{1(j)}^2 \\ &= \frac{0,3667 + 0,6066\xi_{1(j)} - 0,3854\xi_{1(j)}^2 + 0,0816\xi_{1(j)}^3}{\sigma_{2,1}^{(3)} = 1,5449; \\ r_{(j)1}^{(4)} &= r_{(j)1}^{(3)} + \frac{1,3119}{43,2919}\{\xi_{1(j)}^4 - 2,3290\xi_{1(j)} - 3,0010 - \\ &\quad - \frac{7,1817}{7,4891}(\xi_{1(j)}^3 - 3,0010\xi_{1(j)} - 0,2289) - \\ &\quad - \frac{34,7309}{7,4891}(\xi_{1(j)}^2 - 0,2289\xi_{1(j)} - 1)\} = \\ &= 0,3667 + 0,6066\xi_{1(j)} - 0,3854\xi_{1(j)}^2 + 0,0816\xi_{1(j)}^3 \\ &\quad - 0,0909 - 0,0706\xi_{1(j)} + 0,0303\xi_{1(j)}^4 \\ &\quad + 0,0067 + 0,0873\xi_{1(j)} - 0,0291\xi_{1(j)}^3 \\ &\quad + 0,1408 + 0,0322\xi_{1(j)} - 0,1408\xi_{1(j)}^2 \\ &= \frac{0,4233 + 0,6555\xi_{1(j)} - 0,5262\xi_{1(j)}^2 + 0,0525\xi_{1(j)}^3 + 0,0303\xi_{1(j)}^4}{\sigma_{2,1}^{(4)} = 1,5273.} \end{aligned} \quad (*)$$

Давая в этом последнем уравнении величине

$$\xi_{1(j)} = \frac{x_{1(j)} - m_{1|0}}{\sigma_1} = \frac{x_{1(j)} + 0,1034}{2,2491}$$

те или иные значения, найдем соответствующие значения условного основного момента $r_{(j)1}^{(4)}$.

Вычисления располагаются в табл. 7.11.

Таблица 7.11

Вычисление $r_{(j),1}^4$ по уравнению (*)

| $x_1(j)$ | $\xi_1(j)$ | $\xi_1^2(j)$ | $\xi_1^3(j)$ | $\xi_1^4(j)$ | $0,4233+0,6555\xi_1(j)-0,5292\xi_1^2(j)+0,0525\xi_1^3(j)+0,0303\xi_1^4(j)=r_{(j),1}^{(4)}$ | |
|----------|------------|--------------|--------------|--------------|--|---------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| -5 | -2,1771 | 4,7393 | -10,3175 | 22,4581 | 0,4233-1,4271-2,4938-0,5417+0,6805= | -3,3588 |
| -4 | -1,7325 | 3,0333 | -5,2047 | 9,0180 | -1,1357-1,5803-0,2732+0,2732= | -2,2927 |
| -3 | -1,2879 | 1,6589 | -2,1367 | 2,7523 | -0,8442-0,8729-0,1122+0,0834= | -1,3226 |
| -2 | -0,8433 | 0,7112 | -0,5997 | 0,5058 | -0,5528-0,3742-0,0315+0,0153= | -0,5199 |
| -1 | -0,3986 | 0,1589 | -0,0633 | 0,0252 | -0,2613-0,0936-0,0033+0,0008= | +0,0759 |
| 0 | 0,0460 | 0,0021 | 0,0001 | 0,0000 | +0,0302-0,0011+0,0000+0,0000= | +0,4524 |
| 1 | 0,4906 | 0,4407 | 0,1181 | 0,0579 | +0,3216-0,1267+0,0062+0,0018= | +0,6262 |
| 2 | 0,9352 | 0,8746 | 0,8179 | 0,7649 | +0,6130-0,4502+0,0429+0,0232= | +0,6422 |
| 3 | 1,3798 | 1,9044 | 2,6281 | 3,6252 | +0,9045-1,0021+0,1380+0,1098= | +0,5735 |
| 4 | 1,8245 | 3,3270 | 6,0685 | 11,0689 | +1,1960-2,7507+0,3186+0,3354= | +0,5226 |
| 5 | 2,2691 | 5,1484 | 11,6816 | 26,5019 | +1,4874-2,7091+0,6133+0,8030= | +0,6139 |
| 6 | 2,7137 | 7,3658 | 19,9908 | 54,2580 | +1,7788-3,8759+1,0495+1,6440= | +1,0197 |

По найденным условным моментам находятся вероятные значения ударной вязкости углеродистой стали с 0,40% С при данной температуре. А именно, согласно (7.14), имеем

Таблица 7.12

Наблюдаемые условные средние значения $\bar{X}_{(j)|1}$ и вероятные значения $\tilde{X}_{(j)|1}$ ударной вязкости стали

| $x_{1(j)}$ | $\bar{X}_{(j) 1}$ | $\tilde{X}_{(j) 1}$ |
|------------|-------------------|---------------------|
| -40 | 0,50 | 0,39 |
| -20 | 4,50 | 3,80 |
| 0 | 6,25 | 6,91 |
| +20 | 9,62 | 9,47 |
| +40 | 11,72 | 11,38 |
| +60 | 12,59 | 12,58 |
| +80 | 12,75 | 13,14 |
| +100 | 13,25 | 13,19 |
| +120 | 12,83 | 12,97 |
| +140 | 11,50 | 12,81 |
| +160 | 14,50 | 13,11 |
| +180 | 13,50 | 14,40 |
| Σ | (123,51) | (124,15) |

$$\tilde{X}_{(j)|1} = 11,1379 + r_{(j)|1}^{(4)} \cdot 3,1986.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 7.12.

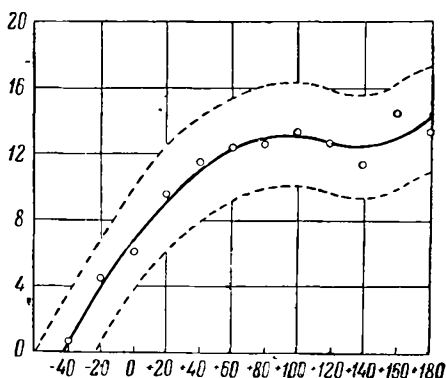


Рис. 7.4. Зависимость ударной вязкости углеродистой стали с 0,40% С от температуры.

Построив на основании вычисленных вероятных значений кривую, изображающую корреляционное уравнение четвертого порядка, и отметив кружками наблюдаемые средние значения (рис. 7.4), мы видим, что полученная кривая очень хорошо описывает процесс изменения ударной вязкости стали в зависимости от температуры.

§ 2. Вычисление корреляционных уравнений при малом числе испытаний

1. Вычисление корреляционных уравнений первого порядка. В случае малого числа испытаний наблюдаемые значения случайной величины не сводятся в разряды. Поэтому при вычислении корреляционных уравнений приходится, в виде общего правила, иметь дело с неравноотстоящими значениями исследуемых величин. Благодаря этому обычные способы нахождения нужных статистик оказываются непригодными, и возникает необходимость в построении таких приемов, которые были бы применимы в случае малого числа испытаний. Эти приемы мы рассмотрим на примерах.

Зависимость растворимости азотонатриевой соли (X_2) от изменения температуры (X_1)

| X_1 : | 0° | 4° | 10° | 15° | 21° | 23° | 36° | 51° | 68° |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| X_2 : | 66,7 | 71,0 | 76,3 | 80,5 | 85,7 | 92,9 | 99,4 | 113,5 | 125,1 |

Таблица 7.14

Схема вычисления моментов в случае неравностоящих значений случайных величин (X_1 — температура, X_2 — растворимость азотонатриевой соли)

| № | X_1 | X_2 | x_1 | x_2 | x_1^2 | x_2^2 | $x_1 x_2$ | $x_1 - x_2$ | $(x_1 - x_2)^2$ |
|----------|-------|-------|-----------------|------------------------|---------|---------|-----------|----------------------|-----------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
| 1 | 0 | 66,7 | -26 | -23,4 | 676 | 547,56 | 608,4 | -2,6 | 6,76 |
| 2 | 4 | 71,0 | -22 | -19,1 | 484 | 364,81 | 420,2 | -2,9 | 8,41 |
| 3 | 10 | 76,3 | -16 | -13,8 | 256 | 190,44 | 220,8 | -2,2 | 4,84 |
| 4 | 15 | 80,6 | -11 | -9,5 | 121 | 90,25 | 104,5 | -1,5 | 2,25 |
| 5 | 21 | 85,7 | -5 | -4,4 | 25 | 19,36 | 22,0 | -0,6 | 0,36 |
| 6 | 29 | 92,9 | +3 | +2,8 | 9 | 7,84 | 8,4 | +0,2 | 0,04 |
| 7 | 36 | 99,4 | +10 | +9,3 | 100 | 86,49 | 93,0 | +0,7 | 0,49 |
| 8 | 51 | 113,5 | +25 | +23,5 | 625 | 552,25 | 587,5 | +1,5 | 2,25 |
| 9 | 68 | 125,1 | +42 | +35,0 | 1764 | 1225,00 | 1470,0 | +7,0 | 49,00 |
| Σ | 234 | 811,3 | -80 +80 0 | -70,2 +70,5 +0,4 | 4060 | 3084,00 | 3534,8 | -9,8 +9,4 -0,4 | 74,40 |

Составим корреляционное уравнение, выражающее зависимость растворимости азотнатриевой соли (X_2) от температуры (X_1), на 100 частей воды (табл. 7.13), — пример, приводимый Менделеевым в «Основах химии»^{*}). (Растворимость — количество вещества, способного насыщать 100 частей воды.)

Представив данные табл. 7.13 на чертеже (рис. 7.5), мы видим, что растворимость азотнатриевой соли изменяется практически пропорционально изменению температуры. Поэтому исследуемая зависимость, по-видимому, может быть выражена корреляционным уравнением первого порядка.

Вычисление статистик, необходимых для составления корреляционного уравнения первого порядка, располагается по схеме табл. 7.14 (ср. табл. 2.15).

В столбце (1) этой схемы помещаются порядковые номера испытаний. В столбцах (2) и (3) выписываются наблюдаемые значения исследуемых величин. Суммы этих значений, деленные на число испытаний, дают средние значения этих величин. В рассматриваемом случае

$$\bar{X}_1 = \frac{234}{9} = 26, \quad \bar{X}_2 = \frac{811,3}{9} = 90,1.$$

В столбцах (4) и (5) помещаются отклонения каждого из наблюдаемых значений величин от их средних значений. Содержание остальных столбцов схемы ясно из заголовков.

На основании итогов столбцов (6), (7) и (8) схемы имеем

$$\mu_{210} = \frac{4060}{9} = 451,11, \quad \mu_{012} = \frac{3084,00}{9} = 342,67, \quad \mu_{111} = \frac{3534,8}{9} = 392,76.$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = \sqrt{451,11} = 21,239, \quad \sigma_2 = \sqrt{342,67} = 18,512,$$

$$r_{111} = \frac{392,76}{21,239 \cdot 18,512} = \frac{392,76}{393,18} = +0,999.$$

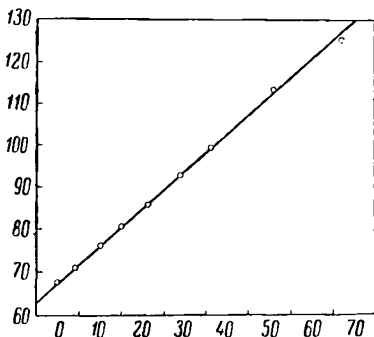


Рис. 7.5. Зависимость растворимости X_2 азотнатриевой соли от температуры X_1 .

^{*}) Д. И. Менделеев, Основы химии, т. I, 12 изд., Л., 1934, стр. 389.

Последние два столбца схемы служат для проверки вычислений.

Разделив сумму столбца (10) на число испытаний, получим второй центральный момент разности двух величин

$$\mu_2(d) = \frac{74,40}{9} = 8,27.$$

Применяя затем формулу

$$\mu_{2(d)} = \mu_{2|0} + \mu_{0|2} - 2\mu_{1|1},$$

[см. (2 95)], находим

$$451,11 + 342,67 - 785,52 = 8,26.$$

Таким образом, вычисления произведены правильно.

Для определения порядка корреляционного уравнения вычислим критерий линейности и его основную ошибку:

$$\xi_1 = 1 - (0,999)^2 = 0,002, \quad \sigma_{\xi_1} = \sqrt{\frac{0,002}{9}} = 0,014.$$

Отношение этих величин $\xi_1/\sigma_{\xi_1} = 0,14$ подтверждает сделанное предположение, что зависимость растворимости азотнатриевой соли от температуры является линейной.

Корреляционное уравнение, выражающее эту зависимость, имеет вид

$$\tilde{X}_{(j)|1} = 90,1 + 0,999 \frac{18,512}{21,239} (X_{1(j)} - 26) = 67,5 + 0,87 X_{1(j)}$$

с основной ошибкой

$$\sigma_{2,1} = 18,512 \sqrt{1 - (0,999)^2} = 0,83.$$

Полученное уравнение точно совпадает с уравнением, установленным Менделеевым.

Вероятные значения азотнатриевой соли $\tilde{X}_{(j)|1}$, вычисленные по этому уравнению при данных значениях температуры $X_{1(j)}$, приведены в табл. 7.15. Сравнивая их с наблюдаемыми значениями $X_{(j)|1}$, мы видим между ними практически полное совпадение: прямая линия, изображающая корреляционное уравнение, проходит очень близко к наблюдаемым точкам (рис. 7.5).

2. Вычисление корреляционных уравнений второго порядка. Рассмотрим результаты динамического обжаривания медных цилиндров ($h_0 = 13$ мм, $d_0 = 8$ мм) ударом падающей стальной бабы весом 3,820 кг (по данным Н. А. Шапошникова). Эти результаты

приведены в табл. 7.16, где X_1 — абсолютное остающееся обжатие цилиндрика (мм), X_2 — полная энергия бабы, поглощенная цилиндриком (кгм).

Данные табл. 7.16 изображены на рис. 7.6. Из этого рисунка видно, что связь между изучаемыми величинами не является линейной.

Для установления корреляционного уравнения найдем необходимые статистики [столбцы (4) — (11) табл. 7.16].

В рассматриваемом случае средние значения изучаемых величин равны

$$\bar{X}_1 = 4,33 \text{ мм}, \quad \bar{X}_2 = 9,653 \text{ кгм}.$$

Взяв отклонения x_1 и x_2 от этих средних значений, образуем столбцы с заголовками x_1^2 , x_2^2 , x_1x_2 , x_1^3 , x_1^4 , $x_1^2x_2$. Суммы чисел этих столбцов, деленные на число испытаний, дадут соответствующие центральные моменты, при помощи которых находятся основные моменты (см. нижнюю строку табл. 7.16).

Таблица 7.15
Растворимость
азотнатриевой соли
(наблюдаемая $\bar{X}_{(j)|1}$ и вычисленная по корреляционному уравнению $\tilde{X}_{(j)|1}$)

| $X_1 (j)$ | $\bar{X}_{(j) 1}$ | $\tilde{X}_{(j) 1}$ |
|-----------|-------------------|---------------------|
| 0 | 66,7 | 67,5 |
| 4 | 71,0 | 71,0 |
| 10 | 76,3 | 76,2 |
| 15 | 80,6 | 80,6 |
| 21 | 85,7 | 85,8 |
| 29 | 92,9 | 92,7 |
| 36 | 99,4 | 98,8 |
| 51 | 113,6 | 111,9 |
| 68 | 125,1 | 126,7 |
| Σ | (811,3) | (811,2) |

На основании этих статистик найдем величины a_1 и b_1 и критерии корреляционных уравнений (табл. 7.17) и прежде всего приходим к заключению,

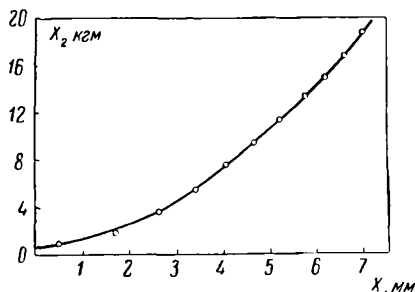


Рис. 7.6. Зависимость полной энергии бабы, поглощенной медным цилиндриком X_2 , от абсолютно остающегося обжатия цилиндрика X_1 .

что для выражения связи между изучаемыми величинами надо остановиться на корреляционном уравнении второго порядка. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} r_{(j)|1}^{(2)} &= 0,9807\xi_{1(j)} + \frac{0,1898}{0,8590}(\xi_{1(j)}^2 + 0,4462\xi_{1(j)} - 1) = \\ &= -0,2105 + 1,0746\xi_{1(j)} + 0,2105\xi_{1(j)}^2, \end{aligned}$$

Таблица 7.16
 Схема вычисления моментов в случае неравноотстоящих значений случайных величин (пример — результаты динамического обогащения медных цилиндриков ударом падающей стальной бабы)

| № | X_1 | X_2 | x_1 | x_2 | x_1^2 | x_2^2 | $x_1 x_2$ | x_1^3 | x_1^4 | $x_1^2 x_2$ |
|----------|--------------------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) |
| 1 | 0,54 | 0,957 | -3,70 | -8,696 | 14,3641 | 75,6204 | +32,9578 | -54,4399 | 206,3274 | -124,9102 |
| 2 | 1,68 | 1,916 | -2,65 | -7,737 | 7,0225 | 59,8812 | +20,5030 | -18,6096 | 48,3155 | -54,3331 |
| 3 | 2,60 | 3,830 | -1,73 | -5,823 | 2,9929 | 33,9073 | +10,0738 | -5,1777 | 8,9575 | -17,4277 |
| 4 | 3,42 | 5,743 | -0,91 | -3,910 | 0,8281 | 15,2881 | +3,5581 | -0,7536 | 0,6857 | -3,2379 |
| 5 | 4,04 | 7,655 | -0,29 | -1,998 | 0,0841 | 3,9920 | +0,3794 | -0,0244 | 0,0071 | -0,1680 |
| 6 | 4,64 | 9,568 | +0,31 | +0,085 | 0,0931 | 0,0072 | -0,0264 | +0,0298 | 0,0092 | -0,0082 |
| 7 | 5,22 | 11,480 | +0,89 | +1,827 | 0,7921 | 3,3379 | +5,1972 | +0,7050 | 0,6274 | +1,4472 |
| 8 | 5,72 | 13,392 | +1,39 | +3,739 | 1,9321 | 13,9801 | +1,6260 | +2,6856 | 3,7330 | +7,2241 |
| 9 | 6,18 | 15,304 | +1,85 | +5,651 | 3,4225 | 31,9338 | +10,4544 | +6,8316 | 11,7135 | +19,3405 |
| 10 | 6,59 | 17,215 | +2,26 | +7,562 | 5,1076 | 57,1838 | +17,0901 | +11,5432 | 26,0876 | +38,6237 |
| 11 | 6,99 | 19,127 | +2,66 | +9,474 | 7,0756 | 89,7567 | +25,2008 | +18,8211 | 50,0641 | +67,0342 |
| Σ | 47,62 | 106 187 | -9,37 | -28,249 | 43,7177 | 384,8685 | -0,0264 | -79,0052 | 357,5280 | -200,0851 |
| | | | +9,36 | +28,253 | | | +127,2406 | +40,1163 | | +133,6697 |
| | $\bar{X}_1 = 4,33$ | $\bar{X}_2 = 9,653$ | -0,01 | +0,004 | $\mu_{210} = 3,9743$ | $\mu_{012} = 34,9880$ | $\mu_{111} = 11,5649$ | $\mu_{310} = -3,5353$ | $\mu_{410} = 32,5025$ | $\mu_{211} = -6,0378$ |
| | | | | | $\sigma_1 = 1,9936$ | $\sigma_2 = 5,9151$ | $r_{111} = +0,9807$ | $r_{310} = -0,4462$ | $r_{410} = 2,0577$ | $r_{211} = -0,2568$ |
| | | | $m_{110} = -0,00010$ | $m_{011} = +0,00004$ | | | | | | |

или

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{(j)11} &= 9,653 + 5,9151 \left\{ -0,2105 + 1,0746 \left(\frac{X_{1(j)} - 4,33}{1,9936} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 0,2105 \left(\frac{X_{1(j)}^2 - 8,66X_{1(j)} + 18,7489}{3,9743} \right) \right\} = \\ &= 0,4805 + 0,4732X_{1(j)} + 0,3135X_{1(j)}^2.\end{aligned}$$

Таблица 7.17

Величины a_1 и b_1 и критерии корреляционных уравнений
(пример — результаты динамического обжатия медных
цилиндров ударом падающей стальной бабы)

$$\begin{aligned}a_1 &= 2,0577 - (-0,4462)^2 - 1 = 0,8590, \\ b_1 &= -0,2568 - 0,9807 \cdot (-0,4462) = +0,1808, \\ \xi_1 &= 1 - (0,9807)^2 = 0,0382, \quad \sigma_{\xi_1} = 0,0618, \quad \frac{\xi_1}{\sigma_{\xi_1}} = 0,62, \\ \xi_2 &= 0,0382 - \frac{(0,1808)^2}{0,8590} = 0,0001, \quad \sigma_{\xi_2} = 0,0033, \quad \frac{\xi_2}{\sigma_{\xi_2}} = 0,03\end{aligned}$$

Вероятные значения полной энергии бабы, вычисленные на основании этого уравнения, приведены в последнем столбце табл. 7.18.

Таблица 7.18

Результаты динамического обжатия
медных цилиндров

| N_i | X_1 | \bar{X}_2 | \bar{X}_3 |
|----------|-------|-------------|-------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) |
| 1 | 0,54 | 0,957 | 0,827 |
| 2 | 1,68 | 1,916 | 2,160 |
| 3 | 2,60 | 3,830 | 3,830 |
| 4 | 3,42 | 5,743 | 5,766 |
| 5 | 4,04 | 7,655 | 7,509 |
| 6 | 4,64 | 9,568 | 9,426 |
| 7 | 5,22 | 11,480 | 11,493 |
| 8 | 5,72 | 13,392 | 13,444 |
| 9 | 6,18 | 15,304 | 15,378 |
| 10 | 6,59 | 17,215 | 17,214 |
| 11 | 6,99 | 19,127 | 19,106 |
| Σ | — | (106,187) | (106,153) |

3. Вычисление корреляционных уравнений третьего порядка. Составим корреляционное уравнение, выражающее изменение сжатия на 100 объемов происходящего раствора спирта и воды в зависимости от процентного содержания спирта в растворе при 0° С (табл. 7.19). Данные, приведенные в табл. 7.19, получены и исследованы Менделеевым в его труде «О соединении спирта с водою» *).

Представив эти данные на чертеже (рис. 7.7), мы видим, что между сжатием раствора (X_2) с процентным содержанием спирта (X_1) имеется нелинейная зависимость.

Для установления порядка корреляционного уравнения, выражающего рассматриваемую зависимость, применим способ Чебышева.

Найдем сначала средние наблюдаемых значений изу-

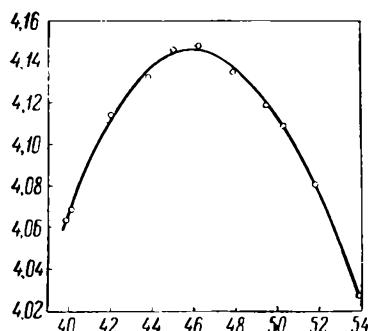


Рис. 7.7. Изменение сжатия X_2 раствора спирта и воды в зависимости от процентного содержания X_1 спирта в растворе.

Таблица 7.19

Зависимость сжатия раствора спирта и воды от процентного содержания спирта в растворе при 0° С

| № | Количество спирта по весу, X_1 , % | Сжатие раствора при 0°, $\bar{X}_{(j) 11}$ |
|----------|--------------------------------------|--|
| (1) | (2) | (3) |
| 1 | 39,9 | 4,0638 |
| 2 | 40,1 | 4,0692 |
| 3 | 42,0 | 4,1138 |
| 4 | 43,8 | 4,1330 |
| 5 | 45,0 | 4,1459 |
| 6 | 45,7 | 4,1495 |
| 7 | 46,2 | 4,1478 |
| 8 | 47,9 | 4,1349 |
| 9 | 49,5 | 4,1189 |
| 10 | 50,3 | 4,1092 |
| 11 | 51,8 | 4,0814 |
| 12 | 53,9 | 4,0285 |
| Σ | 556,1 | 49,2959 |

чаемых величин. Разделив итоги столбцов (2) и (3) табл. 7.19 на число наблюдений, получим

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n} = 46,34167, \quad \bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n} = 4,10799.$$

*) Д. И. Менделеев, 1865, стр. 88 (VII, 2).

В исследованиях Менделеева каждое значение X_2 представляет среднее из трех определений сжатия раствора при данном значении процентного содержания спирта в растворе X_1 .

Применение трехкратной повторности эксперимента крайне важно при научных исследованиях, так как при этом не только происходит уменьшение основной ошибки среднего значения, но и становится более точной оценка этой основной ошибки. См. Р. А. Фишер, 1958, стр. 105 (II).

На основании средних значений определим начальные значения $X_{1(a)}$ и $X_{2(a)}$, относительно которых и будем производить вычисления моментов, необходимых для установления корреляционного уравнения. Чем ближе к соответствующим средним значениям будут взяты начальные значения, тем проще оказываются все дальнейшие вычисления. При этом начальное значение $X_{1(a)}$ надо брать таким, чтобы отклонения $x_{1(j)} = X_{1(j)} - X_{1(a)}$ ограничивались двумя цифрами. Тогда при нахождении степеней этих отклонений можно воспользоваться таблицей степеней натуральных чисел (табл. XXV). Что же касается отклонений $x_{2(j)} = X_{2(j)} - X_{2(a)}$, то они берутся с той же точностью, как и наблюдаемые данные.

Вычисление моментов располагается по схеме табл. 7.20.

При установлении корреляционного уравнения первого порядка заполняются первые шесть столбцов этой схемы. На основании итогов этих столбцов находим

$$\begin{aligned} m_{1|0} &= \frac{\sum x_1}{n} = +0,04167, & m_{0|1} &= \frac{\sum x_2}{n} = -0,00001, \\ m_{2|0} &= \frac{\sum x_1^2}{n} = 18,584167, & m_{0|2} &= \frac{\sum x_2^2}{n} = 0,001394, \\ m_{1|1} &= \frac{\sum x_1 x_2}{n} = -0,02583. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mu_{2|0} &= m_{2|0} - m_{1|0}^2 = 18,582430, & \mu_{0|2} &= m_{0|2} - m_{0|1}^2 = 0,001394, \\ \sigma_1 &= \sqrt{\mu_{2|0}} = 4,3107, & \sigma_2 &= \sqrt{\mu_{0|2}} = 0,0373, \\ r_{1|1} &= \frac{m_{1|1} - m_{1|0}m_{0|1}}{\sigma_1\sigma_2} = -0,1606. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения \bar{X}_1 , \bar{X}_2 , σ_1 , σ_2 , $r_{1|1}$ в (7.23), получим корреляционное уравнение первого порядка для выражения зависимости сжатия раствора от процентного содержания спирта:

$$\tilde{X}_{(j)|1} = 4,17240 - 0,00139X_{1(j)}.$$

Для оценки линейности рассматриваемой зависимости вычислим критерий линейности (7.21). Имеем $\xi_1 = 1 - (-0,1606)^2 = 0,9742$ с основной ошибкой

$$\sigma_{\xi_1} = \sqrt{\frac{0,9742}{12}} = 0,2850.$$

Так как $\frac{\xi_1}{\sigma_{\xi_1}} = 3,418$, то мы не можем признать линейность связи между изучаемыми величинами. Необходимо, следовательно, перейти к уравнениям более высокого порядка.

Таблица 7.20

Схема вычисления моментов в случае неравноотстоящих значений случайных величин
(пример — изменение сжатия раствора спирта и воды в зависимости от процентного содержания спирта в растворе)

| № | x_1 | x_2 | x_1^2 | x_2^2 | $x_1 x_2$ | x_1^3 | x_1^4 | $x_1^2 x_2$ | x_1^5 | x_1^6 | $x_1^3 x_2$ |
|----------|-------|---------|---------|----------|-----------|----------|---------|-------------|----------|---------|-------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) | (12) |
| 1 | -6,4 | -0,0442 | 40,96 | 0,001954 | +0,28288 | -262,144 | 1677,72 | -1,81043 | -10737,4 | 68719 | +11,58676 |
| 2 | -6,2 | -0,0388 | 38,44 | 0,001505 | +0,24056 | -238,328 | 1477,63 | -1,49147 | -9161,3 | 56800 | +9,24713 |
| 3 | -4,3 | +0,0058 | 18,49 | 0,000034 | -0,02494 | -79,507 | 341,88 | +0,10724 | -1470,1 | 6321 | -0,46114 |
| 4 | -2,5 | +0,0250 | 6,25 | 0,000625 | -0,06250 | -15,625 | 39,06 | +0,15625 | -97,7 | 244 | -0,39062 |
| 5 | -1,3 | +0,0379 | 1,69 | 0,001436 | -0,04927 | -2,197 | 2,86 | +0,06405 | -3,7 | 5 | -0,08327 |
| 6 | -0,6 | +0,0415 | 0,36 | 0,001722 | -0,02490 | -0,216 | 0,13 | +0,01494 | -0,1 | 0 | -0,00896 |
| 7 | -0,1 | +0,0398 | 0,01 | 0,001584 | -0,00398 | -0,001 | 0,00 | +0,00040 | 0,0 | 0 | -0,00004 |
| 8 | +1,6 | +0,0269 | 2,56 | 0,000724 | +0,04304 | 4,096 | 6,55 | +0,06886 | 10,5 | 17 | +0,11018 |
| 9 | +3,2 | +0,0109 | 10,24 | 0,000119 | +0,03488 | 32,768 | 104,86 | +0,11162 | 335,5 | 1074 | +0,35717 |
| 10 | +4,0 | +0,0012 | 16,00 | 0,000001 | +0,00480 | 64,000 | 256,00 | +0,01920 | 1024,0 | 4096 | +0,07680 |
| 11 | +5,5 | -0,0266 | 30,25 | 0,000708 | -0,14630 | 166,375 | 915,06 | -0,80465 | 5032,8 | 27681 | -4,42558 |
| 12 | +7,6 | -0,0795 | 57,76 | 0,006320 | -0,60420 | 438,976 | 3336,22 | -4,59192 | 25355,3 | 192700 | -34,89859 |
| | -21,4 | -0,1891 | - | - | -0,91609 | -598,018 | - | -8,69847 | -21470,3 | - | -40,26820 |
| | +21,9 | +0,1890 | - | - | +0,60616 | +706,215 | - | +0,54256 | +31758,1 | - | +21,37804 |
| Σ | +0,5 | -0,0001 | 223,01 | 0,016732 | -0,30993 | +108,197 | 8157,97 | -8,15591 | +10287,8 | 357657 | -18,89016 |

При установлении корреляционного уравнения второго порядка требуется, в дополнение к уже найденным моментам, вычислить еще моменты $r_{3|0}$, $r_{4|0}$ и $r_{2|1}$. Для этого заполняются столбцы (7)–(9) схемы. На основании итогов этих столбцов имеем

$$m_{3|0} = \frac{\sum x_1^3}{n} = + 9,0164, \quad m_{4|0} = \frac{\sum x_1^4}{n} = 679,8308,$$

$$m_{2|1} = \frac{\sum x_1^2 x_2}{n} = - 0,6797,$$

откуда

$$\mu_{3|0} = 6,6917, \quad \mu_{4|0} = 672,52, \quad \mu_{2|1} = - 0,6773,$$

$$r_{3|0} = 0,0835, \quad r_{4|0} = 1,9650, \quad r_{2|1} = - 0,9772,$$

$$a_1 = 0,9580, \quad b_1 = - 0,9638.$$

Подставляя эти статистики в (7.25), получим корреляционное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} r_{(j)}^{(2)} &= - 0,1606\xi_{1(j)} + \frac{-0,9638}{0,9580}(\xi_{1(j)}^2 - 0,0835\xi_{1(j)} - 1) = \\ &= 1,0061 - 0,0766\xi_{1(j)} - 1,0061\xi_{1(j)}^2. \end{aligned}$$

Для оценки пригодности найденного корреляционного уравнения вычислим критерий квадратичности (7.27). Имеем

$$\zeta_2 = 0,9742 - \frac{(- 0,9638)^2}{0,9580} = 0,0046$$

с основной ошибкой $\sigma_{\zeta_2} = 0,0196$, причем $\frac{\zeta_2}{\sigma_{\zeta_2}} = 0,235$.

Сравнивая величины ζ_1 и ζ_2 и их отношения к соответствующим основным ошибкам, мы видим резкое снижение величины критерия корреляционного уравнения. Это указывает на то, что корреляционное уравнение второго порядка, по-видимому, более точно выражает зависимость сжатия раствора от процентного содержания спирта.

Имея в виду еще более точно выразить рассматриваемую зависимость, перейдем к установлению корреляционного уравнения третьего порядка.

Для этого необходимо, в дополнение к имеющимся моментам, вычислить также моменты $r_{5|0}$, $r_{6|0}$ и $r_{3|1}$. Заполнив столбцы (10)–(12) схемы, находим

$$m_{5|0} = \frac{\sum x_1^5}{n} = 857,3167, \quad m_{6|0} = \frac{\sum x_1^6}{n} = 29\,804,75,$$

$$m_{3|1} = \frac{\sum x_1^3 x_2}{n} = - 1,5742,$$

откуда

$$\begin{aligned}\mu_{5|0} &= 715,69, & \mu_{6|0} &= 29\,608, & \mu_{3|1} &= -1,4892, \\ r_{5|0} &= 0,4808, & r_{6|0} &= 4,6145, & r_{3|1} &= -0,4984, \\ a_2 &= 0,2332, & a_3 &= 0,7463, & b_2 &= -0,1828, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} &= 0,6606, & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= 0,0497,\end{aligned}$$

и корреляционное уравнение третьего порядка (7.29) будет иметь вид

$$\begin{aligned}r_{(j)}^{(3)}{}_{11} &= 1,0061 - 0,0766\xi_{1(j)} - 1,0061\xi_{1(j)}^2 + \\ &+ \frac{0,0497}{0,6606} \left\{ \xi_{1(j)}^3 - 1,9650\xi_{1(j)} - 0,0835 - \frac{0,2332}{0,9580} (\xi_{1(j)}^2 - 0,0835\xi_{1(j)} - 1) \right\},\end{aligned}$$

или

$$r_{(j)}^{(3)}{}_{11} = 1,0181 - 0,2229\xi_{1(j)} - 1,0244\xi_{1(j)}^2 + 0,0752\xi_{1(j)}^3. \quad (*)$$

Для оценки полученного корреляционного уравнения третьего порядка определим критерий кубичности (7.31). Имеем

$$\xi_3 = 0,0046 - \frac{0,0025}{0,9580 \cdot 0,6606} = 0,0046 - 0,0039 = 0,0007$$

с основной ошибкой $\sigma_{\xi_3} = 0,0076$, причем

$$\frac{\xi_3}{\sigma_{\xi_3}} = 0,092.$$

Ввиду незначительности ξ_3 мы можем остановиться на корреляционном уравнении третьего порядка (*).

Вычисление выравнивающих условных моментов по этому уравнению располагается по схеме табл. 7.21.

Для определения вероятных значений $\tilde{X}_{(j)}{}_{11}$ сжатия раствора в зависимости от процентного содержания спирта имеем, согласно (7.14), уравнение

$$\tilde{X}_{(j)}{}_{11} = 4,1080 + r_{(j)}^{(3)}{}_{11} \cdot 0,0373.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 7.22.

Представив данные этой таблицы на чертеже (рис. 7.7), мы видим, что между значениями сжатия раствора, полученными при испытаниях и вычисленными по корреляционному уравнению имеется практически полное совпадение.

Установленное корреляционное уравнение (*) дает возможность решить важную задачу о максимальном сжатии раствора.

Для этого надо взять первую производную функции

$$r_{(j)}^{(3)}{}_{11} = k_0 + k_1\xi_{1(j)} + k_2\xi_{1(j)}^2 + k_3\xi_{1(j)}^3,$$

Таблица 7.21
Схема вычисления выравнивающих условных моментов по корреляционному уравнению
третьего порядка (*)

| $X_1(j_i)$ | $x_{1(j_i)} - m_{1 0}$ | $\xi_{1(j_i)}$ | $\xi_{1(j_i)}^2$ | $\xi_{1(j_i)}^3$ | $1,0181 - 0,2229\xi_{1(j_i)} - 1,0244\xi_{1(j_i)}^2 + 0,0752\xi_{1(j_i)}^3 = r_{(j_i)}^{(3)}$ | |
|------------|------------------------|----------------|------------------|------------------|---|------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 39,9 | -6,4417 | -1,4943 | 2,2390 | -3,3347 | 1,0181 + 0,3331 | -2,2865 - 0,2508 |
| 40,1 | -6,2417 | -1,4479 | 2,0967 | -3,0360 | + 0,3227 | -2,1479 - 0,2583 |
| 42,0 | -4,3417 | -1,0072 | 1,0141 | -1,0212 | + 0,2245 | -1,0388 - 0,0768 |
| 43,8 | -2,5417 | -0,5896 | 0,3476 | -0,2050 | + 0,1314 | -0,3561 - 0,0154 |
| 45,0 | -1,3417 | -0,3112 | 0,0968 | -0,0301 | + 0,0694 | -0,0992 - 0,0023 |
| 45,7 | -0,6417 | -0,1489 | 0,0222 | -0,0033 | + 0,0332 | -0,0227 - 0,0002 |
| 46,2 | -0,1417 | -0,0329 | 0,0011 | -0,0000 | + 0,0073 | -0,0011 - 0,0000 |
| 47,9 | +1,5583 | +0,3615 | 0,1307 | +0,0472 | -0,0806 | -0,1339 + 0,0035 |
| 49,5 | +3,1583 | +0,7327 | 0,5368 | +0,3933 | -0,1633 | -0,5499 + 0,0296 |
| 50,3 | +3,9583 | +0,9183 | 0,8433 | +0,7744 | -0,2047 | -0,8639 + 0,0582 |
| 51,8 | +5,4583 | +1,2662 | 1,6028 | +2,0291 | -0,2822 | -1,6419 + 0,1526 |
| 53,9 | +7,5583 | +1,7534 | 3,0730 | +5,3870 | -0,3908 | -3,1480 + 0,4051 |
| | | | | | | -1,1861 |
| | | | | | | -1,0354 |
| | | | | | | +0,1270 |
| | | | | | | +0,7780 |
| | | | | | | +0,9860 |
| | | | | | | +1,0284 |
| | | | | | | +1,0243 |
| | | | | | | +0,8071 |
| | | | | | | +0,3345 |
| | | | | | | +0,0077 |
| | | | | | | -0,7534 |
| | | | | | | -2,1156 |

Таблица 7.22

Сжатие раствора спирта и воды,
полученное при испытаниях
и вычисленное по корреляционному
уравнению

| $X_{1(j)}$ | $\bar{X}_{(j)11}$ | $\tilde{X}_{(j)11}^{(3)}$ |
|------------|-------------------|---------------------------|
| 39,9 | 4,0638 | 4,0638 |
| 40,1 | 4,0692 | 4,0694 |
| 42,0 | 4,1138 | 4,1127 |
| 43,8 | 4,1330 | 4,1370 |
| 45,0 | 4,1459 | 4,1448 |
| 45,7 | 4,1459 | 4,1464 |
| 46,2 | 4,1478 | 4,1462 |
| 47,9 | 4,1349 | 4,1381 |
| 49,5 | 4,1189 | 4,1205 |
| 50,3 | 4,1092 | 4,1083 |
| 51,8 | 4,0814 | 4,0799 |
| 53,9 | 4,0285 | 4,0291 |
| Σ | (49,2959) | (49,2962) |

приравнять эту производную нулю и решить полученное таким образом уравнение. Имеем

$$\xi_{1(j)} = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 3k_1k_2}}{3k_3},$$

причем максимум функции получится для значения переменной $\xi_{1(j)}$, когда перед квадратным корнем будет взят знак минус.

Так как в рассматриваемом случае

$$k_1 = -0,2229, \quad k_2 = -1,0244, \quad k_3 = 0,0752,$$

то значение переменной $\xi_{1(j)}$, при котором функция $r_{(j)11}^{(3)}$ будет иметь максимум, равно

$$\xi_{1(j)} = \frac{+1,0244 - \sqrt{(1,0244)^2 + 3 \cdot 0,2229 \cdot 0,0752}}{3 \cdot 0,0752} = \frac{1,0244 - 1,0487}{0,2256} = -0,1077.$$

Подставив это значение $\xi_{1(j)}$ в корреляционное уравнение (*), находим максимальное значение $r_{(j)11}^{(3)} = 0,0301$, откуда

$$\tilde{X}_{(j)11(\max)} = 4,14642.$$

Процентное же содержание спирта в растворе, при котором происходит наибольшее сжатие при 0°, равно

$$X_{1(j)} = \bar{X}_1 + \xi_{1(j)} \cdot \sigma_1 = 46,342 - 0,1077 \cdot 4,3107 = 45,88;$$

то же самое значение получил Менделеев.

§ 3. Вычисление корреляционных уравнений при помощи чисел Чебышева

1. Числа Чебышева. Вычисление корреляционных уравнений наиболее удобно выполнять на основании условных средних значений зависимой переменной, найденных при разных значениях независимой переменной. Вычисление оказывается особенно легким в тех случаях, когда значения независимой переменной являются равноотстоящими и имеют одинаковый вес. В этих случаях, если характер зависимости между величинами неизвестен, корреляционные уравнения могут быть вычислены при помощи чисел Чебышева. Если же исследование природы изучаемой зависимости между величинами дает возможность установить порядок корреляционного уравнения, то при вычислении этих уравнений применяется способ сумм.

Заметим при этом, что независимая переменная может быть и не случайной величиной.

Установление корреляционного уравнения требуемого порядка при помощи чисел Чебышева состоит в постепенном нахождении членов *ряда Чебышева*:

$$\lambda f(x) = \frac{\sum y_l}{n} + \frac{\sum y_l \psi_1(x_l)}{\sum \psi_1^2(x_l)} \psi_1(x) + \frac{\sum y_l \psi_2(x_l)}{\sum \psi_2^2(x_l)} \psi_2(x) + \dots \\ \dots + \frac{\sum y_l \psi_\lambda(x_l)}{\sum \psi_\lambda^2(x_l)} \psi_\lambda(x), \quad (7.36)$$

или

$$\lambda f(x) = k_0 + k_1 \psi_1(x) + k_2 \psi_2(x) + \dots + k_\lambda \psi_\lambda(x). \quad (7.37)$$

В этом ряде функции $\psi_\lambda(x)$ удовлетворяют соотношению

$$\psi_{\lambda+1}(x) = \psi_1(x) \psi_\lambda(x) - \frac{\lambda^2 (n^2 - \lambda^2)}{4(2\lambda - 1)(2\lambda + 1)} \psi_{\lambda-1}(x), \quad (7.38)$$

причем

$$\psi_0(x) = 1, \quad (7.39)$$

$$\psi_1(x) = x - \frac{n+1}{2}. \quad (7.40)$$

На основании этих формул находим, в частности,

$$\left. \begin{aligned} \psi_2(x) &= \psi_1^2(x) - \frac{n^2 - 1}{12}, \\ \psi_3(x) &= \psi_1^3(x) - \frac{3n^2 - 7}{20} \psi_1(x), \\ \psi_4(x) &= \psi_1^4(x) - \frac{3n^2 - 13}{14} \psi_1^2(x) + \frac{3(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}, \\ \psi_5(x) &= \psi_1^5(x) - \frac{5(n^2 - 7)}{18} \psi_1^3(x) + \frac{15n^4 - 230n^2 + 407}{1008} \psi_1(x). \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

Каждый же коэффициент k_λ при $\psi_\lambda(x)$ в ряде (7.37) представляет сумму произведений значений зависимой переменной y_j на значения соответствующей функции $\psi_\lambda(x_j)$, деленную на сумму квадратов значений $\psi_\lambda(x)$; причем начальный член ряда k_0 равен среднему значению из наблюдаемых значений y_j :

$$k_0 = \frac{\sum y_j}{n}. \quad (7.42)$$

Для удобства вычислений корреляционных уравнений значения $\psi_\lambda(x)$ и $\sum \psi_\lambda^2(x)$ выражаются в виде *целых* чисел путем умножения $\psi_\lambda(x)$ на подходящий множитель C_λ .

Вычисление значений $\psi_\lambda(x)$ в виде целых чисел производится по формулам:

$$\left. \begin{aligned} 2\psi_1 &= -(n+1) + 2x, \\ 3\psi_2 &= \frac{3(2\psi_1)^2 - (n^2 - 1)}{4}, \\ \frac{10}{3}\psi_3 &= \frac{5 \cdot 3\psi_2 - (n^2 - 4)}{9} \cdot 2\psi_1, \\ \frac{35}{12}\psi_4 &= \frac{20 \cdot 3\psi_2 [7 \cdot 3\psi_2 - (n^2 - 16)] - 7(n^2 - 1)(n^2 - 4)}{432}, \\ \frac{21}{10}\psi_5 &= \frac{28 \cdot 3\psi_2 [3 \cdot 3\psi_2 - (n^2 - 16)] - (n^2 + 47)(n^2 - 4)}{720} \cdot 2\psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

Сумма $\sum_j \psi_\lambda^2(x_j)$ вычисляется по формуле

$$\sum_j \psi_\lambda^2(x_j) = \frac{(\lambda!)^2 n (n^2 - 1) (n^2 - 4) \dots (n^2 - \lambda^2)}{[(2\lambda - 1)!!]^2 2^{2\lambda} (2\lambda + 1)}. \quad (7.44)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} \sum_j \psi_1^2(x_j) &= \frac{n(n^2 - 1)}{2^2 \cdot 3}, \\ \sum_j \psi_2^2(x_j) &= \frac{n(n^2 - 1)(n^2 - 4)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}, \\ \sum_j \psi_3^2(x_j) &= \frac{n(n^2 - 1)(n^2 - 4)(n^2 - 9)}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7}, \\ \sum_j \psi_4^2(x_j) &= \frac{n(n^2 - 1)(n^2 - 4)(n^2 - 9)(n^2 - 16)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}, \\ \sum_j \psi_5^2(x_j) &= \frac{n(n^2 - 1)(n^2 - 4)(n^2 - 9)(n^2 - 16)(n^2 - 25)}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11}. \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

Значения $\psi_\lambda(x)$ для того или иного числа n называются *числами Чебышева*.

Таблица чисел Чебышева для значений λ от 1 до 5 и числа n от 3 до 50 приложена в конце книги (табл. XXVI). В заголовках столбцов таблицы указаны коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , при помощи которых выполняется переход от дробных к целым числам. Внизу каждого столбца приведены соответствующие значения $\sum (C_\lambda \psi_\lambda)^2$.

Для получения значений $\sum \psi_\lambda^2(x_j)$, приведенных в табл. XXVI, надо в выражения (7.45) ввести множитель C_λ^2 .

Найдем, например, $\sum \psi_\lambda^2(x_j)$ при $n = 5$:

$$\begin{aligned}\sum \psi_1^2(x_j) &= \frac{5 \cdot 24}{2^2 \cdot 3} \cdot 1^2 = 10, \\ \sum \psi_2^2(x_j) &= \frac{5 \cdot 24 \cdot 21}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} \cdot 1^2 = 14, \\ \sum \psi_3^2(x_j) &= \frac{5 \cdot 24 \cdot 21 \cdot 16}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7} \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 10, \\ \sum \psi_4^2(x_j) &= \frac{5 \cdot 24 \cdot 21 \cdot 16 \cdot 9}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} \left(\frac{35}{12}\right)^2 = 70.\end{aligned}$$

Числа Чебышева для n от 3 до 12 выписаны в табл. XXVI полностью; начиная же с $n = 13$, в целях сокращения таблицы, даны $\psi_\lambda(x)$ только для второй половины ряда x_1, x_2, \dots, x_n (т. е. для $x \geq \bar{x}$); для первой же половины ряда берутся в случае четного λ те же самые значения, а в случае нечетного λ те же значения, но с обратным знаком.

Благодаря введению исключительно *целых* чисел, необходимо для получения того или иного члена ряда Чебышева (7.37) произ-

вести умножение частного $\frac{\sum C_\lambda \psi_\lambda y_j}{\sum (C_\lambda \psi_\lambda)^2}$, найденного при помощи таблиц, на $C_\lambda \psi_\lambda(x)$, т. е. на произведение коэффициента C_λ , указанного в заголовке λ -го столбца табл. XXVI для данного значения n , на функцию $\psi_\lambda(x)$, вид которой для $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ указан выше [(7.39) — (7.41)].

Величина

$$k_\lambda = \frac{\sum C_\lambda \psi_\lambda y_j}{\sum (C_\lambda \psi_\lambda)^2} \cdot C_\lambda \quad (7.46)$$

представляет коэффициент при старшей степени x в корреляционном уравнении λ -го порядка. Умножением в (7.46) на C_λ достигается то, что как в числителе, так и в знаменателе этого выражения окажется C_λ^2 и, следовательно, влияние этого множителя будет устранено.

Основные ошибки, указывающие на степень приближения корреляционного уравнения того или иного порядка к наблюдаемым данным, вычисляются по формуле

$$\sigma_\lambda = \sqrt{\frac{\sum \lambda}{n - (\lambda + 1)}}. \quad (7.47)$$

В этой формуле сумма квадратов разностей между наблюдаемыми значениями y_j и значениями, определяемыми корреляционным уравнением данного порядка, равна

$$\sum \lambda = \sum_{\lambda-1} - \frac{(\sum C_\lambda \Phi_\lambda y_I)^2}{\sum (C_\lambda \Phi_\lambda)^2} \quad (7.48)$$

или

$$\sum \lambda = \sum_{\lambda-1} - \frac{k_\lambda^2 \cdot \sum (C_\lambda \Phi_\lambda)^2}{C_\lambda^2}, \quad (7.49)$$

причем

$$\sum_0 = \sum (y_j - \bar{y})^2 = \sum y_j^2 - \frac{(\sum y_I)^2}{n}. \quad (7.50)$$

2. Вычисление корреляционных уравнений.

Пример 1. Составим корреляционное уравнение при помощи чисел Чебышева для выражения зависимости предела прочности при разрыве (y) от ударной вязкости (X) осевой стали.

Схема вычисления корреляционных уравнений при помощи чисел Чебышева имеет вид, показанный в табл. 7.23.

В столбце (1) этой схемы выписываются значения величины X ; эти значения при вычислениях заменяются порядковыми номерами, которые принимаются за значения независимой переменной x и помещаются в столбце (2) схемы; в столбце (3) выписываются и суммируются значения зависимой переменной y ; в столбце (4) — квадраты y ; в столбцах (5), (7), (9) и (11) выписываются из табл. XXVI, для данного числа членов $n = 9$, числа $C_1\psi_1$, $C_2\psi_2$, $C_3\psi_3$, $C_4\psi_4$ и суммы квадратов этих чисел, а в столбцах (6), (8), (10) и (12) — произведения значений y на выписанные числа и суммы этих произведений.

Первые четыре столбца схемы заполняются при вычислении корреляционного уравнения нулевого порядка. С каждым повышением порядка корреляционного уравнения на единицу прибавляется по два следующих столбца.

Для сокращения вычислительной работы определим сначала *порядок корреляционного уравнения*, достаточно точно выражающего исследуемую зависимость между величинами.

Вопрос о том, на каком порядке корреляционного уравнения следует остановиться, решается путем сравнения основных ошибок корреляционных уравнений.

Таблица 7.23

Схема вычисления корреляционного уравнения при помощи чисел Чебышева
(пример — зависимость предела прочности при разрыве (y) от ударной вязкости (X) осевой стали)

| X | x | y | y^2 | $C_1\psi_1$ | $C_1\psi_2y$ | $C_1\psi_2$ | $C_2\psi_2y$ | $C_2\psi_2$ | $C_3\psi_3y$ | $C_3\psi_3$ | $C_4\psi_4$ | $C_4\psi_4y$ |
|------|-----|--------|------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|-------------|--------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) | (12) | (13) |
| 4,5 | 1 | 63,00 | 3969,0000 | -4 | -252,00 | +28 | +1764,00 | -14 | -882,00 | +14 | +882,00 | |
| 5,5 | 2 | 59,00 | 3481,0000 | -3 | -177,00 | +7 | +413,00 | +7 | +413,00 | -21 | -1239,00 | |
| 6,5 | 3 | 57,87 | 3348,9369 | -2 | -115,74 | -8 | -462,96 | +13 | +752,31 | -11 | -636,57 | |
| 7,5 | 4 | 56,59 | 3202,4281 | -1 | -56,59 | -17 | -962,03 | +9 | +509,31 | +9 | +509,31 | |
| 8,5 | 5 | 55,84 | 3118,1056 | 0 | 0 | -20 | -1116,80 | 0 | 0 | +18 | +1005,12 | |
| 9,5 | 6 | 55,45 | 3074,7025 | +1 | +55,45 | -17 | -942,65 | -9 | -499,05 | +9 | +490,05 | |
| 10,5 | 7 | 55,18 | 3044,8324 | +2 | +110,36 | -8 | -441,44 | -13 | -717,34 | -11 | -606,98 | |
| 11,5 | 8 | 54,87 | 3010,7169 | +3 | +164,61 | +7 | +334,09 | -9 | -384,09 | -21 | -1152,27 | |
| 12,5 | 9 | 54,25 | 2943,0625 | +4 | +217,00 | +28 | +1519,00 | +14 | +759,50 | +14 | +759,50 | |
| — | — | 512,05 | 29192,7849 | 60 | -53,91 | 2772 | +154,21 | 990 | -48,36 | 2002 | +11,16 | |

Основные ошибки σ_k и необходимые для их установления коэффициенты корреляционных уравнений k_k вычисляются в такой последовательности:

$$0) \quad k_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{512,05}{9} = 56,8944,$$

$$\begin{aligned} \sum_0 &= \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} = 29192,7849 - \frac{(512,05)^2}{9} = \\ &= 29192,7849 - 29132,8002 = 59,9847, \end{aligned}$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_0}{n-1}} = \sqrt{\frac{59,9847}{8}} = \sqrt{7,4981} = 2,738.$$

$$1) \quad k_1 = \frac{\sum C_1 \Psi_1 y_i}{\sum (C_1 \Psi_1)^2} \cdot C_1 = \frac{-53,91}{60} \cdot 1 = -0,8985,$$

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_0 - k_1^2 \cdot \frac{\sum (C_1 \Psi_1)^2}{C_1^2} = 59,9847 - (-0,8985)^2 \cdot \frac{60}{1^2} = \\ &= 59,9847 - 48,4381 = 11,5466, \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum_1}{n-2}} = \sqrt{\frac{11,5466}{7}} = \sqrt{1,6495} = 1,284.$$

$$2) \quad k_2 = \frac{\sum C_2 \Psi_2 y_i}{\sum (C_2 \Psi_2)^2} \cdot C_2 = \frac{+154,21}{2772} \cdot 3 = +0,1668,$$

$$\begin{aligned} \sum_2 &= \sum_1 - k_2^2 \cdot \frac{\sum (C_2 \Psi_2)^2}{C_2^2} = 11,5466 - (0,1668)^2 \cdot \frac{2772}{3^2} = \\ &= 11,5466 - 8,5692 = 2,9774, \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum_2}{n-3}} = \sqrt{\frac{2,9774}{6}} = \sqrt{0,4962} = 0,704.$$

$$3) \quad k_3 = \frac{\sum C_3 \Psi_3 y_i}{\sum (C_3 \Psi_3)^2} \cdot C_3 = \frac{-48,36}{990} \cdot \frac{5}{6} = -0,0407,$$

$$\begin{aligned} \sum_3 &= \sum_2 - k_3^2 \cdot \frac{\sum (C_3 \Psi_3)^2}{C_3^2} = 2,9774 - (-0,0407)^2 \cdot \frac{990}{\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \\ &= 2,9774 - 2,3615 = 0,6159, \end{aligned}$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{\sum_3}{n-4}} = \sqrt{\frac{0,6159}{5}} = \sqrt{0,1232} = 0,351.$$

$$4) \quad k_4 = \frac{\sum C_4 \Psi_4 y_i}{\sum (C_4 \Psi_4)^2} \cdot C_4 = \frac{+11,16}{2002} \cdot \frac{7}{12} = +0,00325,$$

$$\begin{aligned} \sum_4 &= \sum_3 - k_4^2 \cdot \frac{\sum (C_4 \Psi_4)^2}{C_4^2} = 0,6159 - (0,00325)^2 \cdot \frac{2002}{\left(\frac{7}{12}\right)^2} = \\ &= 0,6159 - 0,0621 = 0,5538, \end{aligned}$$

$$\sigma_4 = \sqrt{\frac{\sum_4}{n-5}} = \sqrt{\frac{0,5538}{4}} = \sqrt{0,1384} = 0,372.$$

Сравнивая основные ошибки корреляционных уравнений, мы видим, что эти ошибки значительно снижаются при переходе от корреляционного уравнения нулевого порядка к корреляционному уравнению первого, затем второго и, наконец, третьего порядка. Переход же к корреляционному уравнению четвертого порядка не вносит существенного уточнения. Следовательно, для выражения зависимости предела прочности при разрыве от ударной вязкости осевой стали мы должны остановиться на корреляционном уравнении третьего порядка

$$zf(x) = k_0 + k_1 \psi_1(x) + k_2 \psi_2(x) + k_3 \psi_3(x).$$

Найдем каждый член этого уравнения:

$$k_0 = \frac{512,05}{9} = 56,8944,$$

$$k_1 \psi_1(x) = -0,8985 \left(x - \frac{n+1}{2} \right) = -0,8985(x-5) = 4,4925 - 0,8985x,$$

$$\begin{aligned} k_2 \psi_2(x) &= +0,1668 \left[\left(x - \frac{n+1}{2} \right)^2 - \frac{n^2-1}{12} \right] = \\ &= +0,1668 \left[(x-5)^2 - \frac{80}{12} \right] = +0,1668(x^2 - 10x + 18,3333) = \\ &= 3,0580 - 1,6680x + 0,1668x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 \psi_3(x) &= -0,0407 \left[\left(x - \frac{n+1}{2} \right)^3 - \frac{3n^2-7}{20} \left(x - \frac{n+1}{2} \right) \right] = \\ &= -0,040667 \left[(x-5)^3 - \frac{236}{20}(x-5) \right] = \\ &= -0,040667(x^3 - 15x^2 + 63,2x - 66) = \\ &= 2,6840 - 2,5701x + 0,6100x^2 - 0,0407x^3. \end{aligned}$$

Складывая эти члены, получим искомое корреляционное уравнение:

$$\begin{aligned}
 &56,8944 \\
 &4,4925 - 0,8985x \\
 &3,0580 - 1,6680x + 0,1668x^2 \\
 &2,6840 - 2,5701x + 0,6100x^2 - 0,0407x^3 \\
 \hline
 &{}_3f(x) = 67,1289 - 5,1366x + 0,7768x^2 - 0,0407x^3
 \end{aligned} \quad (*)$$

Результаты вычислений по этому корреляционному уравнению приведены в табл. 7.24.

Таблица 7.24

Вероятные значения предела прочности
при разрыве осевой стали,
вычисленные по уравнению

$${}_3f(x) = 67,1289 - 5,1366x + 0,7768x^2 - 0,0407x^3$$

| X | x | $\bar{X}_{(j),1}$ | $\tilde{X}_{(j),1}$ |
|----------|-----|-------------------|---------------------|
| 4,5 | 1 | 63,00 | 62,73 |
| 5,5 | 2 | 59,00 | 59,64 |
| 6,5 | 3 | 57,87 | 57,61 |
| 7,5 | 4 | 56,59 | 56,41 |
| 8,5 | 5 | 55,84 | 55,78 |
| 9,5 | 6 | 55,45 | 55,48 |
| 10,5 | 7 | 55,18 | 55,28 |
| 11,5 | 8 | 54,87 | 54,91 |
| 12,5 | 9 | 54,25 | 54,15 |
| Σ | — | (512,05) | (511,99) |

Для проверки правильности найденных вероятных значений вычислим их иным способом.

Значения x , входящие в уравнение (*), можно рассматривать как выраженные в единицах разряда отклонения наблюдаемых значений X от начального значения X_a , равного значению, предшествующему первому значению ряда:

$$x = \frac{X - X_a}{c}.$$

В рассматриваемом примере

$$x = \frac{X - 3,5}{1}.$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = 67,1289 - 5,1366(X - 3,5) + 0,7768(X - 3,5)^2 - 0,0407(X - 3,5)^3.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, находим

$$\begin{aligned}
 \tilde{y} &= 67,1289 \\
 &+ 17,9781 - 5,1366X \\
 &+ 9,5158 - 5,4376X + 0,7768X^2 \\
 &+ 1,7450 - 1,4967X + 0,4274X^2 - 0,0407X^3 \\
 \hline
 \tilde{y} &= 96,3678 - 12,0699X + 1,2042X^2 - 0,0407X^3 \quad (**)
 \end{aligned}$$

Давая величине X значения 4,5, 5,5, ..., 12,5, получим те же самые вероятные значения предела прочности при разрыве осевой стали, как и в табл. 7.24.

Пример 2. Найдем корреляционное уравнение для выражения зависимости удлинения (y) от крепости (X) хлопчатобумажной пряжи. Здесь $n = 13$. Поэтому, учитывая замечание относительно чисел табл. XXVI для $n > 12$, мы можем расположить вычисления следующим образом (табл. 7.25).

Определим порядок корреляционного уравнения:

$$0) \quad k_0 = \frac{101,96}{13} = 7,8431,$$

$$\sum_0 = 824,7266 - \frac{(101,96)^2}{13} = 25,0465, \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{25,0465}{12}} = 1,445.$$

$$1) \quad k_1 = \frac{+66,47}{182} \cdot 1 = +0,3652,$$

$$\sum_1 = 25,0462 - (0,3652)^2 \cdot \frac{182}{1^2} = 0,7730, \quad \sigma_1 = \sqrt{\frac{0,7730}{11}} = 0,265.$$

$$2) \quad k_2 = \frac{-35,03}{2002} \cdot 1 = -0,0175,$$

$$\sum_2 = 0,7730 - (-0,0175)^2 \cdot \frac{2002}{1^2} = 0,1599, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{0,1599}{10}} = 0,126.$$

$$3) \quad k_3 = \frac{-6,36}{572} \cdot \frac{1}{6} = -0,00185,$$

$$\sum_3 = 0,1599 - (-0,00185)^2 \cdot \frac{572}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 0,0896, \quad \sigma_3 = \sqrt{\frac{0,0896}{9}} = 0,100.$$

Сравнение основных ошибок корреляционных уравнений приводит к выводу, что для выражения зависимости удлинения от крепости хлопчатобумажной пряжи следует остановиться на корреляционном уравнении второго порядка:

$${}_2f(x) = k_0 + k_1\psi_1(x) + k_2\psi_2(x).$$

Таблица 7.25
Вычисление корреляционных уравнений при помощи чисел Чебышева (пример — зависимость удлинения от крепости хлопчатобумажной пряжи)

| X | x | y | y ² | C Ψ_1 | C Ψ_2y | C Ψ_2 | C Ψ_2y | C Ψ_3 | C Ψ_3y |
|-----|-----|--------|----------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
| 125 | 1 | 5,50 | 30,2500 | -6 | -33,00 | +22 | +121,00 | -11 | -60,50 |
| 150 | 2 | 5,60 | 31,3600 | -5 | -28,00 | +11 | +61,60 | 0 | 0,00 |
| 175 | 3 | 6,33 | 40,0689 | -4 | -25,32 | +2 | +12,66 | +6 | +37,98 |
| 200 | 4 | 6,77 | 45,8329 | -3 | -20,31 | -5 | -33,85 | +8 | +54,16 |
| 225 | 5 | 7,29 | 53,1441 | -2 | -14,58 | -10 | -72,90 | +7 | +51,03 |
| 250 | 6 | 7,70 | 59,2900 | -1 | -7,70 | -13 | -100,10 | +4 | +30,80 |
| 275 | 7 | 8,06 | 64,9636 | 0 | 0,00 | -14 | -112,84 | 0 | 0,00 |
| 300 | 8 | 8,45 | 71,4025 | +1 | +8,45 | -13 | -109,85 | -4 | -33,80 |
| 325 | 9 | 8,75 | 76,5625 | +2 | +17,50 | -10 | -87,50 | -7 | -61,25 |
| 350 | 10 | 9,11 | 82,9921 | +3 | +27,33 | -5 | -45,55 | -8 | -72,88 |
| 375 | 11 | 9,40 | 88,3600 | +4 | +37,60 | +2 | +18,80 | -6 | -56,40 |
| 400 | 12 | 9,50 | 90,2500 | +5 | +47,50 | +11 | +104,50 | 0 | 0,00 |
| 425 | 13 | 9,50 | 90,2500 | +6 | +57,00 | +22 | +209,00 | +11 | +104,50 |
| — | — | 101,96 | 824,7266 | 182 | +66,47 | 2002 | -35,03 | 572 | -6,36 |

Члены этого уравнения равны:

$$k_0 = \frac{101,96}{13} = 7,8431,$$

$$k_1\psi_1(x) = +0,3652(x-7) = -2,5564 + 0,3652x,$$

$$k_2\psi_2(x) = -0,0175[(x-7)^2 - 14] = -0,6125 + 0,2450x - 0,0175x^2.$$

Складывая эти члены, получим искомое корреляционное уравнение

$${}_2f(x) = 4,6742 + 0,6102x - 0,0175x^2.$$

Давая переменной x значения 1, 2, ..., 13, найдем вероятные значения удлинения хлопчатобумажной пряжи (табл. 7.26).

Таблица 7.26

Вероятные значения удлинения хлопчатобумажной пряжи, вычисленные на основании корреляционного уравнения

$${}_2f(x) = 4,6742 + 0,6102x - 0,0175x^2$$

| x_1 | x | $\bar{x}_{(j,1)1}$ | $\tilde{x}_{(j,1)1}$ | x_1 | x | $\bar{x}_{(j,1)1}$ | $\tilde{x}_{(j,1)1}$ |
|-------|-----|--------------------|----------------------|----------|-----|--------------------|----------------------|
| 125 | 1 | 5,50 | 5,27 | 300 | 8 | 8,45 | 8,44 |
| 150 | 2 | 5,60 | 5,82 | 325 | 9 | 8,75 | 8,75 |
| 175 | 3 | 6,33 | 6,35 | 350 | 10 | 9,11 | 9,03 |
| 200 | 4 | 6,77 | 6,83 | 375 | 11 | 9,40 | 9,27 |
| 225 | 5 | 7,29 | 7,29 | 400 | 12 | 9,50 | 9,48 |
| 250 | 6 | 7,70 | 7,71 | 425 | 13 | 9,50 | 9,65 |
| 275 | 7 | 8,06 | 8,09 | | | | |
| | | | | Σ | — | 101,96 | 101,98 |

§ 4. Вычисление корреляционных уравнений по способу сумм

1. Способ сумм. В тех случаях, когда исследование природы изучаемой зависимости между случайными величинами дает возможность установить порядок корреляционного уравнения, вычисление этих уравнений особенно удобно производить по способу сумм.

При вычислении корреляционных уравнений по способу сумм наблюдаемые значения первой величины X заменяются

отклонениями этих значений от их среднего значения. Эти отклонения обозначаются через x :

$$x = \frac{X - \bar{X}}{c}, \quad (7.51)$$

а вероятные значения второй величины y обозначаются через \tilde{y} .

Решая нормальные уравнения для определения коэффициентов корреляционного уравнения [см. (7.5)], найдем, что в случае корреляционного уравнения первого порядка

$$\tilde{y}^{(1)} = a_1 + b_1 x \quad (7.52)$$

коэффициенты равны

$$a_1 = \frac{\sum y}{n}, \quad b_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2}; \quad (7.53)$$

в случае корреляционного уравнения второго порядка

$$\tilde{y}^{(2)} = a_2 + b_2 x + c_2 x^2 \quad (7.54)$$

коэффициенты равны

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{D_2} \begin{vmatrix} \sum y & \sum x^2 \\ \sum x^2 y & \sum x^4 \end{vmatrix}, \\ b_2 &= b_1, \\ c_2 &= \frac{1}{D_2} \begin{vmatrix} n & \sum y \\ \sum x^2 & \sum x^2 y \end{vmatrix}; \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

в случае корреляционного уравнения третьего порядка

$$\tilde{y}^{(3)} = a_3 + b_3 x + c_3 x^2 + d_3 x^3 \quad (7.56)$$

коэффициенты равны

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= a_2, \quad b_3 = \frac{1}{D_3} \begin{vmatrix} \sum xy & \sum x^4 \\ \sum x^3 y & \sum x^6 \end{vmatrix}, \\ c_3 &= c_2, \quad d_3 = \frac{1}{D_3} \begin{vmatrix} \sum x^2 & \sum xy \\ \sum x^4 & \sum x^3 y \end{vmatrix}; \end{aligned} \right\} \quad (7.57)$$

наконец, в случае корреляционного уравнения четвертого порядка

$$\tilde{y}^{(4)} = a_4 + b_4 x + c_4 x^2 + d_4 x^3 + e_4 x^4 \quad (7.58)$$

коэффициенты равны

$$\left. \begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{D_4} \begin{vmatrix} \sum y & \sum x^2 & \sum x^4 \\ \sum x^2 y & \sum x^4 & \sum x^6 \\ \sum x^4 y & \sum x^6 & \sum x^8 \end{vmatrix}, & b_4 = b_3, \\ c_4 &= \frac{1}{D_4} \begin{vmatrix} n & \sum y & \sum x^4 \\ \sum x^2 & \sum x^2 y & \sum x^6 \\ \sum x^4 & \sum x^4 y & \sum x^8 \end{vmatrix}, & d_4 = d_3, \\ e_4 &= \frac{1}{D_4} \begin{vmatrix} n & \sum x^2 & \sum y \\ \sum x^2 & \sum x^4 & \sum x^2 y \\ \sum x^4 & \sum x^6 & \sum x^4 y \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (7.59)$$

Величины, входящие в знаменатели этих выражений, называются определителями распределения ряда n натуральных чисел и равны

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} n & \sum x^2 \\ \sum x^2 & \sum x^4 \end{vmatrix}, & D_3 &= \begin{vmatrix} \sum x^2 & \sum x^4 \\ \sum x^4 & \sum x^6 \end{vmatrix}, \\ D_4 &= \begin{vmatrix} n & \sum x^2 & \sum x^4 \\ \sum x^2 & \sum x^4 & \sum x^6 \\ \sum x^4 & \sum x^6 & \sum x^8 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (7.60)$$

Суммы степеней отклонений от среднего значения $\sum x^2$, $\sum x^4$, $\sum x^6$, $\sum x^8$ и значения определителей D_2 , D_3 , D_4 берутся из табл. XXVII. При составлении этой таблицы суммы степеней отклонений натуральных чисел от их среднего значения вычислены по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sum x^2 &= \frac{n(n^2-1)}{12}, & \sum x^4 &= \sum x^2 \cdot \frac{3n^2-7}{20}, \\ \sum x^6 &= \sum x^2 \cdot \frac{3n^4-18n^2+31}{112}, \\ \sum x^8 &= \sum x^2 \cdot \frac{5n^6-55n^4+239n^2-381}{960}. \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

При помощи этих формул определители (7.60) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{180}, & D_3 &= \frac{n^2(n^2-1)^2(n^2-4)(n^2-9)}{33\,600}, \\ D_4 &= \frac{n^2(n^2-1)^2(n^2-4)^2(n^2-9)(n^2-16)}{7\,938\,000}. \end{aligned} \right\} \quad (7.62)$$

Вычисление корреляционных уравнений по способу сумм в значительной степени упрощается благодаря введению множителей M .

Для корреляционных уравнений первого, второго и третьего порядка множители M имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M_1^{(1)} &= \frac{1}{n}, & M_2^{(1)} &= \frac{1}{\sum x^2}; \\ M_1^{(2)} &= \frac{\sum x^4}{D_2}, & M_2^{(2)} &= \frac{\sum x^2}{D_2}, & M_3^{(2)} &= \frac{n}{D_2}; \\ M_1^{(3)} &= \frac{\sum x^6}{D_3}, & M_2^{(3)} &= \frac{\sum x^4}{D_3}, & M_3^{(3)} &= \frac{\sum x^2}{D_3}. \end{aligned} \right\} \quad (7.63)$$

В этих формулах n — число разрядов значений величины X , x — отклонения значений X от их среднего значения, D — определители распределения ряда натуральных чисел.

Таблица значений множителей M приложена в конце книги (табл. XXVIII *).

При помощи множителей M коэффициенты корреляционных уравнений находятся следующим образом.

В случае корреляционного уравнения первого порядка (7.52) коэффициенты равны

$$a_1 = M_1^{(1)} \cdot \sum y, \quad b_1 = M_2^{(1)} \cdot \sum xy, \quad (7.64)$$

в случае корреляционного уравнения второго порядка (7.54) коэффициенты равны

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= M_1^{(2)} \cdot \sum y - M_2^{(2)} \cdot \sum x^2 y, \\ b_2 &= b_1, \\ c_2 &= M_3^{(2)} \cdot \sum x^2 y - M_2^{(2)} \cdot \sum y; \end{aligned} \right\} \quad (7.65)$$

в случае корреляционного уравнения третьего порядка (7.56) коэффициенты равны

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= a_2, & b_3 &= M_1^{(3)} \cdot \sum xy - M_2^{(3)} \cdot \sum x^3 y, \\ c_3 &= c_2, & d_3 &= M_3^{(3)} \cdot \sum x^3 y - M_2^{(3)} \cdot \sum xy. \end{aligned} \right\} \quad (7.66)$$

Вычисление величин $\sum y$, $\sum xy$, $\sum x^2 y$, $\sum x^3 y$, $\sum x^4 y$, которые аналогичны начальным моментам, производится по способу сумм (см. табл. 2.6). При этом необходимо различать случаи нечетного и четного чисел разрядов значений.

*) Таблица множителей M для корреляционных уравнений первого, второго и третьего порядка и числа n от 5 до 100 приложена к статье Н. С. Четверикова, О технике вычисления параболических кривых, 1926; Н. С. Четвериков, 1963, стр. 202—209 (V).

В случае нечетного числа разрядов значений X , — когда начальное значение совпадает с серединой центрального разряда, — эти суммы легко получаются из формулы

$$s_h = \sum_{j=1}^k \frac{x_j(x_j-1) \dots (x_j-h+1)}{h!} y_j. \quad (7.67)$$

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \sum y &= s_0, & \sum xy &= d_1, & \sum x^2y &= 2s_2 + s_1, \\ \sum x^3y &= 6d_3 + 6d_2 + d_1, \\ \sum x^4y &= 24s_4 + 36s_3 + 14s_2 + s_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.68)$$

[Ср. (2.48).]

В случае же четного числа разрядов значений X , — когда начальное значение берется на границе между двумя разрядами, ближайшими к центру, — формула (7.67) принимает вид

$$s'_h = \sum_{j=1}^k \frac{\left(x_j + \frac{1}{2}\right) \left(x_j - \frac{1}{2}\right) \dots \left(x_j - h + \frac{3}{2}\right)}{h!} y_j, \quad (7.69)$$

откуда находим

$$\left. \begin{aligned} \sum y &= s'_0, & \sum xy &= d'_1 - \frac{1}{2} d'_0, & \sum x^2y &= 2s'_2 + \frac{1}{4} s'_0, \\ \sum x^3y &= 3(2d'_3 + d'_2) + \frac{1}{4} \left(d'_1 - \frac{1}{2} d'_0\right), \\ \sum x^4y &= 24(s'_4 + s'_3) + 5s'_2 + \frac{1}{16} s'_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

В этих формулах s , d и s' , d' представляют суммы и разности соответствующих столбцов таблиц сумм.

2. Вычисление корреляционных уравнений в случае нечетного числа разрядов значений. Переходя к вычислению корреляционных уравнений по способу сумм, рассмотрим сначала случай нечетного числа разрядов значений.

В качестве примера составим корреляционное уравнение третьего порядка для выражения зависимости предела прочности при разрыве (y) от ударной вязкости (x) осевой стали. Вычисления располагаются в следующей таблице (табл. 7.27). Из табл. 7.27 имеем

$$\begin{aligned} \sum y &= s_0 = 512,05, & \sum xy &= d_1 = -53,91, \\ \sum x^2y &= 2s_2 + s_1 = 2 \cdot 1158,16 + 1148,75 = 3465,07, \\ \sum x^3y &= 6d_3 + 6d_2 + d_1 = \\ &= 6 \cdot (-39,13) + 6 \cdot (-67,58) + (-53,91) = -694,17. \end{aligned}$$

Таблица 7.27

Схема вычисления корреляционного уравнения третьего порядка по способу сумм (число разрядов значений нечетное). (Зависимость предела прочности при разрыве от ударной вязкости осевой стали)

| X | x | y | (1) | (2) | (3) | (4) | x + 1 | (x + 1) ³ y |
|------|----|--------|---------|---------|--------|-------|------------|------------------------|
| 4,5 | -4 | 63,00 | 63,00 | 63,00 | 63,00 | 63,00 | -3 | -1701,00 |
| 5,5 | -3 | 59,00 | 122,00 | 185,00 | 248,00 | — | -2 | -472,00 |
| 6,5 | -2 | 57,87 | 179,87 | 364,87 | — | — | -1 | -57,87 |
| 7,5 | -1 | 56,59 | 236,46 | — | — | — | 0 | 0 |
| 8,5 | 0 | 55,84 | — | — | — | — | +1 | +55,84 |
| 9,5 | +1 | 55,45 | 219,75 | — | — | — | +2 | +443,60 |
| 10,5 | +2 | 55,18 | 164,30 | 327,67 | — | — | +3 | +1489,86 |
| 11,5 | +3 | 54,87 | 109,12 | 163,37 | 217,62 | — | +4 | +3511,68 |
| 12,5 | +4 | 54,25 | 54,25 | 54,25 | 54,25 | 54,25 | +5 | +6781,25 |
| — | — | — | 601,33 | 612,87 | 311,00 | — | \sum_3^* | +10051,36 |
| — | — | — | 547,42 | 545,29 | 271,87 | — | — | — |
| — | s | 512,05 | 1148,75 | 1158,16 | — | — | — | — |
| — | d | — | -53,91 | -67,58 | -39,13 | — | — | — |

Проверка вычислений производится по формуле

$$\sum_3^* = \sum y + 3 \sum xy + 3 \sum x^2 y + \sum x^3 y.$$

В рассматриваемом случае

$$\sum y = 512,05$$

$$3 \sum xy = -161,73$$

$$3 \sum x^2 y = 10\,395,21$$

$$\sum x^3 y = -694,17$$

$$10\,051,36 = \sum_3^*$$

Следовательно, вычисления произведены правильно.

Применяя затем формулы (7.66) и беря значения множителей M из табл. XXVIII, находим

$$a_3 = 0,2554113 \cdot 512,05 - 0,0216450 \cdot 3465,07 = 55,7819,$$

$$b_3 = 0,1143378 \cdot (-0,5391) - 0,0082772 \cdot (-694,17) = -0,4182,$$

$$c_3 = 0,0032468 \cdot 3465,07 - 0,0216450 \cdot 512,05 = 0,1671,$$

$$d_3 = 0,0007015 \cdot (-694,17) - 0,0082772 \cdot (-53,91) = -0,0407.$$

Для проверки вычислим значения коэффициентов по формуле (7.57):

$$a_3 = \frac{512,05 \cdot 708 - 3465,07 \cdot 60}{2772} = 55,7818,$$

$$b_3 = \frac{-53,91 \cdot 9780 - (-694,17) \cdot 708}{85\,536} = -0,4182,$$

$$c_3 = \frac{9 \cdot 3465,07 - 60 \cdot 512,05}{2772} = 0,1669,$$

$$d_3 = \frac{60 \cdot (-694,17) - 708 \cdot (-53,91)}{85\,536} = -0,0407.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (7.56), получим искомое корреляционное уравнение

$$\bar{y}^{(3)} = 55,7818 - 0,4182x + 0,1669x^2 - 0,0407x^3.$$

Давая в этом уравнении отклонениям x значения $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, найдем вероятные значения предела прочности при разрыве для соответствующих значений ударной вязкости осевой стали (табл. 7.28).

Те же самые значения были получены при помощи чисел Чебышева (табл. 7.24).

Т а б л и ц а 7.28

Вероятные значения предела прочности
при разрыве осевой стали,
вычисленные по уравнению

$$\bar{y}^{(3)} = 55,7818 - 0,4182x + 0,1669x^2 - 0,0407x^3$$

| x | x | y | $\bar{y}^{(3)}$ |
|----------|-----|----------|-----------------|
| 4,5 | -4 | 63,00 | 62,73 |
| 5,5 | -3 | 59,00 | 59,64 |
| 6,5 | -2 | 57,87 | 57,61 |
| 7,5 | -1 | 56,59 | 56,41 |
| 8,5 | 0 | 55,84 | 55,78 |
| 9,5 | +1 | 55,45 | 55,49 |
| 10,5 | +2 | 55,18 | 55,29 |
| 11,5 | +3 | 54,87 | 54,93 |
| 12,5 | +4 | 54,25 | 54,17 |
| Σ | - | (512,05) | (512,05) |

3. Вычисление корреляционных уравнений в случае четного числа разрядов значений. В качестве примера вычисления корреляционного уравнения в случае четного числа разрядов значений установим корреляционное уравнение третьего порядка, выражающее

зависимость процента брака рельсов по результатам испытаний на копре от содержания кремния в стали (%) (табл. 7.29)*.

Таблица 7.29

Схема вычисления корреляционного уравнения третьего порядка по способу сумм (число разрядов значений четное)
(Зависимость процента брака рельсов по результатам испытаний на копре от содержания кремния в стали (%))

| X | x | y | (1) | (2) | (3) | (4) | 2 (x + 1) | [2 (x + 1)]² y |
|------|------|-------|--------|--------|--------|-------|---|----------------|
| 0,04 | -3,5 | 15,38 | 15,38 | 15,38 | 15,38 | 15,38 | -5 | -1922,50 |
| 0,08 | -2,5 | 7,27 | 22,65 | 38,03 | 53,41 | — | -3 | -196,29 |
| 0,12 | -1,5 | 4,38 | 27,03 | 65,06 | — | — | -1 | -4,38 |
| 0,16 | -0,5 | 3,16 | 30,19 | — | — | — | +1 | +3,16 |
| 0,20 | +0,5 | 2,93 | 20,47 | — | — | — | +3 | +79,11 |
| 0,24 | +1,5 | 4,33 | 17,54 | 38,97 | — | — | +5 | +541,25 |
| 0,28 | +2,5 | 4,99 | 13,21 | 21,43 | 29,65 | — | +7 | +1711,57 |
| 0,32 | +3,5 | 8,22 | 8,22 | 8,22 | 8,22 | 8,22 | +9 | +5992,38 |
| — | — | 30,19 | 95,25 | 118,47 | 68,79 | — | — | -2123,17 |
| — | — | 20,47 | 59,44 | 68,62 | 37,87 | — | — | +8327,47 |
| — | s' | 50,66 | 154,60 | 187,09 | — | — | Σ | 6204,30 |
| — | d' | -9,72 | -35,81 | -49,85 | -30,92 | | $\Sigma_3^* = \frac{6204,30}{8} = 775,5375$ | |

В случае четного числа разрядов значений среднее наблюдаемых значений первой величины находится на границе между двумя разрядами, расположенными в середине ряда. В рассматриваемом примере имеем

$$\frac{0,04 + 0,32}{2} = 0,18,$$

что находится на границе разрядов 0,16 и 0,20. Поэтому черта при составлении таблицы сумм проводится между этими значениями, и отклонения каждого значения от среднего значения, выраженные в единицах разряда, будут

$$\pm 0,5, \pm 1,5, \pm 2,5, \pm 3,5.$$

Самое же составление табл. 7.29 такое же, как и составление табл. 7.27.

*) А. И. Скаков, 1951, стр. 51—55 (VII, 106).

Из табл. 7.29 имеем

$$\begin{aligned}\sum y &= s'_0 = 50,66, \\ \sum xy &= d'_1 - \frac{1}{2} d'_0 = -35,81 - \frac{1}{2} \cdot (-9,72) = -30,95, \\ \sum x^2 y &= 2s'_2 + \frac{1}{4} s'_0 = 2 \cdot 187,09 + \frac{1}{4} \cdot 50,66 = 336,845, \\ \sum x^3 y &= 3(2d'_3 + d'_2) + \frac{1}{4} \left(d'_1 - \frac{1}{2} d'_0 \right) = \\ &= 3 \cdot [2(-30,92) + (-49,85)] + \frac{1}{4} \cdot \left[-35,81 - \frac{1}{2} \cdot (-9,72) \right] = \\ &= -342,8075.\end{aligned}$$

Для проверки этих сумм перенесем начальное значение на один разряд выше и, для удобства вычислений, полученные при этом отклонения $(x+1)$ умножим на 2.

Тогда можно применить формулу

$$\frac{1}{2^3} \sum [2(x+1)]^3 y = \sum y + 3 \sum xy + 3 \sum x^2 y + \sum x^3 y.$$

В рассматриваемом случае

$$\frac{1}{2^3} \sum [2(x+1)]^3 y = \frac{6204,30}{8} = 775,5375.$$

С другой стороны,

$$\begin{array}{rcl}\sum y & = & 50,66 \\ 3 \sum xy & = & -92,85 \\ 3 \sum x^2 y & = & 1160,535 \\ \sum x^3 y & = & -342,8075 \\ \hline & & 775,5375\end{array}$$

Совпадение этих результатов указывает на правильность произведенных вычислений.

Применяя затем формулы (7.66) и выписывая значения множителей M из табл. XXVIII, находим

$$\begin{aligned}a_3 &= 0,2890625 \cdot 50,66 - 0,0312500 \cdot 386,845 = 2,555, \\ b_3 &= 0,1678541 \cdot (-30,95) - 0,0155724 \cdot (-342,8075) = 0,1433, \\ c_3 &= 0,0059524 \cdot 386,845 - 0,0312500 \cdot 50,66 = 0,7195, \\ d_3 &= 0,0016835 \cdot (-342,8075) - 0,0155724 \cdot (-30,95) = -0,09515.\end{aligned}$$

Проверка производится по формулам (7.57):

$$a_3 = \frac{50,66 \cdot 388,5 - 336,845 \cdot 42}{1344} = \frac{3433,920}{1344} = 2,555,$$

$$b_3 = \frac{-30,95 \cdot 4187,625 - 312,8075 \cdot 388,5}{24\,948} = \frac{3573,720}{24\,948} = 0,1433,$$

$$c_3 = \frac{8 \cdot 386,845 - 42 \cdot 50,66}{1344} = \frac{967,040}{1344} = 0,7195,$$

$$d_3 = \frac{42 \cdot (-342,8075) + 388,5 \cdot 30,95}{24\,948} = \frac{-2363,840}{24\,948} = -0,09515.$$

Таким образом, корреляционное уравнение (7.56) для данного случая будет иметь вид

$$\tilde{y}^{(3)} = 2,555 + 0,1432x + 0,7195x^2 - 0,09515x^3.$$

Давая отклонениям x значения $\pm 0,5, \pm 1,5, \pm 2,5, \pm 3,5$, найдем вероятные значения процента брака рельсов для соответствующих значений содержания кремния в стали (табл. 7.30).

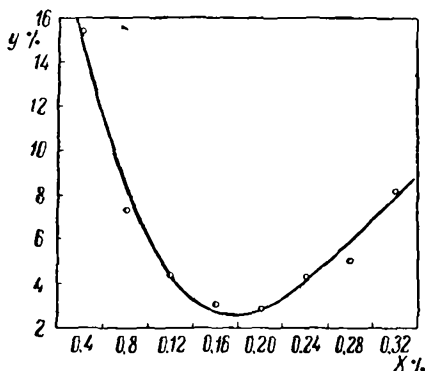


Рис. 7.8. Зависимость процента брака рельсов y от процентного содержания кремния в стали X .

Для рассматриваемого примера было составлено также корреляционное уравнение третьего порядка при помощи чисел Чебышева

$$\begin{aligned} {}_3f(x) = & 25,15 - 12,110x + \\ & + 2,0033x^2 - 0,09515x^3. \end{aligned}$$

Придавая здесь отклонениям x значения $1, 2, \dots, 8$, получим те же самые вероятные значения процента брака рельсов.

Изображение данных табл. 7.30 на чертеже (рис. 7.8) показывает хорошее согласие вероятных значений

процента брака рельсов с данными, полученными при испытаниях.

Объяснение зависимости, изображенной на рис. 7.8, заключается в следующем. С уменьшением содержания кремния в стали ниже $0,15-0,10\%$ хрупкость рельсов увеличивается вследствие недостаточной раскисленности стали. С увеличением же содержания кремния выше $0,25-0,30\%$ процент брака рельсов увеличивается вследствие увеличения твердости стали из-за легирующего действия кремния.

Т а б л и ц а 7.30

Вероятные значения процента брака рельсов,
вычисленные по корреляционному уравнению

$$\hat{y}^{(3)} = 2,555 + 0,1432x + 0,7195x^2 - 0,09515x^3$$

| x | x | y | $\hat{y}^{(3)}$ |
|----------|------|---------|-----------------|
| 0,04 | -3,5 | 15,38 | 14,95 |
| 0,08 | -2,5 | 7,27 | 8,18 |
| 0,12 | -1,5 | 4,38 | 4,28 |
| 0,16 | -0,5 | 3,16 | 2,68 |
| 0,20 | +0,5 | 2,93 | 2,79 |
| 0,24 | +1,5 | 4,33 | 4,07 |
| 0,28 | +2,5 | 4,99 | 5,92 |
| 0,32 | +3,5 | 8,22 | 7,79 |
| Σ | - | (50,66) | (50,66) |

§ 5. Вычисление корреляционных уравнений непараболического типа

1. Вычисление коэффициентов корреляционного уравнения. Корреляционные уравнения в виде полинома того или иного порядка могут быть взяты для выражения связи между случайными величинами даже и в тех случаях, когда характер изучаемой связи наперед неизвестен. Применяя способ Чебышева, мы можем определить порядок корреляционного уравнения, наиболее соответствующий графику наблюдаемой корреляционной зависимости между величинами.

В тех же случаях, когда анализ природы связи между случайными величинами дает возможность выяснить характер этой связи, тип корреляционного уравнения выбирается в полном соответствии с характером этой связи. Мы рассмотрим способы вычисления важнейших из этих типов корреляционных уравнений.

Основным способом вычисления коэффициентов корреляционных уравнений является способ наименьших квадратов. [См. § 1, п. 1]. Для этого искомое корреляционное уравнение приводится к линейному виду

$$\hat{y} = a + bx. \quad (7.71)$$

Затем из данных наблюдения стараются получить приближенные равенства

$$y_j \approx a + bx_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (7.72)$$

отыскивая коэффициенты a и b при условии, чтобы сумма квадратов разностей между левой и правой частями этих приближенных равенств

$$\sum_{j=1}^n [y_j - (a + bx_j)]^2 \quad (7.73)$$

обращалась в минимум. [Уравнения (7.72) имеют место в случае равных весов для y_j .]

Применяя обычный способ нахождения минимальных значений, получим два нормальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} an + b \sum x &= \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 &= \sum xy. \end{aligned} \right\} \quad (7.74)$$

Решая эти уравнения, находим

$$a = \frac{A}{D}, \quad b = \frac{B}{D}. \quad (7.75)$$

В знаменателе этих выражений стоит определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix}, \quad (7.76)$$

элементами которого являются коэффициенты при искомах a и b в левых частях нормальных уравнений. Определитель

$$A = \begin{vmatrix} \sum y & \sum x \\ \sum xy & \sum x^2 \end{vmatrix} \quad (7.77)$$

получается из определителя системы путем замены элементов первого столбца, т. е. коэффициентов при a , свободными членами, стоящими в правых частях нормальных уравнений, а определитель

$$B = \begin{vmatrix} n & \sum y \\ \sum x & \sum xy \end{vmatrix} \quad (7.78)$$

получается из определителя системы путем замены свободными членами элементов второго столбца, т. е. коэффициентов при b .

Составим, напримср, корреляционное уравнение (7.71) для выражения зависимости растворимости азотнатриевой соли от изменения температуры (табл. 7.13).

Вычисление определителей и коэффициентов корреляционного уравнения располагается в табл. 7.31.

Таким образом, искомое корреляционное уравнение примет вид

$$\tilde{y} = 67,5 + 0,87 x.$$

Таблица 7.31

Вычисление определителей и коэффициентов корреляционного уравнения
(пример — зависимость растворимости азотнатриевой соли
от изменения температуры)

| № | x | y | x^2 | xy | \bar{y} |
|----------|-----|-------|--------|----------|-----------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 1 | 0 | 66,7 | 0 | 0 | 67,5 |
| 2 | 4 | 71,0 | 16 | 284,0 | 71,0 |
| 3 | 10 | 76,3 | 100 | 763,0 | 76,2 |
| 4 | 15 | 80,6 | 225 | 1 209,0 | 80,6 |
| 5 | 21 | 85,7 | 441 | 1 799,7 | 85,8 |
| 6 | 29 | 92,9 | 841 | 2 694,1 | 92,7 |
| 7 | 36 | 99,4 | 1 296 | 3 578,4 | 98,8 |
| 8 | 51 | 113,6 | 2 601 | 5 793,6 | 111,9 |
| 9 | 68 | 125,1 | 4 624 | 8 506,8 | 126,7 |
| Σ | 234 | 811,3 | 10 144 | 24 628,6 | 811,2 |

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 234 \\ 234 & 10\,144 \end{vmatrix} = 9 \cdot 10\,144 - 234^2 = 36\,540,$$

$$A = \begin{vmatrix} 811,3 & 234 \\ 24\,628,6 & 10\,144 \end{vmatrix} = 811,3 \cdot 10\,144 - 24\,628,6 \cdot 234 = 2\,466\,734,8,$$

$$B = \begin{vmatrix} 9 & 811,3 \\ 234 & 24\,628,6 \end{vmatrix} = 9 \cdot 24\,628,6 - 234 \cdot 811,3 = 31\,813,2,$$

$$a = \frac{2\,466\,734,8}{36\,540} = 67,5, \quad b = \frac{31\,813,2}{36\,540} = 0,87$$

[Ср. § 2, п. 1.] Вероятные значения растворимости азотнатриевой соли, вычисленные по этому уравнению, приведены в последнем столбце табл. 7.31.

2. **Корреляционные уравнения степенного типа.** Среди корреляционных уравнений непараболического типа наиболее часто применяется *корреляционное уравнение степенного типа*

$$\bar{y} = ax^b, \quad (7.79)$$

в котором независимая переменная входит в степени, показатель которой есть параметр этого уравнения, так же как и a .

Логарифмируя это уравнение, мы можем представить его в виде

$$\lg \bar{y} = \lg a + b \lg x. \quad (7.80)$$

Коэффициенты уравнения (7.80) находятся по способу наименьших квадратов. Для этого составляются два нормальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} n \lg a + b \sum \lg x &= \sum \lg y, \\ \lg a \sum \lg x + b \sum (\lg x)^2 &= \sum \lg x \lg y. \end{aligned} \right\} \quad (7.81)$$

В этом случае имеем три определителя:

$$\left. \begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} n & \sum \lg x \\ \sum \lg x & \sum (\lg x)^2 \end{vmatrix}, \\ A &= \begin{vmatrix} \sum \lg y & \sum \lg x \\ \sum \lg x \lg y & \sum (\lg x)^2 \end{vmatrix}, \\ B &= \begin{vmatrix} n & \sum \lg y \\ \sum \lg x & \sum \lg x \lg y \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (7.82)$$

На основании этих определителей находим коэффициенты корреляционного уравнения

$$\lg a = \frac{A}{D}, \quad b = \frac{B}{D}. \quad (7.83)$$

Рассмотрим зависимость показаний влагомера y (в делениях шкалы) от толщины образца x (см) древесины бука (табл. 7.32)*.

Таблица 7.32

Схема вычисления корреляционного уравнения степенного типа
(пример — зависимость показаний влагомера (y) от толщины образца (x)
древесины бука)

| x | y | $\lg x$ | $(\lg x)^2$ | $\lg y$ | $\lg x \lg y$ | $\lg \bar{y}$ | \bar{y} |
|----------|-------|---------|-------------|---------|---------------|---------------|-----------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| 1 | 56 | 0,00000 | 0,00000 | 1,74819 | 0,00000 | 1,74830 | 56,08 |
| 3 | 28 | 0,47712 | 0,22764 | 1,44716 | 0,69047 | 1,44445 | 27,83 |
| 5 | 20 | 0,69897 | 0,48856 | 1,30103 | 0,90938 | 1,30317 | 20,09 |
| 7 | 16 | 0,84510 | 0,71419 | 1,20412 | 1,01760 | 1,20111 | 16,22 |
| 9 | 14 | 0,95424 | 0,91057 | 1,14613 | 1,09368 | 1,14050 | 13,82 |
| Σ | (134) | 2,97543 | 2,34096 | 6,84663 | 3,71113 | 6,84563 | (134,04) |

Качественный анализ явления и характер прикидочной выравнивающей кривой дают основание считать, что рассматриваемая зависимость должна выражаться уравнением (7.79).

*) Н. Л. Леонтьев, 1966, стр. 84 (VII, 106).

Вычисления располагаются по схеме табл. 7.32.

Подставляя найденные суммы

$$n = 5, \quad \sum \lg x = 2,97543, \quad \sum (\lg x)^2 = 2,34096, \\ \sum \lg y = 6,84663, \quad \sum \lg x \lg y = 3,71113$$

в определители (7.82), имеем

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2,97543 \\ 2,97543 & 2,34096 \end{vmatrix} = 2,85162, \\ A = \begin{vmatrix} 6,84663 & 2,97543 \\ 3,71113 & 2,34096 \end{vmatrix} = 4,98548, \\ B = \begin{vmatrix} 5 & 6,84663 \\ 2,97543 & 3,71113 \end{vmatrix} = -1,81602.$$

Коэффициенты (7.83) будут равны

$$\lg a = \frac{4,98548}{2,85162} = 1,74830, \quad b = \frac{-1,81602}{2,85162} = -0,63684.$$

Таким образом, корреляционное уравнение (7.80) примет вид

$$\lg \tilde{y} = 1,74830 - 0,63684 \lg x.$$

Подставляя в это уравнение наблюдаемые значения $\lg x$, получим $\lg \tilde{y}$, по которым находим \tilde{y} .

3. Корреляционные уравнения показательного типа. В тех случаях, когда скорость изменения признака y в зависимости от изменения величины x в общем пропорциональна значению этого признака y , для выражения зависимости y от x служит *корреляционное уравнение показательного типа*

$$\tilde{y} = ab^x. \quad (7.84)$$

Логарифмируя это уравнение, получим

$$\lg \tilde{y} = \lg a + x \lg b. \quad (7.85)$$

Нормальные уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} n \lg a + \lg b \sum x &= \sum \lg y, \\ \lg a \sum x + \lg b \sum x^2 &= \sum x \lg y. \end{aligned} \right\} \quad (7.86)$$

Вычислив определители

$$\left. \begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix}, \\ A &= \begin{vmatrix} \sum \lg y & \sum x \\ \sum x \lg y & \sum x^2 \end{vmatrix}, \\ B &= \begin{vmatrix} n & \sum \lg y \\ \sum x & \sum x \lg y \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (7.87)$$

находим коэффициенты корреляционного уравнения (7.85):

$$\lg a = \frac{A}{D}, \quad \lg b = \frac{B}{D}. \quad (7.88)$$

Значения сумм степеней натуральных чисел $\sum x$ и $\sum x^2$, входящих в определители (7.87), выписываются непосредственно из табл. XXIX. [Здесь $x_j = j$, $j = \overline{1, n}$. Предполагается, что этого можно добиться линейным преобразованием.]

Составим корреляционное уравнение показательного типа, выражающее зависимость предела прочности при сжатии y (σ_B , кг/см^2) от объемного веса X (γ , г/см^3) известняка (табл. 7.33)*. Для удобства вычислений значения объемного веса заменим натуральными числами, помещенными в столбце x .

Таблица 7.33

Схема вычисления корреляционного уравнения показательного типа
(пример — зависимость предела прочности при сжатии (кг/см^2)
от объемного веса (г/см^3) известняка)

| X | x | y | x^2 | $\lg y$ | $x \lg y$ | $\lg \bar{y}$ | \bar{y} |
|----------|-----|----------|-------|----------|-----------|---------------|-----------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| 1,65 | 1 | 122,7 | 1 | 2,08884 | 2,08884 | 2,06360 | 115,8 |
| 1,75 | 2 | 157,7 | 4 | 2,19783 | 4,39566 | 2,15588 | 143,2 |
| 1,85 | 3 | 181,2 | 9 | 2,25816 | 6,77448 | 2,24116 | 177,1 |
| 1,95 | 4 | 188,1 | 16 | 2,27439 | 9,09756 | 2,34044 | 219,0 |
| 2,05 | 5 | 284,3 | 25 | 2,45378 | 12,26890 | 2,43272 | 270,8 |
| 2,15 | 6 | 295,9 | 36 | 2,47114 | 14,82684 | 2,52500 | 335,0 |
| 2,25 | 7 | 415,7 | 49 | 2,61878 | 18,33146 | 2,61728 | 414,3 |
| 2,35 | 8 | 480,8 | 64 | 2,68196 | 21,45568 | 2,70956 | 512,4 |
| 2,45 | 9 | 603,8 | 81 | 2,78089 | 25,02801 | 2,80184 | 633,6 |
| 2,55 | 10 | 812,3 | 100 | 2,90972 | 29,09720 | 2,89412 | 783,7 |
| 2,65 | 11 | 1093,6 | 121 | 3,03886 | 33,42746 | 2,98640 | 969,2 |
| 2,75 | 12 | 1201,2 | 144 | 3,07962 | 36,95544 | 3,07868 | 1198,4 |
| Σ | 78 | (5937,3) | 650 | 30,85397 | 213,74753 | 30,8536* | (5772,5) |

*) М. Г. Ельчанинов, 1940, стр. 37 (VII, 106).

Из таблицы имеем

$$n = 12, \quad \sum x = 78, \quad \sum x^2 = 650, \\ \sum \lg y = 30,85397, \quad \sum x \lg y = 213,74753.$$

На основании этих сумм находим определители:

$$D = 12 \cdot 650 - 78^2 = 1716,$$

$$A = 30,85397 \cdot 650 - 213,74753 \cdot 78 = 3382,78876,$$

$$B = 12 \cdot 213,74753 - 78 \cdot 30,85397 = 158,35830.$$

Коэффициенты корреляционного уравнения будут равны

$$\lg a = \frac{3382,78876}{1716} = 1,97132, \quad \lg b = \frac{158,35830}{1716} = 0,09228.$$

Таким образом, корреляционное уравнение имеет вид

$$\lg \tilde{y} = 1,97132 + 0,09228x.$$

Давая переменной x значения 1, 2, ..., 12, находим $\lg \tilde{y}$; по этим логарифмам получим вероятные значения \tilde{y} . Эти вычисления располагаются в двух последних столбцах табл. 7.33.

Для проверки вычислений примем за x самые значения первой величины: 1,65, 1,75, ..., 2,75. В таком случае получим

$$\sum x = 26,40; \quad \sum x^2 = 59,5100; \quad \sum \lg y = 30,85397;$$

$$\sum x \lg y = 69,19843; \quad D = 17,1600; \quad A = 9,2812;$$

$$B = 15,2812; \quad \lg a = 0,54086; \quad \lg b = 0,92287,$$

и корреляционное уравнение примет вид $\lg \tilde{y} = 0,54086 + 0,92287x$. Давая в этом уравнении переменной x значения 1,65, 1,75, ..., 2,75, получим те же самые значения \tilde{y} , как и в первом случае.

Сравнение наблюдаемых значений предела прочности при сжатии известняка с вероятными значениями, вычисленными по корреляционному уравнению, показывает достаточно хорошее согласие между ними.

4. Корреляционные уравнения логарифмического типа. Корреляционные уравнения логарифмического типа имеют вид

$$\tilde{y} = a + b \lg x, \quad (7.89)$$

где переменная x — порядковый номер разряда. Член $b \lg x$ этого уравнения выражает характерное для логарифмической кривой замедляющееся изменение (возрастание или убывание) функции по мере увеличения аргумента, а постоянный член a указывает тот уровень, от которого начинается логарифмическая кривая.

Для определения коэффициентов уравнения (7.89) составляются два нормальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} an + b \sum \lg x &= \sum y, \\ a \sum \lg x + b \sum (\lg x)^2 &= \sum y \lg x. \end{aligned} \right\} \quad (7.90)$$

Вычислив определители

$$D = \begin{vmatrix} n & \sum \lg x \\ \sum \lg x & \sum (\lg x)^2 \end{vmatrix}, \quad (7.91)$$

$$A = \begin{vmatrix} \sum y & \sum \lg x \\ \sum y \lg x & \sum (\lg x)^2 \end{vmatrix}, \quad (7.92)$$

$$B = \begin{vmatrix} n & \sum y \\ \sum \lg x & \sum y \lg x \end{vmatrix}, \quad (7.93)$$

находим

$$a = \frac{A}{D}, \quad b = \frac{B}{D}. \quad (7.94)$$

Значения сумм

$$\sum \lg x, \quad \sum (x \lg x), \quad \sum (\lg x)^2$$

выписываются из табл. XXX.

Введя множители

$$L_1 = \frac{\sum (\lg x)^2}{D}, \quad L_2 = \frac{\sum \lg x}{D}, \quad L_3 = \frac{n}{D}, \quad (7.95)$$

мы можем коэффициенты уравнения (7.89) представить в виде

$$\left. \begin{aligned} a &= L_1 \cdot \sum y - L_2 \cdot \sum y \lg x, \\ b &= L_3 \cdot \sum y \lg x - L_2 \cdot \sum y. \end{aligned} \right\} \quad (7.96)$$

Значения множителей L_1, L_2, L_3 для данного числа n разрядов приведены в табл. XXXI.

В качестве примера вычислим корреляционное уравнение (7.89) для ряда, представляющего изменение средней высоты дуба в связи с изменением возраста, в нормальных дубовых семенных насаждениях I бонитета *).

Вычисления располагаются по схеме табл. 7.34.

На основании полученных сумм мы можем, применяя табл. XXX, написать нормальные уравнения (7.90) в следующем виде:

$$\begin{aligned} 15a + 12,11649b &= 406,2, \\ 12,11649a + 11,40196b &= 366,37892. \end{aligned}$$

Далее находим

$$D = 24,21983, \quad A = 192,28963, \quad B = 573,96556.$$

*) Н. В. Третьяков, 1952, стр. 512 (VII, 9).

Таблица 7.34

Схема вычисления корреляционного уравнения логарифмического типа
(пример — изменение средней высоты дуба в связи с возрастом)

| X | y | x | $\lg x$ | $y \lg x$ | \tilde{y} |
|----------|---------|-----|----------|-----------|-------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 20 | 9,3 | 1 | 0,00000 | 0,00000 | 7,94 |
| 30 | 14,1 | 2 | 0,30103 | 4,24452 | 15,07 |
| 40 | 18,3 | 3 | 0,47712 | 8,73130 | 19,25 |
| 50 | 21,8 | 4 | 0,60206 | 13,12491 | 22,21 |
| 60 | 24,2 | 5 | 0,69897 | 16,91507 | 24,50 |
| 70 | 26,3 | 6 | 0,77815 | 20,46534 | 26,33 |
| 80 | 28,1 | 7 | 0,84510 | 23,74731 | 27,97 |
| 90 | 29,6 | 8 | 0,90309 | 26,73146 | 29,34 |
| 100 | 30,9 | 9 | 0,95424 | 29,43602 | 30,55 |
| 110 | 32,0 | 10 | 1,00000 | 32,00000 | 31,64 |
| 120 | 32,9 | 11 | 1,04139 | 34,26173 | 32,62 |
| 130 | 33,7 | 12 | 1,07918 | 36,36837 | 33,57 |
| 140 | 34,4 | 13 | 1,11394 | 38,31954 | 34,34 |
| 150 | 35,0 | 14 | 1,14613 | 40,11455 | 35,10 |
| 160 | 35,6 | 15 | 1,17609 | 41,86880 | 35,81 |
| Σ | (406,2) | — | 12,11649 | 366,37892 | (406,29) |

Следовательно,

$$a = 7,94, \quad b = 23,698.$$

Для проверки вычислений найдем коэффициенты уравнения (7.89) по формулам (7.96):

$$a = 0,47077 \cdot 406,2 - 0,50027 \cdot 366,37892 = 7,94,$$

$$b = 0,61933 \cdot 366,37892 - 0,50047 \cdot 406,2 = 23,698.$$

Таким образом, искомое корреляционное уравнение будет следующим:

$$\tilde{y} = 7,94 + 23,698 \lg x.$$

Подставляя в это уравнение последовательно значения x [см. столбцы (3) и (4) схемы], найдем вероятные значения \tilde{y} высоты дуба для соответствующих значений возраста. Эти значения приведены в столбце (6) схемы. Сравнивая наблюдаемые средние значения y с вероятными значениями \tilde{y} высоты дуба, мы видим достаточно полное согласие между ними.

5. Корреляционные уравнения периодического типа. Особого рода корреляционные уравнения встречаются при исследовании некоторых периодических явлений.

Рассмотрим следующую картину. Положим, что для n равноотстоящих значений переменной x , равных

$$0, \quad 1 \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, \quad h \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, \quad (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad (7.97)$$

наблюдения дали n значений случайной величины u одинакового веса:

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_h, \dots, u_{n-1}. \quad (7.98)$$

Тогда зависимость величины u от x можно попытаться выразить уравнением

$$\tilde{u} = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (7.99)$$

В этом уравнении число неизвестных коэффициентов равно $2m + 1$. Если

$$n > 2m + 1,$$

то коэффициенты a_k и b_k находятся по способу наименьших квадратов, т. е. при условии, что

$$\sum_{h=0}^{n-1} (u_h - \tilde{u}_h)^2 \quad (7.100)$$

будет иметь наименьшее значение.

При определении коэффициентов a_k и b_k примем во внимание, что функции

$$1, \cos kx, \sin kx \quad (k = \overline{1, m}),$$

где $m \leq n/2$, составляют систему функций, ортогональных по отношению к системе равноотстоящих значений x_h из ряда (7.98):

$$\sum_{h=0}^{n-1} \cos \frac{2hk\pi}{n} \cos \frac{2hl\pi}{n} \left\{ \begin{array}{l} = 0, \quad \text{если } k \neq l, \\ = \frac{n}{2}, \quad \text{если } k = l \neq 0, \neq \frac{n}{2}, \end{array} \right. \quad (7.101)$$

и подобные же отношения, в которых один или оба косинуса заменяются синусами.

Для отыскания коэффициентов уравнения (7.99) дифференцируем (7.100) по a_k и b_k и приравниваем производную нулю. Благодаря свойству ортогональности (7.101) решение полученных нормальных уравнений оказывается очень легким. Имеем

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} u_h, \quad a_k = \frac{2}{n} \sum_{h=0}^{n-1} u_h \cos kx_h, \quad b_k = \frac{2}{n} \sum_{h=0}^{n-1} u_h \sin kx_h. \quad (7.102)$$

Простота и удобство практического применения найденных формул зависит от значения n и связанных с этим последовательных значений $\cos kx$ и $\sin kx$.

Особенно простым является случай, когда

$$n = 12.$$

В этом случае ряд наблюдений можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{2}{3}\pi & \frac{5}{6}\pi & \pi & \frac{7}{6}\pi & \frac{4}{3}\pi & \frac{3}{2}\pi & \frac{5}{3}\pi & \frac{11}{6}\pi \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} \end{array} \right\}.$$

При расположении вычислений примем во внимание, что в четырех квадрантах от 0 до 2π косинусы и синусы четыре раза принимают одни и те же абсолютные значения 0, 0,5, 0,866, 1, взятые со знаком плюс или минус. Поэтому, прежде чем умножать данные на последовательные значения $\cos kx$ и $\sin kx$, мы можем объединить эти данные в четверки; например,

$$u_1 + u_5 - u_7 - u_{11}.$$

Последовательность вычислительной работы рассмотрим на примере.

Составим корреляционное уравнение периодического типа с членами до $a_4 \cos 4x$, $b_4 \sin 4x$

(влиянием более высоких гармоник можно пренебречь) для выражения изменения средней месячной температуры воздуха в Ленинграде за 100 лет с 1816 г. по 1915 г. (табл. 7.35)*).

Прежде всего расположим наблюдаемые данные в столбцах схемы U , записывая эти данные вниз, вверх, вниз, вверх, с пропусками, обозначенными точками (табл. 7.36).

Затем эти числа сложим по строкам схемы U , составляя для каждой строки алгебраические суммы четырьмя различными способами, с учетом знаков, указанных в строках схемы знаков M . Таким образом, мы получим четыре отдельные группы итогов, которые сочетаются с косинусами и синусами 0, $\pi/6$, $\pi/3$ и $\pi/2$ в четырех отдельных схемах I, II, III и IV, приводимых в табл. 7.37.

Например, число $-25,78$, стоящее в первой строке схемы II, получилось от сложения чисел первой строки схемы U , с учетом второй строки схемы знаков M , а именно:

$$+(-8,36) - (+17,42) = -25,78.$$

Таблица 7.35

Средняя месячная температура
воздуха в Ленинграде
за 100 лет (1816—1915)

| Месяцы | $t, ^\circ$ | Месяцы | $t, ^\circ$ |
|--------|-------------|--------|-------------|
| I | -8,36 | VII | +17,42 |
| II | -8,06 | VIII | +15,79 |
| III | -4,29 | IX | +10,76 |
| IV | +2,25 | X | +4,81 |
| V | +8,87 | XI | -1,29 |
| VI | +14,62 | XII | -6,03 |

*) Климат СССР, ч. 1, «Температура воздуха», вып. 2, А, 1929, стр. 30—31.

Таблица 7.36

Схема U и схема знаков M

| | |
|--|--|
| $U = \begin{bmatrix} -8,36 + 17,42 \\ -8,06 + 14,62 + 15,79 - 6,03 \\ -4,29 + 8,87 + 10,76 - 1,29 \\ +2,25 \quad + 4,81 \end{bmatrix}$ | $M = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \end{bmatrix}$ |
|--|--|

Таблица 7.37

Схема вычисления корреляционного уравнения периодического типа

| I | | | | II | | |
|--------|--------|--------|-------|--------|---------|--------|
| | a_0 | a_2 | a_4 | | a_1 | a_3 |
| +9,06 | 0,5 | 1 | 1 | -25,78 | 1 | 1 |
| +16,32 | 0,5 | 0,5 | -0,5 | -44,50 | 0,866 | 0 |
| +14,05 | 0,5 | -0,5 | -0,5 | -25,21 | 0,5 | -1 |
| +7,06 | 0,5 | -1 | 1 | -2,56 | 0 | 0 |
| 6 | 23,245 | 3,135 | 0,935 | 6 | -76,992 | -0,570 |
| | 3,874 | 0,523 | 0,156 | | -12,832 | -0,095 |
| III | | | | IV | | |
| | b_2 | b_4 | | | b_1 | b_3 |
| -25,78 | 0 | 0 | | +9,06 | 0 | 0 |
| -0,86 | 0,866 | 0,866 | | -3,20 | 0,5 | 1 |
| -1,11 | 0,866 | -0,866 | | -4,89 | 0,866 | 0 |
| +7,06 | 0 | 0 | | -2,56 | 1 | -1 |
| 6 | -1,706 | 0,216 | | 6 | -8,395 | -0,640 |
| | -0,284 | 0,036 | | | -1,399 | -0,107 |

Умножая затем числа, стоящие в левом столбце схемы II, соответственно на 1, 0,866, 0,5 и 0, и затем складывая, получим -76,992; разделив это число на 6, найдем

$$a_1 = -12,832.$$

Определив таким образом коэффициенты уравнения (7.99), мы можем представить искомое корреляционное уравнение, выражающее изменение средней месячной температуры воздуха в Ленинграде, в виде

$$-12,832 \cos x + 0,523 \cos 2x - 0,095 \cos 3x + 0,156 \cos 4x$$

$$\bar{u} = 3,874$$

$$-1,399 \sin x - 0,284 \sin 2x - 0,107 \sin 3x + 0,036 \sin 4x.$$

Таблица 7.38

Значения $\cos kx$ и $\sin kx$ для $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \dots, \frac{11}{6}\pi$

| x | $\cos x$ | $\cos 2x$ | $\cos 3x$ | $\cos 4x$ | $\sin x$ | $\sin 2x$ | $\sin 3x$ | $\sin 4x$ |
|-------------------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{6}$ | 0,866 | 0,5 | 0 | -0,5 | 0,5 | 0,866 | 1 | 0,866 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 0,5 | -0,5 | -1 | -0,5 | 0,866 | 0,866 | 0 | -0,866 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $\frac{2}{3}\pi$ | -0,5 | -0,5 | 1 | -0,5 | 0,866 | -0,866 | 0 | 0,866 |
| $\frac{5}{6}\pi$ | -0,866 | 0,5 | 0 | -0,5 | 0,5 | -0,866 | 1 | -0,866 |
| π | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{7}{6}\pi$ | -0,866 | 0,5 | 0 | -0,5 | -0,5 | 0,866 | -1 | 0,866 |
| $\frac{4}{3}\pi$ | -0,5 | -0,5 | 1 | -0,5 | -0,866 | 0,866 | 0 | -0,866 |
| $\frac{3}{2}\pi$ | 0 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $\frac{5}{3}\pi$ | 0,5 | -0,5 | -1 | -0,5 | -0,866 | -0,866 | 0 | 0,866 |
| $\frac{11}{6}\pi$ | 0,866 | 0,5 | 0 | -0,5 | -0,5 | -0,866 | -1 | -0,866 |

Таблица 7.39

Наблюдаемые и вероятные значения
средней месячной температуры
воздуха в Ленинграде

| Месяцы | \bar{y} | \bar{y} |
|--------|-----------|-----------|
| I | -8,36 | -8,37 |
| II | -8,06 | -8,08 |
| III | -4,29 | -4,28 |
| IV | +2,25 | +2,21 |
| V | +8,87 | +8,92 |
| VI | +14,62 | +14,58 |
| VII | +17,42 | +17,48 |
| VIII | +15,79 | +15,76 |
| IX | +10,76 | +10,79 |
| X | +4,81 | +4,79 |
| XI | -1,29 | -1,30 |
| XII | -6,03 | -6,03 |

Давая в полученном уравнении переменной x значения

$$0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{3}, \dots, \frac{11}{6} \pi$$

и применяя таблицу 7.38, найдем вероятные значения \tilde{y} .

Из сопоставления вероятных значений \tilde{y} с наблюдаемыми значениями \bar{y} (табл. 7.39) видно, что полученное корреляционное уравнение очень хорошо выражает изменение средней месячной температуры воздуха в Ленинграде. Периодичность явления здесь не вызывает сомнений, так как а priori новый год должен нести с собой ту же стохастическую картину зависимости.

§ 6. Множественные корреляционные уравнения

1. Установление множественных корреляционных уравнений по способу Чебышева. При исследовании связей между многими случайными величинами составляются множественные корреляционные уравнения. Как и в случае обыкновенных корреляционных уравнений, весьма удобным способом установления множественных корреляционных уравнений является способ Чебышева.

Множественное линейное корреляционное уравнение, выражающее зависимость случайной величины X_1 от прочих случайных величин X_2, X_3, \dots, X_n , имеет следующий общий вид:

$$r_1 | (I_2) | (I_3) | \dots | (I_n) = \sum_{g=2}^n \frac{R_{g1}^{(g)} R_{g1}^{(g)*}}{R_{11}^{(g-1)} R_{11}^{(g)}} \quad (7.103)$$

с основной ошибкой

$$\frac{\sigma_{1.23\dots n}^2}{\sigma_1^2} = 1 - \sum_{g=2}^n \frac{R_{g1}^{(g)2}}{R_{11}^{(g-1)} R_{11}^{(g)}}. \quad (7.104)$$

В уравнении (7.103)

$$R^{(g)} = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1g} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2g} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{g1} & r_{g2} & r_{g3} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (7.105)$$

где r_{pq} — коэффициент корреляции для случайных величин X_p

и X_q ,

$$R^{(g)*} = \begin{vmatrix} \xi_1(I_1) & \xi_2(I_2) & \xi_3(I_3) & \cdots & \xi_g(I_g) \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2g} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \cdots & r_{3g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{g1} & r_{g2} & r_{g3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad (7.106)$$

а $R_{pq}^{(g)}$ и $R_{pq}^{(g)*}$ — миноры определителей (7.105) и (7.106), соответствующие элементу r_{pq} . Определитель $R^{(g)}$ называется *определителем корреляции*. [Ср. (3.38).]

Увеличивая последовательно число прочих случайных величин, т. е. увеличивая n , мы можем представить уравнение (7.103) в виде

$$\begin{aligned} r_{11(I_1)1(I_2)1(I_3)1(I_4)\dots} &= r_{12}\xi_{2(I_2)} + \frac{\begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ 1 & r_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{32} & 1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} \xi_2(I_2) & \xi_3(I_3) \\ 1 & r_{23} \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{\begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{32} & 1 & r_{34} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{32} & 1 & r_{34} \\ r_{42} & r_{43} & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \xi_2(I_2) & \xi_3(I_3) & \xi_4(I_4) \\ 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{32} & 1 & r_{34} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{32} & 1 \end{vmatrix}} + \dots \quad (7.107) \end{aligned}$$

с основной ошибкой

$$\frac{\sigma_{1.234\dots}^2}{\sigma_1^2} = 1 - r_{12}^2 - \frac{\begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ 1 & r_{23} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{32} & 1 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{32} & 1 & r_{34} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{32} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{32} & 1 & r_{34} \\ r_{42} & r_{43} & 1 \end{vmatrix}} - \dots \quad (7.108)$$

Остановливаясь на первом члене уравнения (7.107), получим обыкновенное корреляционное уравнение первого порядка, выражающее зависимость X_1 от X_2 :

$$r_{11(I_1)} = r_{12}\xi_{2(I_2)} \quad (7.109)$$

с основной ошибкой

$$\sigma_{1.2} = \sigma_1 \sqrt{1 - r_{12}^2}. \quad (7.110)$$

Присоединяя к первому члену уравнения (7.107) его второй член, получим множественное линейное корреляционное уравнение, выражающее зависимость X_1 от X_2 и X_3 :

$$r_{11(j_2)(j_3)} = r_{12} \xi_{2(j_2)} + \frac{\begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ 1 & r_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{32} & 1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{2(j_2)} & \xi_{3(j_3)} \\ 1 & r_{23} \end{vmatrix} \quad (7.111)$$

с основной ошибкой

$$\sigma_{1.23} = \sigma_1 \sqrt{1 - r_{12}^2 - \frac{\begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ 1 & r_{23} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{32} & 1 \end{vmatrix}}}. \quad (7.112)$$

И так далее

Множественное нелинейное корреляционное уравнение, выражающее зависимость X_3 от X_1 и X_2 , имеет следующий общий вид:

$$r_{(j_1)(j_2)11}^{(h_1, h_2)} = \sum_{g_1=1}^{h_1} \sum_{g_2=1}^{h_2} \frac{Q_{g_1, g_2}^{(g_1, g_2)} Q_{g_1, g_2}^{(g_1, g_2)*}}{Q_{g_1, g_2}^{(g_1, g_2)} - 1 Q_{g_1, g_2}^{(g_1, g_2)}}. \quad (7.113)$$

В этом уравнении

$$Q_{(g_1, g_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & r_{1|1|0} & 1 & 1 & \dots & r_{0|g_2|0} \\ 0 & 1 & r_{1|1|0} & r_{2|1|0} & r_{3|0|0} & r_{1|2|0} & \dots & r_{1|g_2|0} \\ 0 & r_{1|1|0} & 1 & r_{1|2|0} & r_{2|1|0} & r_{0|3|0} & \dots & r_{1|g_2+1|0} \\ r_{1|1|0} & r_{2|1|0} & r_{1|2|0} & r_{2|2|0} & r_{3|1|0} & r_{1|3|0} & \dots & r_{1|g_2+1|0} \\ 1 & r_{3|0|0} & r_{2|1|0} & r_{3|1|0} & r_{4|0|0} & r_{2|2|0} & \dots & r_{2|g_2|0} \\ 1 & r_{1|2|0} & r_{0|3|0} & r_{1|3|0} & r_{2|2|0} & r_{0|4|0} & \dots & r_{0|g_2+1|0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{0|g_2|0} & r_{1|g_2|0} & r_{0|g_2+1|0} & r_{1|g_2+1|0} & r_{2|g_2+2|0} & r_{0|g_2+2|0} & \dots & r_{0|2g_2|0} \end{vmatrix}, \quad (7.114)$$

где $r_{g_1|g_2|0}$ — смешанный основной момент величин X_1 и X_2 ; $Q_{(g_1, g_2)}^{(g_1, g_2)-1}$ — определитель порядка на единицу ниже, чем определитель (7.114); $Q_{g_1, g_2}^{(g_1, g_2)}$ — определитель, составленный из определителей

теля (7.114) путем замены в нем элементов последнего столбца моментами

$$0, r_{1|0|1}, r_{0|1|1}, r_{1|1|1}, r_{2|0|1}, r_{0|2|1}, \dots, r_{0|g_2|1};$$

наконец, $Q_{g_1, g_2}^{(g_1, g_2)*}$ — определитель, составленный из определителя (7.114) путем замены в нем элементов последнего столбца величинами

$$1, \xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2, \xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_2^{g_2}.$$

Основная ошибка множественного нелинейного корреляционного уравнения (7.113) равна

$$\frac{\sigma_{3.12}^{(h_1, h_2)^2}}{\sigma_3^2} = 1 - \sum_{g_1=1}^{h_1} \sum_{g_2=1}^{h_2} \frac{Q_{g_1, g_2}^{(g_1, g_2)^2}}{Q^{(g_1, g_2)-1} Q^{(g_1, g_2)}}. \quad (7.115)$$

Для упрощения вычислений корреляционного уравнения (7.113) представим его в ином виде. С этой целью введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= 1 - r_{1|1|0}^2, & \gamma_6 &= r_{4|0|0} - r_{3|0|0}^2 - 1, \\ \gamma_2 &= r_{1|2|0} - r_{2|1|0}r_{1|1|0}, & \gamma_7 &= r_{0|3|0} - r_{1|2|0}r_{1|1|0}, \\ \gamma_3 &= r_{2|2|0} - r_{2|1|0}^2 - r_{1|1|0}^2, & \gamma_8 &= r_{1|3|0} - r_{2|1|0}r_{1|2|0} - r_{1|1|0}, \\ \gamma_4 &= r_{2|1|0} - r_{1|1|0}r_{3|0|0}, & \gamma_9 &= r_{2|2|0} - r_{1|2|0}r_{3|0|0} - 1, \\ \gamma_5 &= r_{3|1|0} - r_{2|1|0}r_{3|0|0} - r_{1|1|0}, & \gamma_{10} &= r_{0|4|0} - r_{1|2|0}^2 - 1, \end{aligned} \right\} \quad (7.116)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= r_{0|1|1} - r_{1|1|0}r_{1|0|1}, \\ \delta_2 &= r_{1|1|1} - r_{2|1|0}r_{1|0|1}, \\ \delta_3 &= r_{2|0|1} - r_{3|0|0}r_{1|0|1}, \\ \delta_4 &= r_{0|2|1} - r_{1|2|0}r_{1|0|1}, \end{aligned} \right\} \quad (7.117)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2, & c_4 &= \gamma_1\gamma_8 - \gamma_2\gamma_7, \\ c_2 &= \gamma_1\gamma_5 - \gamma_2\gamma_4, & c_5 &= \gamma_1\gamma_9 - \gamma_4\gamma_7, \\ c_3 &= \gamma_1\gamma_6 - \gamma_4^2, & c_6 &= \gamma_1\gamma_{10} - \gamma_7^2, \end{aligned} \right\} \quad (7.118)$$

$$d_1 = \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1, \quad d_2 = \gamma_1\delta_3 - \gamma_4\delta_1, \quad d_3 = \gamma_1\delta_4 - \gamma_7\delta_1. \quad (7.119)$$

Применяя эти обозначения и ограничиваясь первыми пятью членами выражения (7.113) для случаев, когда $h_1 \leq 2$, $h_2 \leq 2$,

мы можем множественное корреляционное уравнение привести к виду

$$\begin{aligned}
 r_{(j)1(j)1}^{(2,2)} = & r_{1|0|1} \xi_1(j) + \frac{\delta_1}{\gamma_1} (\xi_2(j) - r_{1|1|0} \xi_1(j)) + \\
 & + \frac{d_1}{c_1} \left[\xi_1(j) \xi_2(j) - r_{2|1|0} \xi_1(j) - r_{1|1|0} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (\xi_2(j) - r_{1|1|0} \xi_1(j)) \right] + \\
 & + \frac{\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \left\{ \xi_1^2(j) - r_{3|0|0} \xi_1(j) - 1 - \frac{\gamma_4}{\gamma_1} (\xi_2(j) - r_{1|1|0} \xi_1(j)) - \right. \\
 & - \frac{c_2}{c_1} \left[\xi_1(j) \xi_2(j) - r_{2|1|0} \xi_1(j) - r_{1|1|0} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (\xi_2(j) - r_{1|1|0} \xi_1(j)) \right] \left. \right\} + \\
 & + \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & d_1 \\ c_2 & c_3 & d_2 \\ c_4 & c_5 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}} \left(\xi_2^2(j) - r_{1|2|0} \xi_1(j) - 1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (\xi_2(j) - r_{1|1|0} \xi_1(j)) - \right. \\
 & - \frac{c_4}{c_1} \left[\xi_1(j) \xi_2(j) - r_{2|1|0} \xi_1(j) - r_{1|1|0} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (\xi_2(j) - r_{1|1|0} \xi_1(j)) \right] - \\
 & - \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \left\{ \xi_1^2(j) - r_{3|0|0} \xi_1(j) - 1 - \frac{\gamma_4}{\gamma_1} (\xi_2(j) - r_{1|1|0} \xi_1(j)) - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{c_2}{c_1} \left[\xi_1(j) \xi_2(j) - r_{2|1|0} \xi_1(j) - r_{1|1|0} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (\xi_2(j) - r_{1|1|0} \xi_1(j)) \right] \right\} \right) \quad (7.120)
 \end{aligned}$$

с основной ошибкой

$$\frac{\sigma_{3.12}^{(2,2)^2}}{\sigma_3^2} = 1 - r_{1|0|1}^2 - \frac{\delta_1^2}{\gamma_1 c_1} - \frac{\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}^2}{c_1 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & d_1 \\ c_2 & c_3 & d_2 \\ c_4 & c_5 & d_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}. \quad (7.121)$$

Если в уравнении (7.120) остановимся на первом члене, то получим обыкновенное линейное корреляционное уравнение, выражающее зависимость X_3 от X_1 . [Ср. (7.19).] Присоединяя второй член, получим множественное линейное корреляционное уравнение, выражающее зависимость X_3 от X_1 и X_2 . [Ср. (7.111).] Если после этого присоединим третий член, содержащий произведение $\xi_1 \xi_2$, то получим множественное корреляционное уравнение гиперболического вида. И так далее.

Переход от условных основных моментов $r_{(j)|i(j)|1}^{(h_1, h_2)}$ к вероятным значениям $\tilde{X}_{(j)|i(j)|1}$ совершается по формуле

$$\tilde{X}_{(j)|i(j)|1} = \bar{X}_3 + r_{(j)|i(j)|1}^{(h_1, h_2)} \bar{\sigma}_3. \quad (7.122)$$

[Ср. (7.14).]

2. Вычисление множественных корреляционных уравнений. В качестве примера вычисления множественных корреляционных уравнений рассмотрим корреляционную связь между объемным весом X_1 (γ , $мг/см^3$), ударной твердостью X_2 ($H_{\text{рад}}$, $гмм/мм^2$) и пределом прочности при сжатии вдоль волокон X_3 (D , $кг/см^2$) древесины березы*). Испытанию подвергались образцы, представляющие кубики в $3 \times 3 \times 3$ см. Из каждого бруска взято по три образца, и среднее из трех испытаний отмечалось в качестве наблюдаемого значения исследуемых величин.

Установим корреляционное уравнение, выражающее зависимость предела прочности при сжатии вдоль волокон древесины березы от ее объемного веса и ударной твердости.

Ограничиваясь при этом первыми тремя членами уравнения (7.120), мы должны вычислить средние значения и основные отклонения рассматриваемых величин, а также смешанные основные моменты $r_{111|0}$, $r_{110|1}$, $r_{011|1}$, $r_{211|0}$, $r_{112|0}$, $r_{212|0}$ и $r_{111|1}$.

Результаты испытаний и все необходимые вычисления приведены в табл. 7.40.

В столбце (1) этой таблицы указаны номера испытаний, в столбцах (2)—(4) приведены значения исследуемых величин. Сложив числа каждого из этих столбцов и разделив полученные суммы на число испытаний $n = 16$, находим средние значения:

$$\bar{X}_1 = 580 \text{ мг/см}^3, \quad \bar{X}_2 = 775 \text{ гмм/мм}^2, \quad \bar{X}_3 = 739 \text{ кг/см}^2.$$

В столбцах (5)—(7) выписываются отклонения наблюдаемых значений случайных величин x_1 , x_2 , x_3 от их средних значений. Так как вычисление средних значений было произведено с точностью до единицы, то суммы столбцов (5)—(7), деленные на число испытаний (представляющие первые начальные моменты), будут показывать, какую ошибку мы допустили, остановившись на принятой точности вычислений. Имеем

$$m_{110|0} = 0,5, \quad m_{011|0} = -0,56, \quad m_{010|1} = +0,125;$$

относительная ошибка будет соответственно равна

$$\epsilon_1 = \frac{+0,5}{580} = +0,0009, \quad \epsilon_2 = \frac{-0,56}{775} = -0,0008, \quad \epsilon_3 = \frac{+0,125}{739} = +0,0002,$$

*) А. Х. Певцов, 1935, стр. 65, 69 (VII, 106).

Схема вычисления множественного корреляционного уравнения при малом вязкостью (X_2) и пределом прочности при

| № | X_1 | X_2 | X_3 | x_1 | x_2 | x_3 | x_1^2 | x_2^2 |
|----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) |
| 1 | 648 | 901 | 852 | +68 | +126 | +113 | 4624 | 15876 |
| 2 | 628 | 828 | 800 | +48 | +53 | +61 | 2304 | 2809 |
| 3 | 511 | 681 | 616 | -69 | -94 | -123 | 4761 | 8836 |
| 4 | 535 | 724 | 693 | -45 | -51 | -41 | 2025 | 2601 |
| 5 | 574 | 822 | 733 | -6 | +47 | -6 | 36 | 2209 |
| 6 | 580 | 782 | 701 | 0 | +7 | -38 | 0 | 49 |
| 7 | 654 | 904 | 865 | +74 | +129 | +126 | 5476 | 16641 |
| 8 | 576 | 738 | 727 | -4 | -37 | -12 | 16 | 1369 |
| 9 | 508 | 712 | 562 | -72 | -63 | -177 | 5184 | 3969 |
| 10 | 572 | 760 | 726 | -8 | -15 | -13 | 64 | 225 |
| 11 | 536 | 695 | 681 | -44 | -80 | -58 | 1936 | 6400 |
| 12 | 618 | 793 | 819 | +38 | +18 | +80 | 1444 | 324 |
| 13 | 571 | 746 | 721 | -9 | -29 | -18 | 81 | 841 |
| 14 | 540 | 749 | 675 | -40 | -26 | -64 | 1600 | 676 |
| 15 | 615 | 774 | 833 | +35 | -1 | +94 | 1225 | 1 |
| 16 | 622 | 782 | 817 | +42 | +7 | +78 | 1764 | 49 |
| | | | | -297 | -396 | -550 | | |
| | | | | +305 | +387 | +552 | | |
| Σ | 9288 | 12391 | 11821 | +8 | -9 | +2 | 32540 | 62875 |
| - | | | | $m_{1 0 0} =$ $= +0,5$ | $m_{0 1 0} =$ $= -0,56$ | $m_{0 0 1} =$ $= +0,125$ | $\mu_{2 0 0} =$ $= 2034$ | $\mu_{0 2 0} =$ $= 3930$ |
| - | $\bar{X}_1 =$ $= 580$ | $\bar{X}_2 =$ $= 775$ | $\bar{X}_3 =$ $= 739$ | - | - | - | $\bar{\sigma}_1 = 45$ | $\bar{\sigma}_2 = 63$ |

Таблица 7.40

числе испытаний (пример — корреляция между объемным весом (X_1), ударной сжатии вдоль волокон (X_3) древесины березы)

| x_3^2 | x_1x_2 | x_1x_3 | x_2x_3 | $x_1^2x_2$ | $x_1x_2^2$ | $x_1^2x_2^2$ | $x_1x_2x_3$ |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| (10) | (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) | (17) |
| 12769 | 8568 | 7684 | 14238 | 582624 | 1079568 | 73410624 | 968184 |
| 3721 | 2544 | 2928 | 3233 | 122112 | 134832 | 6471936 | 155184 |
| 15129 | 6486 | 8487 | 11562 | -447534 | -609684 | 42068196 | -797778 |
| 1681 | 2295 | 1845 | 2091 | -103275 | -117045 | 5267025 | -94095 |
| 36 | -282 | 36 | -282 | 1692 | -13254 | 79524 | 1692 |
| 1441 | 0 | 0 | -266 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15876 | 9546 | 9324 | 16254 | 706404 | 1231434 | 91126116 | 1202796 |
| 144 | 148 | 48 | 444 | -592 | -5476 | 21904 | -1776 |
| 31329 | 4536 | 12744 | 11151 | -326592 | -285768 | 20575296 | -802872 |
| 169 | 120 | 104 | 195 | -960 | -1800 | 14400 | -1560 |
| 3364 | 3520 | 2552 | 4640 | -154880 | -281600 | 12390400 | -204160 |
| 6400 | 684 | 3040 | 1440 | 25992 | +12312 | 467856 | 54720 |
| 324 | 261 | 162 | 522 | -2349 | -7569 | 68121 | -4698 |
| 4096 | 1040 | 2560 | 1664 | -41600 | -27040 | 1081600 | -66560 |
| 8836 | -35 | 3290 | -94 | -1225 | 35 | 1225 | -3290 |
| 6084 | 294 | 3276 | 546 | 12348 | 2058 | 86436 | 22932 |
| | -317 | - | -642 | -1079007 | -1349236 | - | -1976789 |
| | +40042 | +58080 | +67980 | +1451172 | +2460239 | - | +2405508 |
| 111402 | +39725 | +58080 | +67338 | +372165 | +1111003 | 253130659 | +428719 |
| $\mu_{0 0 2} =$ = 6963 | $\mu_{1 1 0} =$ = 2483 | $\mu_{1 0 1} =$ = 3630 | $\mu_{0 1 1} =$ = 4209 | $\mu_{2 1 0} =$ = 23260 | $\mu_{1 2 0} =$ = 69438 | $\mu_{2 2 0} =$ = 15820666 | $\mu_{1 1 1} =$ = 26795 |
| $\bar{\sigma}_3 = 83$ | $r_{1 1 0} =$ = 0,876 | $r_{1 0 1} =$ = 0,971 | $r_{0 1 1} =$ = 0,805 | $r_{2 1 0} =$ = 0,182 | $r_{1 2 0} =$ = 0,393 | $r_{2 2 0} =$ = 1,979 | $r_{1 1 1} =$ = 0,114 |

т. е. во всех случаях меньше 0,001; такой ошибкой можно пренебречь.

Составление остальных столбцов табл. 7.40 ясно из заголовков. Так как x_1 , x_2 и x_3 представляют отклонения от средних значений, то суммы каждого столбца, деленные на число испытаний, дают соответствующие центральные моменты.

Извлекая квадратный корень из вторых центральных моментов [столбцы (8) — (10)], находим основные отклонения:

$$\bar{\sigma}_1 = 45 \text{ мг/см}^3, \quad \bar{\sigma}_2 = 63 \text{ гмм/мм}^2, \quad \bar{\sigma}_3 = 83 \text{ кг/см}^2.$$

Смешанные основные моменты получаются из смешанных центральных моментов по формуле

$$r_{h_1 | h_2 | h_3} = \frac{\mu_{h_1 | h_2 | h_3}}{\sigma_1^{h_1} \sigma_2^{h_2} \sigma_3^{h_3}}.$$

Имеем [столбцы (11) — (17)]:

$$\begin{aligned} r_{111|0} &= 0,876, & r_{110|1} &= 0,971, & r_{011|1} &= 0,805, \\ r_{211|0} &= 0,182, & r_{112|0} &= 0,393, & r_{212|0} &= 1,979, \\ r_{111|1} &= 0,114. \end{aligned}$$

На основании этих моментов находим постоянные γ , δ , c и d по формулам (7.116) — (7.119):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= +0,233, & \gamma_2 &= +0,234, & \gamma_3 &= +1,178, \\ \delta_1 &= -0,046, & \delta_2 &= -0,063, \\ c_1 &= +0,220, & d_4 &= -0,004. \end{aligned}$$

Подставляя эти постоянные в (7.120), получим корреляционное уравнение того или иного вида.

В частности, обыкновенное линейное корреляционное уравнение, выражающее зависимость предела прочности при сжатии вдоль волокон древесины березы (X_3) от объемного веса (X_1) имеет вид

$$r_{(X_3)1.1} = 0,971 \xi_{1(X_3)}.$$

Переходя к единицам измерения [ср. (7.122)], находим

$$\tilde{X}_{(X_3)1.1} = 739 + 0,971 \frac{X_{1(X_3)} - 580}{45} \cdot 83 = -300 + 1,791 X_{1(X_3)} \quad (I)$$

с основной ошибкой

$$\bar{\sigma}_{3.1} = 198,507 \text{ кг/см}^2.$$

Множественное линейное корреляционное уравнение, выражающее зависимость предела прочности при сжатии вдоль волокон

древесины березы (X_3) от объемного веса (X_1) и ударной твердости (X_2), имеет вид

$$r_{(j_1)(j_2)11} = 0,971\xi_{1(j_1)} - 0,197(\xi_{2(j_2)} - 0,876\xi_{1(j_1)}) = 1,444\xi_{1(j_1)} - 0,197\xi_{2(j_2)},$$

или

$$\begin{aligned}\hat{X}_{(j_1)(j_2)11} &= 739 + \left\{ 0,971 \cdot \frac{X_{1(j_1)} - 580}{45} - \right. \\ &\quad \left. - 0,197 \left(\frac{X_{2(j_2)} - 775}{63} - 0,876 \cdot \frac{X_{1(j_1)} - 580}{45} \right) \right\} 83 = \\ &= -283 + 2,109X_{1(j_1)} - 0,260X_{2(j_2)} \quad (\text{II}),\end{aligned}$$

с основной ошибкой

$$\bar{\sigma}_{3,12} = 182,033 \text{ кг/см}^2.$$

Таблица 7.41

Значения предела прочности при сжатии вдоль волокон древесины березы, вычисленные по корреляционным уравнениям (I), (II) и (III)

| № | Значения предела прочности при сжатии вдоль волокон древесины березы | | | | Разности между наблюдаемыми и вычисленными значениями | | |
|-----|---|---|--------|--------|--|--------------|--------------|
| | полученные из наблюдений | вычисленные по корреляцион- ным уравнениям | | | (2)-(3) | (2)-(4) | (2)-(5) |
| | | (I) | (II) | (III) | | | |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| 1 | 852 | 861 | 850 | 848 | -9 | +2 | +4 |
| 2 | 800 | 825 | 826 | 827 | -25 | -26 | -27 |
| 3 | 616 | 615 | 618 | 615 | +1 | -2 | +1 |
| 4 | 698 | 658 | 657 | 657 | +40 | +41 | +41 |
| 5 | 733 | 728 | 714 | 717 | +5 | +19 | +16 |
| 6 | 701 | 739 | 737 | 739 | -38 | -36 | -38 |
| 7 | 865 | 871 | 861 | 859 | -6 | +4 | +6 |
| 8 | 727 | 732 | 740 | 741 | -5 | -13 | -14 |
| 9 | 562 | 610 | 603 | 603 | -48 | -41 | -41 |
| 10 | 726 | 724 | 715 | 727 | +2 | +11 | -1 |
| 11 | 681 | 660 | 666 | 666 | +21 | +15 | +15 |
| 12 | 819 | 807 | 814 | 815 | +12 | +5 | +4 |
| 13 | 721 | 723 | 727 | 728 | -2 | -6 | -7 |
| 14 | 675 | 667 | 661 | 663 | +8 | +14 | +12 |
| 15 | 833 | 801 | 813 | 814 | +32 | +20 | +19 |
| 16 | 817 | 814 | 826 | 826 | +3 | -9 | -9 |
| | | | | | -133 +124 | -133 +131 | -137 +118 |
| Σ | 11 826 | 11 835 | 11 828 | 11 845 | -9 | -2 | -19 |

Наконец, множественное корреляционное уравнение гиперболического вида оказалось следующим:

$$r_{(j)(j)} = 0,971\xi_{1(j)} - 0,197(\xi_{2(j)} - 0,876\xi_{1(j)}) - \\ - 0,0182[\xi_{1(j)}\xi_{2(j)} - 0,182\xi_{1(j)} - 0,876 - 1,0043(\xi_{2(j)} - 0,876\xi_{1(j)})],$$

или

$$\tilde{X}_{(j)(j)} = -511,4693 + 2,4728X_{1(j)} + \\ + 0,0546X_{2(j)} - 0,0005X_{1(j)}X_{2(j)} \quad (\text{III})$$

с основной ошибкой $\bar{\sigma}_{3,12} = 181,465 \text{ кг/см}^2$.

Вероятные значения предела прочности при сжатии вдоль волокон древесины березы, вычисленные по этим уравнениям, приведены в табл. 7.41.

§ 7. Поверхности распределения

I. Нормальная поверхность распределения

1. Уравнение нормальной поверхности распределения. Конечной целью при исследовании связи между двумя случайными величинами

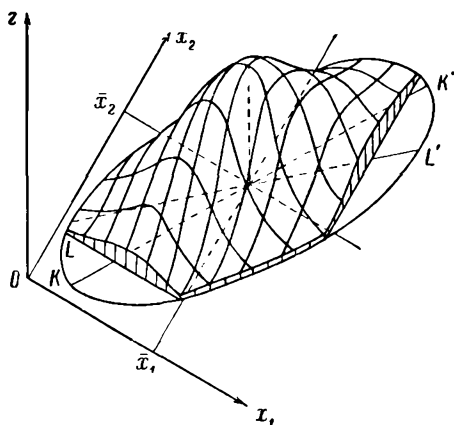


Рис. 7.9. Нормальная поверхность распределения, ее вертикальные сечения и корреляционные линии.

нами является установление уравнения поверхности распределения. Мы рассмотрим здесь нормальную поверхность распределения двух случайных величин и ее обобщение — поверхность распределения типа *A*.

Уравнение нормальной поверхности распределения двух случайных величин имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2r \frac{x_1}{\sigma_1} \frac{x_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 \right]}, \quad (7.123)$$

где x_1 и x_2 — отклонения от средних значений.

При $x_1 = x_2 = 0$, т. е. в точке, соответствующей центру распределения, функции $f(x_1, x_2)$ имеет максимальное значение

$$f(0, 0) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}; \quad (7.124)$$

по мере же увеличения абсолютных значений x_1 и x_2 функция $f(x_1, x_2)$ убывает, сначала очень быстро, а затем медленнее, стремясь к нулю при безграничном увеличении абсолютных значений x_1 и x_2 (рис. 7.9).

Применяя (7.124) и введя обозначение

$$\theta^2 = \frac{1}{1-r^2} \left[\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2r \frac{x_1}{\sigma_1} \frac{x_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 \right], \quad (7.125)$$

мы можем уравнение нормальной поверхности распределения представить в кратком виде

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0) e^{-\theta^2/2}. \quad (7.126)$$

2. Моменты нормальной поверхности распределения. Между моментами нормальной поверхности распределения имеют место соотношения:

$$r_{2s|2t+1} = r_{2s+1|2t} = 0, \quad (7.127)$$

$$r_{2t|0} = r_{0|2t} = (2t-1)!!, \quad (7.128)$$

$$r_{2t|2} = r_{2|2t} = (2t-1)!! (1 + 2tr_{1|1}^2),$$

$$r_{2t+1|1} = r_{1|2t+1} = (2t+1)!! r_{1|1}. \quad (7.129)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} r_{0|3} = r_{3|0} = 0, \quad r_{1|2} = r_{2|1} = 0, \\ r_{0|4} = r_{4|0} = 3, \quad r_{1|3} = r_{3|1} = 3r_{1|1}, \quad r_{2|2} = 1 + 2r_{1|1}^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.130)$$

Из (7.128) и (7.129) следует

$$r_{2t-1|1} = r_{2t|0} r_{1|1}, \quad (7.131)$$

откуда

$$\frac{r_{2t-1|1}}{r_{2t|0}} = r_{1|1}. \quad (7.132)$$

В частности,

$$\frac{r_{3|1}}{r_{4|0}} = \frac{r_{1|3}}{r_{0|4}} = r. \quad (7.133)$$

Эти равенства могут служить *критерием нормальности корреляции* между двумя случайными величинами.

Соотношения (7.128) показывают, что четные основные моменты нормальной поверхности распределения, у которых один из подписных значков равен нулю, представляют основные моменты нормальной кривой распределения (5.72). Следовательно, в случае нормальной корреляции между двумя случайными величинами распределения каждой отдельной величины x_1 и x_2 , т. е. итоговые распределения этих величин, являются нормальными, с теми же самыми средними значениями и соответствующими основными отклонениями σ_1 и σ_2 .

3. Вертикальные сечения нормальной поверхности распределения. Корреляционные прямые. При нормальной корреляции оказываются нормальными также и распределения каждой строки и каждого столбца таблицы распределения.

Чтобы убедиться в этом, возьмем какое-либо определенное значение x_1 и выделим в показателе степени (7.123) полный квадрат. Получим

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{x_2}{\sigma_2} - r \frac{x_1}{\sigma_1} \right)^2}, \quad (7.134)$$

или

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{\left(x_2 - r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1\right)^2}{2\sigma_2^2(1-r^2)}}. \quad (7.135)$$

Разделив (7.135) на

$$f(x_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2\sigma_1^2}, \quad (7.136)$$

т. е. на плотность распределения первой случайной величины, найдем, согласно (4.30), условную плотность распределения второй случайной величины x_2 при данном значении x_1 :

$$f_{x_1}(x_2) = \frac{1}{\sigma_{2,1}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2\sigma_{2,1}^2}}, \quad (7.137)$$

где

$$\bar{x}_2 = r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1, \quad (7.138)$$

$$\sigma_{2,1} = \sigma_2 \sqrt{1-r^2}. \quad (7.139)$$

Подобным же образом найдем условную плотность распределения первой случайной величины x_1 при данном значении x_2 :

$$f_{x_2}(x_1) = \frac{1}{\sigma_{1.2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - \tilde{x}_1)^2}{2\sigma_{1.2}^2}}, \quad (7.140)$$

где

$$\tilde{x}_1 = r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_2, \quad (7.141)$$

$$\sigma_{1.2} = \sigma_1 \sqrt{1 - r^2}. \quad (7.142)$$

Как видно из уравнения (7.137), условное распределение второй случайной величины x_2 в предположении, что первая случайная величина приняла определенное значение x_1 , т. е. распределение каждой строки таблицы распределения является нормальным со средним значением \tilde{x}_2 и основным отклонением $\sigma_{2.1}$. На рис. 7.9 уравнения (7.137) при разных значениях x_1 будут представлены нормальными кривыми распределения, образованными сечением поверхности распределения вертикальными плоскостями, параллельными координатной плоскости x_2Oz .

Подобным же образом уравнение (7.140) показывает, что условное распределение первой случайной величины x_1 в предположении, что вторая случайная величина приняла определенное значение x_2 , т. е. распределение каждого столбца таблицы распределения является нормальным со средним значением \tilde{x}_1 и основным отклонением $\sigma_{1.2}$. На рис. 7.9 уравнения (7.140) при разных значениях x_2 будут представлены нормальными кривыми распределения, образованными сечением поверхности распределения вертикальными плоскостями, параллельными координатной плоскости x_1Oz .

Средние значения условных распределений изображаются точками на плоскости основания, соответствующими вершинам кривых распределения, а основные отклонения всех параллельных строк или столбцов таблицы распределения одинаковы и равны — для строк $\sigma_{2.1}$ и для столбцов $\sigma_{1.2}$; они, следовательно, независимы от того, какие значения принимает другая случайная величина.

Уравнения (7.138) и (7.141) представляют *корреляционные уравнения*, выражающие связь между случайными величинами x_1 и x_2 . Из этих уравнений видно, что в случае нормальной корреляции между величинами корреляционные уравнения, выражающие как зависимость x_2 от x_1 , так и зависимость x_1 от x_2 , являются *линейными*. Линии средних значений KK' и LL' , представляющие на рис. 7.9 графики корреляционных уравнений, являются прямыми, пересекающимися в точке, соответствующей центру распределения.

4. Горизонтальные сечения нормальной поверхности распределения. Корреляционные эллипсы. Вертикальные сечения нормальной поверхности распределения некоторыми плоскостями дают возможность выяснить характер условных распределений по столбцам и строкам корреляционной таблицы. Подобным же образом горизонтальные сечения нормальной поверхности распределения плоскостями, расположенными на той или иной высоте, служат для более глубокого исследования природы связи между случайными величинами.

Положим, что в уравнении нормальной поверхности распределения (7.126) функция $f(x_1, x_2)$ будет равна некоторой постоянной величине k , так что

$$k = f(0, 0) e^{-\theta^2/2}, \quad (7.143)$$

какими бы ни были значения случайных величин x_1 и x_2 . Отсюда следует, что при тех же самых значениях x_1 и x_2 величина θ , определяемая выражением (7.125), сохраняет постоянное значение, соответствующее выбранному значению $f(x_1, x_2)$.

Так как выражение (7.125) представляет квадратическую функцию

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

то выражаемые этой функцией кривые будут коническими сечениями. Так как, далее, тип конического сечения зависит только от квадратичных членов, то для определения этого типа может быть непосредственно применен дискриминант $B^2 - 4AC$, равный

$$\left(\frac{2r}{\sigma_1\sigma_2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{\sigma_1^2} \cdot \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{4(r^2 - 1)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \leq 0.$$

Это соотношение показывает, что сечения нормальной поверхности распределения горизонтальными плоскостями являются эллипсами, переходящими в прямую линию, когда $r = \pm 1$.

На основании (7.125) мы заключаем, что значения случайных величин x_1 и x_2 , плотность совместного распределения которых остается постоянно равной (7.126), представляют координаты точек, лежащих на эллипсе (7.125) в плоскости

$$z = k. \quad (7.144)$$

Эллипсы (7.125) называются *корреляционными эллипсами*.

Беря горизонтальные плоскости на различной высоте k , — отчего величина θ^2 будет принимать различные значения, — мы будем изменять только величину корреляционных эллипсов; ни центр этих эллипсов, ни расположение их относительно главных осей не будут изменяться. Следовательно, корреляционные эллипсы яв-

ляются концентрическими, подобными и подобно расположенными, если они будут под прямым углом проектированы на плоскость

$$f(x_1, x_2) = 0.$$

5. Вычисление выравнивающих частот нормальной таблицы распределения. Вычисление выравнивающих частот нормальной таблицы распределения можно выполнить непосредственно по формуле (7.123), умножая $f(x_1, x_2)$ на n . Однако гораздо проще производить вычисление при помощи таблиц значений функций $f(x)$ или $f^*(x)$.

Выведем формулу для вычисления выравнивающих частот нормальной таблицы распределения по помощи таблицы значений $f(x)$.

Полагая в (7.123) $r = 0$, получим

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right)} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}},$$

или

$$f(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2), \quad (7.145)$$

т. е. вероятность совместного появления двух случайных величин x_1 и x_2 равна произведению вероятностей этих величин. Следовательно, если в двумерном нормальном распределении

$$r = 0,$$

то случайные величины являются независимыми [см. (4.35)].

Таким образом, в двумерном нормальном распределении равенство коэффициента корреляции нулю говорит не только об отсутствии корреляции между случайными величинами, но и о полной независимости между ними.

Возьмем теперь нормированные случайные величины

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\sigma_1}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{\sigma_2}, \quad (7.146)$$

т. е. выразим отклонения от средних значений в единицах основных отклонений. Так как дисперсия, а следовательно, и основное отклонение нормированных значений равны единице, то уравнение (7.123) примет вид

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(\xi_1^2 - 2r\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)},$$

или

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_2 - r\xi_1}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2} \quad (1.147)$$

[ср. (7.135)].

Полагая

$$x = \xi_1, \quad y = \frac{\xi_2 - r\xi_1}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (7.148)$$

будем иметь

$$f(\xi_1, \xi_2) = f(x) \cdot f(y), \quad (7.149)$$

где $f(x)$ и $f(y)$ — нормальные функции плотности распределения для переменных (7.148).

Коэффициент корреляции между переменными (7.148) равен нулю:

$$r_{xy} = 0.$$

Отсюда мы заключаем, что переменные (7.148) являются нормально распределенными независимыми переменными, и, следовательно, значение двумерной функции плотности распределения $f(x, y)$ можно найти по формуле (7.149).

Умножая (7.149) на

$$\frac{n}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}, \quad (7.150)$$

получим формулу для вычисления выравнивающих частот нормальной таблицы распределения

$$\tilde{n}_{j_1|j_2} = \frac{n}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} f(x) f(y), \quad (7.151)$$

где значения $f(x)$ и $f(y)$ берутся из табл. VI.

Вычисление $\tilde{n}_{j_1|j_2}$ может быть произведено также при помощи таблицы значений функции $f^*(x)$ (табл. VII). В этом случае

$$\tilde{n}_{j_1|j_2} = \tilde{n}_{0|0} f^*(x) f^*(y), \quad (7.152)$$

где $\tilde{n}_{0|0}$ — максимальная частота,

$$\tilde{n}_{0|0} = \frac{n}{2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \quad (7.153)$$

[см. (7.124)].

В качестве примера вычислим выравнивающие частоты для таблицы распределения объемного веса при влажности 10% и модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели (табл. 1.16). Статистики для этой таблицы приведены в табл. 7.42.

Таблица 7.42

Статистики для таблицы распределения объемного веса при влажности 10% и модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели

| $r_{h_1 h_2}$ | | | | | |
|--|--------|--------|--|--------|-------|
| $h_1 \backslash h_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | -0,036 | 3,113 |
| 1 | 0 | +0,880 | +0,005 | 2,658 | |
| 2 | 1 | +0,051 | | | |
| 3 | +0,101 | 2,541 | | | |
| 4 | 2,893 | | | | |
| $X_1(a) = 0,445$ $m_{1 0} = +0,335$ $\bar{X}_1 = 0,455 \pm 0,091 \text{ г/см}^3$ $\sigma_1 = 1,824 \pm 0,064$ | | | $X_2(a) = 130\,000 \text{ кг/см}^2$ $m_{0 1} = -0,082$ $\bar{X}_2 = 128\,852 \pm 1134 \text{ кг/см}^2$ $\sigma_2 = 1,620 \pm 0,058$ | | |
| $r = +0,880 \pm 0,018, \quad \eta_{21} = \eta_{12} = 0,882 \pm 0,016$ $\sqrt{1-r^2} = 0,47497$ | | | | | |

На основании моментов находим

$$\frac{r_{3|1}}{r_{4|0}} = \frac{2,541}{2,893} = 0,878, \quad \frac{r_{1|3}}{r_{0|4}} = \frac{2,658}{3,113} = 0,854,$$

т. е. условие (7.133) удовлетворяется достаточно хорошо.

Переходя к вычислению выравнивающих частот, определим сначала коэффициент в формуле (7.151):

$$\frac{n}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-r^2}} = \frac{400}{1,824 \cdot 1,620 \cdot 0,47497} = 285,0.$$

Таким образом, уравнение (7.151) будет иметь вид

$$\tilde{n}_{f_1|f_2} = 285,0 f(x) f(y).$$

Для вычисления каждой частоты $\tilde{n}_{f_1|f_2}$ надо выполнить следующие действия.

Вычислим, например, частоту $\tilde{n}_{f_1|f_2}$ для клетки таблицы с заголовками

$$\xi_1 = -1,280, \quad \xi_2 = -1,184.$$

Имеем

$$x = -1,280,$$

$$y = \frac{-1,184 - 0,880 \cdot (-1,280)}{0,47497} = -0,122.$$

По табл. VI находим

$$f(-1,280) = 0,17585, \quad f(-0,122) = 0,37598.$$

Следовательно,

$$f(x) \cdot f(y) = 0,06963.$$

Наконец,

$$\tilde{n}_{j_1 | j_2} = 285,0 \cdot 0,06963 = 19,9.$$

Для проверки вычислений вместо (7.148) положим

$$y = \xi_2, \quad x = \frac{\xi_1 - r\xi_2}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (7.154)$$

Тогда для рассматриваемой клетки таблицы распределения будем иметь

$$y = -1,184, \quad x = \frac{-1,280 - 0,880 \cdot (-1,184)}{0,47497} = -0,501,$$

$$f(-1,184) = 0,19792, \quad f(-0,501) = 0,35189, \quad f(y) \cdot f(x) = 0,06965,$$

$$\tilde{n}_{j_1 | j_2} = 285,0 \cdot 0,06965 = 19,9.$$

Вычисление $\tilde{n}_{j_1 | j_2}$ при помощи таблицы значений функции $f^*(x)$ производится следующим образом.

Максимальная частота (7.153) в рассматриваемом примере равна

$$\tilde{n}_{0|0} = \frac{400}{6,2862 \cdot 1,184 \cdot 1,620 \cdot 0,47497} = 45,4.$$

Уравнение (7.152) будет иметь вид

$$\tilde{n}_{j_1 | j_2} = 45,4 f^*(x) f^*(y).$$

Для клетки таблицы распределения с заголовками

$$\xi_1 = -1,280, \quad \xi_2 = -1,184$$

имеем

$$f^*(-1,280) = 0,44078, \quad f^*(-0,122) = 0,99259, \quad f^*(x) \cdot f^*(y) = 0,43752,$$

$$\tilde{n}_{j_1 | j_2} = 45,4 \cdot 0,43752 = 19,9.$$

Поступая описанным способом, получим табл. 7.43 (в скобках помещены наблюдаемые частоты).

Таблица 7.43

Выравнивающие и наблюдаемые частоты таблицы распределения объемного веса при влажности 10% и модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели

| $\xi_1 \backslash \xi_2$ | -3,652 | -3,035 | -2,418 | -1,800 | -1,183 | -0,568 | +0,051 | +0,668 | +1,285 | +1,902 | +2,519 | +3,137 | +3,754 | Σ |
|--------------------------|----------|------------|------------|--------------|--------------|--------------|---------------|--------------|--------------|--------------|------------|------------|----------|----------------|
| -3,473 | | 0,1 — | 0,1 — | | | | | | | | | | | 0,2 — |
| -2,925 | | 0,4 — | 0,6 — | 0,2 — | | | | | | | | | | 1,2 — |
| -2,377 | 0,1 — | 0,4 (1) | 2,1 (3) | 2,2 (2) | 0,4 — | | | | | | | | | 5,2 (6) |
| -1,828 | | 0,1 (1) | 2,0 (1) | 7,9 (9) | 5,7 (6) | 0,8 (1) | | | | | | | | 16,5 (18) |
| -1,280 | | | 0,5 (1) | 7,3 (8) | 19,9 (20) | 10,0 (8) | 0,9 — | | | | | | | 38,6 (37) |
| -0,732 | | | | 1,8 (1) | 18,2 (11) | 34,2 (42) | 11,9 (14) | 0,8 — | | | | | | 66,9 (68) |
| -0,184 | | | | 0,1 — | 4,4 (7) | 31,0 (26) | 40,4 (46) | 9,7 (11) | 0,4 — | | | | | 86,0 (90) |
| +0,365 | | | | | 0,3 — | 7,4 (9) | 36,1 (31) | 32,5 (36) | 5,4 (3) | 0,2 — | | | | 81,9 (79) |
| +0,913 | | | | | | 0,5 (1) | 8,6 (9) | 28,7 (23) | 17,9 (19) | 2,1 (2) | | | | 57,8 (54) |
| +1,461 | | | | | | | 0,5 — | 6,7 (8) | 15,6 (15) | 6,7 (6) | 0,6 (2) | | | 30,1 (31) |
| +2,009 | | | | | | | | 0,4 (1) | 3,6 (4) | 5,8 (6) | 1,7 (1) | 0,1 — | | 11,6 (12) |
| +2,558 | | | | | | | | | 0,2 (1) | 1,3 (2) | 1,5 (1) | 0,3 — | | 3,3 (4) |
| +3,106 | | | | | | | | | | | 0,3 — | 0,3 (1) | 0,1 — | 0,7 (1) |
| Σ | 0,1 — | 1,0 (2) | 5,3 (5) | 19,5 (20) | 48,9 (44) | 83,9 (87) | 98,4 (100) | 78,8 (79) | 43,1 (42) | 16,1 (16) | 4,1 (4) | 0,7 (1) | 0,1 — | 400,0 (400) |

Числа итоговых столбца и строки таблицы распределения представляют выравнивающие частоты рядов распределения, составленных для каждой случайной величины в отдельности. Совпадение этих чисел с частотами, вычисленными по уравнениям

$$\bar{n}_{1,1} = 87,5f^*(\xi_1) \quad \text{и} \quad \bar{n}_{1,1} = 98,48f^*(\xi_2)$$

[см. табл. 5.5 и 5.6], подтверждает правильность выполненных вычислений.

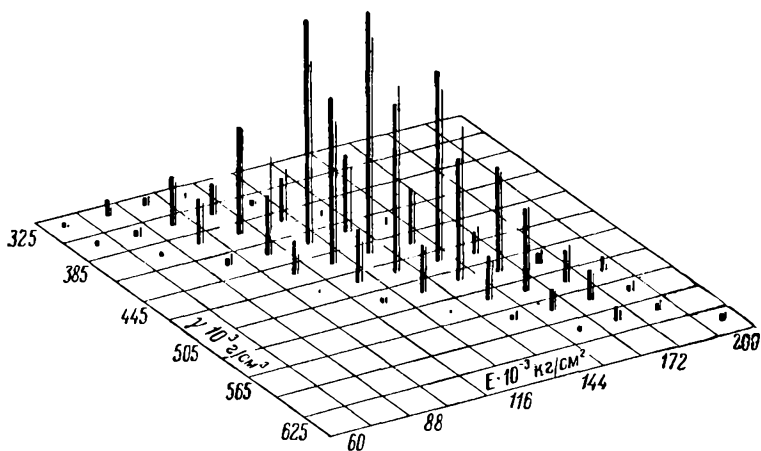


Рис. 7.10. Выравнивающие и наблюдаемые частоты таблицы распределения объемного веса при влажности 10% и модуля упругости при сжатии вдоль волокон древесины резонансовой ели.

Частоты внутренних клеток табл. 7.43 изображены на рис. 7.10. Сравнивая эти частоты, мы видим достаточно полное согласие между ними.

II. Поверхность распределения типа A

1. Уравнения поверхности распределения типа A. Уравнение поверхности распределения типа A имеет вид

$$f_A(\xi_1, \xi_2) = f(\xi_1, \xi_2) + \sum_{g+h \geq 3} \sum (-1)^{g+h} \frac{c_{gh}}{g!h!} \frac{\partial^{g+h} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1^g \partial \xi_2^h}. \quad (7.155)$$

Здесь $f(\xi_1, \xi_2)$ — нормальная функция распределения двух случайных величин, ξ_1 и ξ_2 — нормированные в соответствии с наблюдаемыми данными значения этих величин, а коэффициенты c_{gh} представляют разности между основными моментами данной таблицы распределения и соответствующими основными моментами функции $f(\xi_1, \xi_2)$ [см. (7.130)].

Ввиду очень больших основных ошибок моментов порядка выше четвертого в уравнении (7.155) необходимо ограничиться членами, для которых

$$g + h \leq 4.$$

Используя (7.148), мы можем уравнение (7.155) привести к виду

$$\begin{aligned} f_A(x, y) = f(x) & \left[f(y) - \frac{r_{013}}{6} f^{(3)}(y) + \frac{r_{014} - 3}{24} f^{(4)}(y) \right] + \\ & + f'(x) \left[-\frac{r_{112}}{2} f''(y) + \frac{r_{113} - 3r_{111}}{6} f^{(3)}(y) \right] + \\ & + f''(x) \left[-\frac{r_{211}}{6} f'(y) + \frac{r_{212} - 2r_{111}^2 - 1}{4} f''(y) \right] + \\ & + f^{(3)}(x) \left[-\frac{r_{310}}{6} f(y) + \frac{r_{311} - 3r_{111}}{6} f'(y) \right] + f^{(4)}(x) \left[\frac{r_{410} - 3}{24} f(y) \right]. \end{aligned} \quad (7.156)$$

Переход к выравнивающим частотам выполняется по формуле

$$\tilde{n}_{j_1 j_2} = \frac{n}{\alpha_1 \sigma_2 \sqrt{1 - r_{111}^2}} f_A(x, y). \quad (7.157)$$

2. Вычисление выравнивающих частот таблицы распределения типа А. В качестве примера вычислим выравнивающие частоты для таблицы распределения крепости и удлинения хлопчатобумажной пряжи (табл. 1.19).

Необходимые статистики для этой таблицы приведены в табл. 7.44.

Подставляя значения основных моментов в (7.156), получим

$$\begin{aligned} f_A(x, y) = f(x) & [f(y) + 0,041 f^{(3)}(y) + 0,004 f^{(4)}(y)] + \\ & + f'(x) [+ 0,084 f''(y) + 0,005 f^{(3)}(y)] + f''(x) [+ 0,049 f'(y) - 0,006 f''(y)] + \\ & + f^{(3)}(x) [- 0,020 f(y) - 0,011 f'(y)] + f^{(4)}(x) [- 0,004 f(y)]. \quad (*) \end{aligned}$$

Наконец,

$$\tilde{n}_{j_1 j_2} = \frac{1000}{1,796 \cdot 1,831 \cdot 0,660} f_A(x, y) = 460,74 f_A(x, y).$$

Вычисление выравнивающих частот располагается в следующем порядке.

Наблюдаемые значения рассматриваемых величин заменяются нормированными значениями

$$\xi_1 = \frac{x_1 - m_{110}}{\sigma_1}, \quad \xi_2 = \frac{x_2 - m_{011}}{\sigma_2}.$$

Таблица 7.44
Статистики для таблицы распределения крепости и удлинения
хлопчатобумажной пряжи

| $r_{h_1 h_2}$ | | | | | |
|----------------------|-------|--------|--------|--------|-------|
| $h_1 \backslash h_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | -0,246 | 3,086 |
| 1 | 0 | 0,751 | -0,167 | 2,284 | |
| 2 | 1 | -0,097 | 2,102 | | |
| 3 | 0,117 | 2,187 | | | |
| 4 | 2,910 | | | | |

| | | | |
|---|---------------------|---------------------|---------------------------------|
| $X_{1(a)} = 275 \text{ з,}$ | $m_{1 0} = -0,130,$ | $\sigma_1 = 1,796,$ | $\frac{1}{\sigma_1} = 0,55679,$ |
| $X_{2(a)} = 8\%,$ | $m_{0 1} = -0,038,$ | $\sigma_2 = 1,831,$ | $\frac{1}{\sigma_2} = 0,54615,$ |
| $\xi_1 = \frac{x_1 + 0,130}{1,795}, \quad \xi_2 = \frac{x_2 + 0,038}{1,831},$ | | | |
| $V\sqrt{1 - r_{11}^2} = V\sqrt{1 - 0,751^2} = 0,660, \quad \frac{1}{0,660} = 1,51515$ | | | |

Для данного значения $x = \xi_1$ находятся по табл. XIII значения функции плотности нормального распределения $f(x)$ и ее производных *). Эти значения остаются постоянными для всех клеток данной строки таблицы распределения.

Затем для каждой строки таблицы распределения вычисляется значение

$$y = \frac{\xi_2 - r_{1|1} \xi_1}{V\sqrt{1 - r_{11}^2}}$$

и находятся по указанной табл. XIII значения $f(y)$ и ее производных.

Подставив эти значения в (*) и выполнив необходимые вычисления, находим $f_A(x, y)$. Умножив полученное число на 460,74 находим искомую частоту $\tilde{n}_{i_1|j_2}$.

Вычислим, например, выравнивающую частоту для клетки таблицы распределения с заголовками $X_1 = 250 \text{ з, } \bar{X}_2 = 6,5\%$.

Здесь

$$\xi_1 = -0,484, \quad \xi_2 = -1,618.$$

Согласно (7.148) имеем

$$x = -0,484, \quad y = \frac{-1,618 - 0,751(-0,484)}{0,660} = \frac{-1,618 + 0,363}{0,660} = -1,902$$

*) В 1970 году издана таблица значений функции $f(x)$ и ее производных с шагом 0,001 (В. А. Юденков (VII, 2)).

Таблица 7.45

Выравнивающие и наблюдаемые частоты таблицы распределения
крепости и удлинения хлопчатобумажной пряжи

| $\xi_1 \backslash \xi_2$ | -3,265 - | -2,709 - | -2,164 - | -1,618 - | -1,072 - | -0,525 - | +0,021 + | +0,567 + | +1,112 + | +1,659 + | +2,205 + | +2,751 + | Σ |
|--------------------------|-------------|-------------|--------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------|--------------|-------------|------------------|
| -3,265 | | 0,2 (1) | 0,1 (-) | | | | | | | | | | 0,3 (1) |
| -2,709 | 0,1 (1) | 0,9 (2) | 1,8 (2) | 1,6 (-) | 0,1 (-) | | | | | | | | 4,5 (5) |
| -2,152 | 0,6 (1) | 2,3 (3) | 5,3 (6) | 5,8 (7) | 4,8 (5) | 1,5 (1) | 0,4 (-) | | | | | | 20,7 (23) |
| -1,598 | 0,6 (1) | 2,3 (2) | 6,8 (9) | 15,3 (16) | 18,5 (19) | 12,2 (8) | 3,6 (3) | 0,7 (1) | | | | | 60,0 (59) |
| -1,041 | | 1,6 (1) | 7,2 (5) | 19,5 (21) | 33,5 (34) | 41,7 (42) | 23,0 (24) | 5,6 (7) | 0,8 (-) | | | | 135,9 (134) |
| -0,484 | | 0,3 (-) | 2,4 (2) | 12,0 (12) | 33,0 (29) | 60,2 (58) | 59,2 (66) | 27,6 (32) | 5,6 (4) | 0,4 (-) | | | 200,7 (203) |
| +0,072 | | | 0,5 (-) | 2,7 (4) | 14,8 (12) | 42,6 (14) | 72,0 (73) | 59,4 (53) | 21,7 (19) | 3,2 (4) | 0,1 - | | 217,0 (212) |
| +0,628 | | | | 0,6 (-) | 3,3 (5) | 14,7 (16) | 42,6 (42) | 62,4 (60) | 40,7 (43) | 12,5 (11) | 0,9 (2) | | 177,7 (179) |
| +1,185 | | | | | 0,4 (1) | 2,7 (4) | 12,0 (17) | 38,5 (37) | 38,1 (34) | 18,4 (14) | 3,1 (6) | - (1) | 113,2 (114) |
| +1,747 | | | | | | - (1) | 1,9 (3) | 8,2 (10) | 18,2 (14) | 15,2 (17) | 5,2 (5) | 0,1 (1) | 48,8 (51) |
| +2,299 | | | | | | | | 1,2 (2) | 4,5 (4) | 7,0 (5) | 4,3 (3) | 0,6 (1) | 17,6 (15) |
| +2,853 | | | | | | | | | - (1) | 0,3 (1) | 1,9 (1) | 0,9 (-) | 3,1 (3) |
| +3,409 | | | | | | | | | | - (1) | 0,2 (-) | 0,3 (-) | 0,5 (1) |
| Σ | 1,3 (3) | 7,6 (9) | 24,1 (24) | 57,5 (60) | 111,4 (105) | 175,6 (174) | 214,7 (228) | 203,5 (205) | 129,6 (119) | 57,0 (53) | 15,7 (17) | 1,9 (3) | 1000,0 (1000) |

По таблице значений функции плотности нормального распределения и ее производных находим

$$\begin{array}{l|l} f(x) = 0,35485, & f(y) = 0,06537, \\ f'(x) = +0,17175, & f'(y) = +0,12433, \\ f''(x) = -0,27172, & f''(y) = +0,17110, \\ f^{(3)}(x) = -0,47501, & f^{(3)}(y) = +0,07679, \\ f^{(4)}(x) = +0,58526, & f^{(4)}(y) = -0,36727. \end{array}$$

Следовательно,

$$\begin{array}{l|l} f_A(x, y) = 0,35485 [0,06537 + 0,00315 - 0,00147] & 0,02379 \\ + 0,17175 [+0,01437 + 0,00038] & + 0,00253 \\ - 0,27172 [+0,00609 - 0,00103] & - 0,00137 \\ - 0,47501 [-0,00131 - 0,00137] & + 0,00127 \\ + 0,58526 [-0,00026] & - 0,00015 \\ \hline & 0,02607 \end{array}$$

Наконец,

$$\tilde{n}_{f_1 f_2} = 460,74 \cdot 0,02607 = 12,0.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 7.45 (в скобках указаны наблюдаемые частоты).

Сравнивая выравнивающие частоты каждой клетки таблицы с наблюдаемыми частотами, мы видим достаточно близкое совпадение между ними.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

В этой книге в качестве примеров случайных величин рассматриваются характеристики главным образом механических свойств материалов. Поэтому представляется целесообразным остановиться кратко на выяснении этих свойств.

Положим, что из некоторого материала, например из стали, изготовлен образец в виде стержня круглого или прямоугольного поперечного сечения. Заложим концы стержня в захваты разрывной машины, при помощи которой можно произвести его растяжение. Под действием постепенно увеличивающейся силы P образец будет растягиваться и, наконец, разорвется.

На основании опытов с растяжением стержней установлено, что для большинства материалов в известных пределах полное удлинение Δl (т. е. приращение длины) стержня пропорционально растягивающей силе P и длине стержня l и обратно пропорционально модулю упругости E и площади поперечного сечения F :

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}. \quad (1^*)$$

Как видно из уравнения (1*), чем больше величина E , тем меньше удлинение при сохранении постоянных прочих величин, входящих в уравнение. Таким образом, *модуль упругости* характеризует *жесткость* материала.

Растягивающая сила, приходящаяся на единицу первоначальной площади поперечного сечения, называется *напряжением* и обозначается через σ :

$$\sigma = \frac{P}{F}. \quad (2^*)$$

Так как сила измеряется в килограммах ($кг$), а площадь — в квадратных сантиметрах ($см^2$), то напряжение будет выражено в килограммах на квадратный сантиметр ($кг/см^2$).

Удлинение стержня, отнесенное к первоначальной длине его и выраженное в процентах, называется *относительным удлинением* и обозначается через ϵ :

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3^*)$$

При помощи величин (1*) и (2*) мы можем уравнение (3*) представить в виде

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (4^*)$$

Таким образом, относительное удлинение пропорционально растягивающему напряжению. Так как относительное удлинение есть отвлеченное число, то из (4*) следует, что модуль упругости выражается в тех же единицах, что и напряжение σ , т. е. в кг/см^2 .

При исследовании механических свойств материалов соотношение между растягивающим напряжением и удлинением обычно

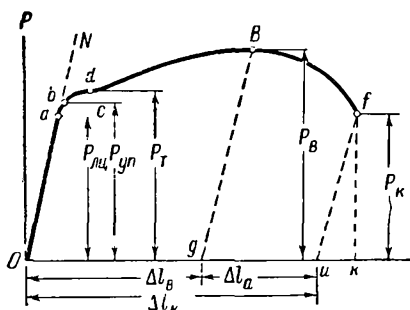


Рис. П1.

изображается графически при помощи *кривой растяжения*. Рассмотрим, например, кривую растяжения малоуглеродистой отожженной стали (рис. П.1) *). На этом рисунке по вертикальной оси откладываются усилия растяжения P , а по горизонтальной оси — абсолютное удлинение образца Δl . На испытательных машинах имеется приспособление, вычерчивающее кривую растяжения автоматически.

Участок Oa кривой растяжения представляет собой прямую линию, которая показывает, что до точки a сохраняется пропорциональность между усилием растяжения и удлинением. За точкой a эта пропорциональность нарушается. Напряжение в точке a называется *пределом пропорциональности* и обозначается через σ_p . Предел пропорциональности вычисляется по формуле

$$\sigma_p = \frac{P_p}{F_0}, \quad (5^*)$$

где P_p — усилие, представленное ординатой точки a , а F_0 — начальная площадь поперечного сечения образца.

Вблизи точки a на кривой растяжения находится точка b , ордината которой соответствует наибольшей из сил, при которой деформация образца является упругой, т. е. полностью исчезает при разгрузке. Эта сила P_e определяет величину *предела упругости* σ_e в формуле

$$\sigma_e = \frac{P_e}{F_0}. \quad (6^*)$$

*) Н. А. Шапошников, 1954, стр. 41 (VII, 106).

Зная удлинение образца на участке Oa , мы можем вычислить *модуль упругости* по формуле

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}. \quad (7^*)$$

При напряжении выше предела пропорциональности имеет место более быстрое возрастание удлинения, вследствие чего кривая растяжения отходит от прямой Oa . В точке d наблюдается внезапное удлинение стержня без заметного увеличения усилия растяжения. Это явление, называемое текучестью металла, изображается на кривой растяжения почти горизонтальным участком dc . Напряжение, соответствующее точке c , называется *пределом текучести* и обозначается через σ_T :

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}. \quad (8^*)$$

За горизонтальным участком кривой растяжения растягивающая сила снова растет вместе с удлинением до точки B . Вблизи этой точки напряжение остается почти постоянным, удлинения же значительно возрастают. Наибольшая ордината, соответствующая точке B , указывает максимальное напряжение, выдерживаемое испытываемым образцом. Это максимальное напряжение называется *пределом прочности*, или временным сопротивлением, и обозначается через σ_B :

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0}. \quad (9^*)$$

Таким образом, предел прочности при испытании образца на растяжение представляет отношение наибольшего груза P_B , который выдерживает образец до разрыва, к первоначальной площади поперечного сечения образца F_0 . Величина предела прочности, выражаемая обычно в $кг/мм^2$ или $кг/см^2$, характеризует величину тех сил, которые необходимы, чтобы довести образец до разрушения при растяжении.

За максимальным значением P_B в точке B кривая растяжения имеет нисходящую ветвь Bf , а деформация начинает сосредотачиваться на ограниченном участке длины образца. Это ведет к образованию местного сужения в виде шейки и к падению силы P , несмотря на то, что напряжение в сечении шейки растет. Наконец, в точке f происходит разрыв образца.

Рассмотренные величины напряжений σ_p , σ_T , σ_B , пропорциональные ординатам кривой растяжения, являются основными характеристиками *прочности материала*, его *сопротивляемости деформации* растяжения. Величины же, представленные абсциссами кривой растяжения, характеризуют иное свойство материала, а именно его *пластичность*, способность в большей или меньшей степени деформироваться, прежде чем наступает разрушение.

За меру пластичности материала принимается выраженная в процентах величина отношения остающегося удлинения образца после разрыва к первоначальной длине образца. Эта величина называется относительным *остаточным удлинением* при разрыве и обозначается через δ_k

$$\delta_k = \frac{\Delta l_k}{l_0} . \quad (10^*)$$

Параллельно с удлинением при растяжении образца происходит и его поперечное сужение, т. е. уменьшение площади поперечного сечения. *Относительное сужение* ψ_k , выражаемое обычно в процентах, вычисляется по формуле

$$\psi_k = \frac{F_0 - F_k}{F_0} , \quad (11^*)$$

где F_0 — начальное, а F_k — конечное сечение образца. Величина ψ_k характеризует наибольшую пластичность металла в условиях напряженного состояния в шейке.

При испытаниях на сжатие устанавливаются в основном те же самые механические характеристики, как и при испытаниях на растяжение. В частности, величина модуля упругости E для одного и того же материала оказывается одинаковой как для растяжения, так и для сжатия.

Кроме испытаний под действием *статических* нагрузок, производятся также *динамические* испытания материалов. Среди таких испытаний наибольшее распространение имеет так называемая *ударная проба*. Эта проба состоит в том, что образцы материала подвергаются разрушению ударом при изгибе и подсчитывается количество энергии, затраченной на разрушение образца.

Испытания производятся на *маятниковом копре*. Копер состоит из массивной станины, имеющей прорез, внутри которого может проходить тяжелый маятник веса P в виде диска с прямоугольным вырезом. Ось маятника вращается в шариковых подшипниках, расположенных в верхней части станины. В вырезе маятника помещен нож из закаленной стали. Образец в виде балочки прямоугольного сечения с надрезом по середине пролета помещается на опоре в нижней части станины копра. Перед испытанием маятник поднимается на определенную высоту H и удерживается в этом положении защелкой. При поднятии защелки маятник падает; нож ударяет образец по середине пролета и ломает его. Маятник по инерции продолжает двигаться дальше и поднимается на высоту h , меньшую первоначальной высоты H . На копре имеется приспособление, позволяющее измерить высоту h .

Количество энергии, затраченной на излом образца, равно

$$T = P(H - h) \text{ кгм}, \quad (12^*)$$

если пренебречь потерями на трение в подшипниках и сопротивлением воздуха. Разделив это количество на площадь поперечного

сечения образца F см², получим величину, называемую *ударной вязкостью*:

$$a_k = \frac{T}{F} \text{ кгм/см}^2. \quad (13'')$$

Для того чтобы резче выявить свойства материала при ударной пробе, образцу придают специальную форму: в том сечении, где наносится удар, делают надрез. Среди различных форм образцов наиболее распространены образцы прямоугольного сечения с надрезом в виде треугольной выемки и цилиндрические образцы.

Ударная вязкость хорошо характеризует материал в отношении *хрупкости* при неравном распределении напряжений. Ввиду крайней простоты ударных испытаний они имеют широкое применение при исследовании механических свойств материалов.

При определении *твердости* материала наибольшее распространение получил способ, состоящий в том, что в гладкую поверхность испытуемого материала M вдавливается хорошо закаленный стальной шарик, диаметр которого выбирается соответственно толщине образца и величине применяемой нагрузки. По окончании испытания измеряется диаметр d полученного отпечатка с точностью до сотых долей миллиметра и по нему определяют поверхность отпечатка. Разделив давящий груз P (в кг) на поверхность отпечатка (в мм²), получают число твердости H_B (в кг/мм²). Для удобства вычислений составлены таблицы, на основании которых можно по величине нагрузки на шарик и диаметру его отпечатка определить число твердости.

При испытаниях на *усталость* металлов под воздействием большого числа циклических нагрузок определяется *предел выносливости* (в кг/мм²), представляющий наибольшее напряжение цикла, которое может выдерживать металл образца без разрушения от усталости при заданном числе циклов нагрузки.

Рассмотренные выше механические свойства с теми или иными изменениями могут быть изучены при испытании разных материалов: металла, древесины, бетона, резины и т. д. Например, при исследовании свойств древесины наиболее важными свойствами являются: объемный вес, предел прочности при сжатии или растяжении, модуль упругости, сопротивление раскаливанию, твердость и т. д.

В некоторых случаях имеют значение также и другие свойства. Например, при исследовании свойств пряжи важно знать *номер* пряжи, т. е. отношение длины образца (в см) к его весу (в г), *крепость* пряжи (в г), определяемую величиной предельной нагрузки, при которой пряжа не разрывается, и *удлинение* пряжи (в %), т. е. выраженное в процентах отношение приращения длины при предельной нагрузке к первоначальной длине образца. Все эти механические свойства пряжи можно получить одновременно, если испытания пряжи производятся на специальной машине,

ПРИЛОЖЕНИЕ II

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица I

Таблица достаточно больших чисел

| $P \backslash \varepsilon$ | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 |
|----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 0,75 | 33 | 40 | 51 | 67 | 91 | 132 | 206 | 367 | 827 | 3308 |
| 0,80 | 41 | 50 | 64 | 83 | 114 | 164 | 256 | 456 | 1026 | 4105 |
| 0,85 | 51 | 63 | 80 | 105 | 143 | 207 | 323 | 575 | 1295 | 5180 |
| 0,90 | 67 | 83 | 105 | 138 | 187 | 270 | 422 | 751 | 1690 | 6763 |
| 0,91 | 71 | 88 | 112 | 146 | 199 | 287 | 449 | 798 | 1796 | 7185 |
| 0,92 | 76 | 94 | 119 | 156 | 212 | 306 | 478 | 851 | 1915 | 7662 |
| 0,93 | 82 | 101 | 128 | 167 | 227 | 328 | 512 | 911 | 2051 | 8207 |
| 0,94 | 88 | 109 | 138 | 180 | 245 | 353 | 552 | 982 | 2210 | 8843 |
| 0,95 | 96 | 118 | 150 | 195 | 266 | 384 | 600 | 1067 | 2400 | 9603 |
| 0,96 | 105 | 130 | 164 | 215 | 292 | 421 | 659 | 1171 | 2636 | 10544 |
| 0,965 | 111 | 137 | 173 | 226 | 308 | 444 | 694 | 1234 | 2778 | 11112 |
| 0,970 | 117 | 145 | 183 | 240 | 327 | 470 | 735 | 1308 | 2943 | 11773 |
| 0,975 | 125 | 155 | 196 | 256 | 348 | 502 | 784 | 1395 | 3139 | 12559 |
| 0,980 | 135 | 167 | 211 | 276 | 375 | 541 | 845 | 1503 | 3382 | 13529 |
| 0,985 | 147 | 182 | 231 | 301 | 410 | 591 | 924 | 1643 | 3697 | 14791 |
| 0,990 | 165 | 204 | 259 | 338 | 460 | 663 | 1036 | 1843 | 4146 | 16587 |
| 0,991 | 170 | 210 | 266 | 348 | 473 | 682 | 1066 | 1895 | 4264 | 17057 |
| 0,992 | 175 | 217 | 274 | 358 | 488 | 703 | 1098 | 1953 | 4395 | 17583 |
| 0,993 | 181 | 224 | 284 | 371 | 505 | 727 | 1136 | 2020 | 4545 | 18182 |
| 0,994 | 188 | 233 | 294 | 385 | 524 | 755 | 1179 | 2097 | 4718 | 18875 |
| 0,995 | 196 | 243 | 307 | 402 | 547 | 787 | 1231 | 2188 | 4924 | 19698 |
| 0,996 | 207 | 255 | 323 | 422 | 575 | 828 | 1294 | 2301 | 5177 | 20409 |
| 0,997 | 220 | 271 | 344 | 449 | 611 | 880 | 1376 | 2446 | 5504 | 22018 |
| 0,998 | 238 | 294 | 373 | 487 | 663 | 954 | 1492 | 2652 | 5968 | 23873 |
| 0,999 | 270 | 334 | 422 | 552 | 751 | 1082 | 1691 | 3007 | 6767 | 27069 |

Таблица II

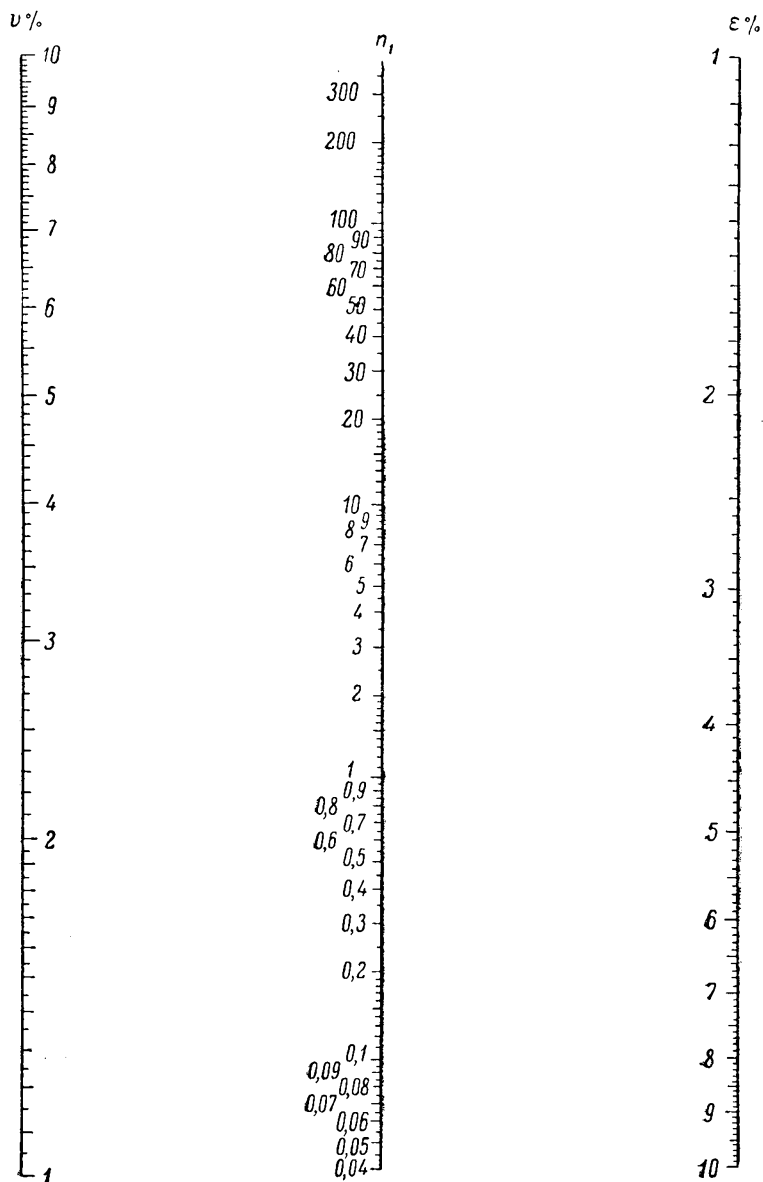
Номограмма достаточно больших чисел при величине вероятности $P = 0,95$ 

Таблица случайных чисел

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1534 | 7106 | 2836 | 7873 | 5574 | 7545 | 7590 | 5574 | 1202 | 7712 |
| 6128 | 8993 | 4102 | 2551 | 0330 | 2358 | 6427 | 7067 | 9325 | 2454 |
| 6047 | 8566 | 8644 | 9343 | 9297 | 6751 | 3500 | 8754 | 2913 | 1258 |
| 0806 | 5201 | 5705 | 7355 | 1448 | 9562 | 7514 | 9205 | 0402 | 2427 |
| 9915 | 8274 | 4525 | 5695 | 5752 | 9630 | 7172 | 6988 | 0227 | 4264 |
| 2882 | 7158 | 4341 | 3463 | 1178 | 5786 | 1173 | 0670 | 0820 | 5067 |
| 9213 | 1223 | 4388 | 9760 | 6691 | 6861 | 8214 | 8813 | 0611 | 3131 |
| 8410 | 9836 | 3899 | 3683 | 1253 | 1683 | 6988 | 9978 | 8026 | 6751 |
| 9974 | 2362 | 2103 | 4326 | 3825 | 9079 | 6187 | 2721 | 1489 | 4216 |
| 3402 | 8162 | 8226 | 0782 | 3364 | 7871 | 4500 | 5598 | 9421 | 3816 |
| 8188 | 6596 | 1492 | 2139 | 8823 | 6878 | 0613 | 7161 | 0241 | 3834 |
| 3825 | 7020 | 1124 | 7483 | 9155 | 4919 | 3209 | 5959 | 2364 | 2555 |
| 9801 | 8788 | 6338 | 5899 | 3309 | 0807 | 0968 | 0539 | 4205 | 8257 |
| 5603 | 1251 | 6352 | 6467 | 0231 | 3556 | 2569 | 9446 | 4174 | 9219 |
| 0714 | 3757 | 0378 | 8266 | 8864 | 1374 | 6687 | 1221 | 0678 | 3714 |
| 4617 | 5652 | 7627 | 0372 | 8151 | 3668 | 1994 | 4402 | 2124 | 0016 |
| 6789 | 6279 | 7306 | 1856 | 7028 | 9043 | 7161 | 7526 | 6913 | 6396 |
| 6705 | 4978 | 8621 | 1790 | 4433 | 6298 | 0854 | 9127 | 3445 | 1111 |
| 3840 | 1086 | 0774 | 9241 | 9297 | 4239 | 1739 | 7734 | 0119 | 2436 |
| 7662 | 3939 | 2965 | 3273 | 0551 | 1645 | 8477 | 1877 | 5327 | 8629 |
| 7639 | 2868 | 4391 | 2950 | 7122 | 7325 | 9727 | 0080 | 7464 | 7947 |
| 3237 | 7203 | 4246 | 7329 | 7936 | 0065 | 4146 | 0866 | 4916 | 8648 |
| 3917 | 6271 | 1721 | 5469 | 1914 | 8653 | 0387 | 2756 | 6073 | 8984 |
| 9138 | 9395 | 6005 | 6423 | 7977 | 1873 | 7103 | 4267 | 9316 | 7206 |
| 8358 | 5896 | 6286 | 9242 | 5040 | 8509 | 2941 | 3913 | 3028 | 1563 |
| 1030 | 5094 | 1745 | 2975 | 2018 | 7340 | 6547 | 0207 | 5587 | 0300 |
| 6606 | 6305 | 1564 | 6668 | 7822 | 7142 | 6564 | 1659 | 5369 | 1659 |
| 4533 | 8841 | 4922 | 9365 | 1361 | 6692 | 1633 | 6764 | 0747 | 3881 |
| 4258 | 2012 | 0992 | 0106 | 1542 | 4760 | 0392 | 4057 | 0092 | 5203 |
| 5224 | 5128 | 8949 | 7928 | 7267 | 0116 | 1476 | 2009 | 1772 | 3860 |
| 6872 | 7492 | 7962 | 1867 | 7437 | 1526 | 3516 | 9129 | 4153 | 8084 |
| 8638 | 8407 | 7198 | 0956 | 0950 | 7753 | 5144 | 3914 | 5596 | 6104 |
| 9958 | 7172 | 5822 | 4224 | 6701 | 7559 | 4985 | 4856 | 4461 | 6147 |
| 0265 | 3086 | 2996 | 0699 | 3584 | 9702 | 1665 | 0446 | 9107 | 6437 |
| 8987 | 5441 | 7878 | 9404 | 0487 | 2939 | 3805 | 9172 | 7887 | 5197 |
| 5552 | 3529 | 9627 | 9362 | 6298 | 6021 | 0024 | 9520 | 9154 | 0643 |
| 9383 | 6640 | 7394 | 9592 | 9903 | 7699 | 8939 | 9972 | 1257 | 0994 |
| 9903 | 4059 | 0332 | 9109 | 0182 | 6721 | 9163 | 9008 | 2542 | 4461 |
| 6530 | 5070 | 7589 | 6928 | 6014 | 1832 | 9307 | 5107 | 1354 | 9257 |
| 8679 | 8953 | 8310 | 2060 | 6277 | 1773 | 7979 | 6741 | 6033 | 3588 |
| 5765 | 4987 | 1639 | 3512 | 9843 | 5286 | 3786 | 2384 | 4919 | 5611 |
| 7198 | 2447 | 6716 | 0291 | 5585 | 1106 | 5330 | 0504 | 6346 | 3679 |
| 2385 | 0605 | 2678 | 1399 | 2371 | 7968 | 1212 | 9569 | 8650 | 5841 |
| 0732 | 8732 | 8660 | 5836 | 9065 | 4603 | 0029 | 8042 | 0159 | 0345 |
| 1642 | 6094 | 3795 | 2600 | 4532 | 9740 | 0376 | 4384 | 9203 | 5387 |
| 4514 | 1956 | 7212 | 0687 | 7632 | 2106 | 0846 | 7055 | 4106 | 9157 |
| 8744 | 5580 | 8038 | 9087 | 7222 | 0424 | 0028 | 4511 | 3191 | 9846 |
| 3729 | 6225 | 5397 | 6790 | 2157 | 3414 | 6509 | 5204 | 4779 | 5641 |
| 8858 | 3147 | 8410 | 2783 | 1290 | 9796 | 8873 | 7585 | 7185 | 4726 |
| 3522 | 5601 | 6197 | 6051 | 3470 | 8283 | 5702 | 0103 | 8726 | 5282 |

Продолжение табл. III

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) | (17) | (18) | (19) | (20) |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 5489 | 5583 | 3156 | 0835 | 1988 | 3912 | 0938 | 7460 | 0869 | 4420 |
| 3522 | 0935 | 7877 | 5665 | 7020 | 9255 | 7379 | 7124 | 7878 | 5544 |
| 7555 | 7579 | 2550 | 2487 | 9477 | 0864 | 2349 | 1012 | 8250 | 2633 |
| 5759 | 3554 | 5080 | 9074 | 7001 | 6249 | 3224 | 6368 | 9102 | 2672 |
| 6303 | 6895 | 3371 | 3196 | 7231 | 2918 | 7380 | 0438 | 7547 | 2644 |
| 7351 | 5634 | 5323 | 2623 | 7803 | 8374 | 2191 | 0464 | 0696 | 9529 |
| 7068 | 7803 | 8832 | 5119 | 6350 | 0120 | 5026 | 3684 | 5657 | 0304 |
| 3613 | 1428 | 1796 | 8447 | 0503 | 5654 | 3254 | 7336 | 9536 | 1944 |
| 5143 | 4534 | 2105 | 0368 | 7890 | 2473 | 4240 | 8652 | 9435 | 1422 |
| 9815 | 5141 | 7649 | 8638 | 6137 | 8070 | 5345 | 4865 | 2456 | 5708 |
| 5780 | 1277 | 6316 | 1013 | 2867 | 9938 | 3930 | 3203 | 5696 | 1769 |
| 1187 | 0951 | 5991 | 5245 | 5700 | 5564 | 7352 | 0891 | 6249 | 6568 |
| 4184 | 2179 | 4554 | 9083 | 2254 | 2435 | 2965 | 5154 | 1209 | 7069 |
| 2916 | 2972 | 9885 | 0275 | 0144 | 8034 | 8122 | 3213 | 7666 | 0230 |
| 5524 | 1341 | 9860 | 6565 | 6981 | 9842 | 0171 | 2284 | 2707 | 3008 |
| 0146 | 5291 | 2354 | 5694 | 0377 | 5336 | 6460 | 9585 | 3415 | 2358 |
| 4920 | 2826 | 5238 | 5402 | 7937 | 1993 | 4332 | 2327 | 6875 | 5230 |
| 7978 | 1947 | 6380 | 3425 | 7267 | 7285 | 1130 | 7722 | 0164 | 8573 |
| 7453 | 0653 | 3645 | 7497 | 5969 | 8682 | 4191 | 2976 | 0361 | 9334 |
| 1473 | 6938 | 4899 | 5348 | 1641 | 3652 | 0852 | 5296 | 4538 | 4456 |
| 8162 | 8797 | 8000 | 4707 | 1880 | 9660 | 8446 | 1883 | 9768 | 0881 |
| 5642 | 4219 | 0807 | 3301 | 4279 | 4168 | 4305 | 9937 | 3120 | 5547 |
| 2042 | 1192 | 1175 | 8851 | 6432 | 4635 | 5757 | 6656 | 1660 | 5389 |
| 5470 | 7702 | 6958 | 9080 | 5925 | 8519 | 0127 | 9233 | 2452 | 7341 |
| 4045 | 1730 | 6005 | 1704 | 0345 | 3275 | 4738 | 4862 | 2556 | 8333 |
| 5880 | 1257 | 6163 | 4439 | 7276 | 6353 | 6912 | 0731 | 9033 | 5294 |
| 9083 | 4260 | 5277 | 4998 | 4298 | 5204 | 3965 | 4028 | 8936 | 5148 |
| 1762 | 8713 | 1189 | 1090 | 8989 | 7273 | 3213 | 1935 | 9321 | 4820 |
| 2023 | 2589 | 1740 | 0424 | 8924 | 0005 | 1969 | 1636 | 7237 | 1227 |
| 7965 | 3855 | 4765 | 0703 | 1678 | 0841 | 7543 | 0308 | 9732 | 1289 |
| 7690 | 0480 | 8098 | 9629 | 4819 | 7219 | 7241 | 5128 | 3853 | 1921 |
| 9292 | 0426 | 9573 | 4903 | 5916 | 6576 | 8368 | 3270 | 6641 | 0033 |
| 0867 | 1656 | 7016 | 4220 | 2533 | 6345 | 8227 | 1904 | 5138 | 2537 |
| 0505 | 2127 | 8255 | 5276 | 2233 | 3956 | 4118 | 8199 | 6380 | 6340 |
| 6295 | 9795 | 1112 | 5761 | 2575 | 6837 | 3336 | 9322 | 7403 | 8345 |
| 6323 | 2615 | 3410 | 3365 | 1117 | 2417 | 3176 | 2434 | 5240 | 5455 |
| 8672 | 8536 | 2966 | 5773 | 5412 | 8114 | 0930 | 4697 | 6919 | 4569 |
| 1422 | 5507 | 7596 | 0670 | 3013 | 1351 | 3886 | 3268 | 9469 | 2584 |
| 2653 | 1472 | 5113 | 5735 | 1469 | 9545 | 9331 | 5303 | 9914 | 6394 |
| 0438 | 4376 | 3328 | 8649 | 8327 | 0110 | 4549 | 7955 | 5275 | 2890 |
| 2851 | 2157 | 0047 | 7085 | 1129 | 0460 | 6821 | 8373 | 2572 | 8962 |
| 7962 | 2753 | 3077 | 8718 | 7418 | 8004 | 3425 | 3706 | 8822 | 1494 |
| 3837 | 4098 | 0220 | 1217 | 4732 | 0150 | 1637 | 1097 | 1040 | 7372 |
| 8542 | 4126 | 9274 | 2251 | 0607 | 4301 | 8730 | 7690 | 6235 | 3477 |
| 0139 | 0765 | 8039 | 9484 | 2577 | 7859 | 1976 | 0623 | 1418 | 6685 |
| 6687 | 1943 | 4307 | 0579 | 8171 | 8224 | 8641 | 7034 | 3595 | 3875 |
| 6242 | 5582 | 5872 | 3197 | 4919 | 2792 | 5991 | 4058 | 9769 | 1918 |
| 6859 | 9606 | 0522 | 4993 | 0345 | 8958 | 1289 | 8825 | 6941 | 7685 |
| 6590 | 1932 | 6043 | 3623 | 1973 | 4112 | 1795 | 8465 | 2110 | 8045 |
| 3482 | 0478 | 0221 | 6738 | 7323 | 5643 | 4767 | 0106 | 2372 | 9862 |

Т а б л и ц а I V

Значения четвертых моментов разрядных частот ($x^4 n_j$)

| n_j | $x=2$ | $x=3$ | $x=4$ | $x=5$ | $x=6$ | $x=7$ | $x=8$ | $x=9$ | $x=11$ | $x=12$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|---------|
| 1 | 16 | 81 | 256 | 625 | 1296 | 2401 | 4096 | 6561 | 14641 | 20736 |
| 2 | 32 | 162 | 512 | 1250 | 2592 | 4802 | 8192 | 13122 | 29282 | 41472 |
| 3 | 48 | 243 | 768 | 1875 | 3888 | 7203 | 12288 | 19683 | 43923 | 62208 |
| 4 | 64 | 324 | 1024 | 2500 | 5184 | 9604 | 16384 | 26244 | 58564 | 82944 |
| 5 | 80 | 405 | 1280 | 3125 | 6480 | 12005 | 20480 | 32805 | 73205 | 103680 |
| 6 | 96 | 486 | 1536 | 3750 | 7776 | 14406 | 24576 | 39366 | 87846 | 124416 |
| 7 | 112 | 567 | 1792 | 4375 | 9072 | 16807 | 28672 | 45927 | 102487 | 145152 |
| 8 | 128 | 648 | 2048 | 5000 | 10368 | 19208 | 32768 | 52488 | 117128 | 165888 |
| 9 | 144 | 729 | 2304 | 5625 | 11664 | 21609 | 36864 | 59049 | 131769 | 186624 |
| 10 | 160 | 810 | 2560 | 6250 | 12960 | 24010 | 40960 | 65610 | 146410 | 207360 |
| 11 | 176 | 891 | 2816 | 6875 | 14256 | 26411 | 45056 | 72171 | 161051 | 228096 |
| 12 | 192 | 972 | 3072 | 7500 | 15552 | 28812 | 49152 | 78732 | 175692 | 248832 |
| 13 | 208 | 1053 | 3328 | 8125 | 16848 | 31213 | 53248 | 85293 | 190333 | 269568 |
| 14 | 224 | 1134 | 3584 | 8750 | 18144 | 33614 | 57344 | 91854 | 204974 | 290304 |
| 15 | 240 | 1215 | 3840 | 9375 | 19440 | 36015 | 61440 | 98415 | 219615 | 311040 |
| 16 | 256 | 1296 | 4096 | 10000 | 20736 | 38416 | 65536 | 104976 | 234256 | 331776 |
| 17 | 272 | 1377 | 4352 | 10625 | 22032 | 40817 | 69632 | 111537 | 248897 | 352512 |
| 18 | 288 | 1458 | 4608 | 11250 | 23328 | 43218 | 73728 | 118098 | 263538 | 373248 |
| 19 | 304 | 1539 | 4864 | 11875 | 24624 | 45619 | 77824 | 124659 | 278179 | 393984 |
| 20 | 320 | 1620 | 5120 | 12500 | 25920 | 48020 | 81920 | 131220 | 292820 | 414720 |
| 21 | 336 | 1701 | 5376 | 13125 | 27216 | 50421 | 86016 | 137781 | 307461 | 435456 |
| 22 | 352 | 1782 | 5632 | 13750 | 28512 | 52822 | 90112 | 144342 | 322102 | 456192 |
| 23 | 368 | 1863 | 5888 | 14375 | 29808 | 55223 | 94208 | 150903 | 336743 | 476928 |
| 24 | 384 | 1944 | 6144 | 15000 | 31104 | 57624 | 98304 | 157464 | 351384 | 497664 |
| 25 | 400 | 2025 | 6400 | 15625 | 32400 | 60025 | 102400 | 164025 | 366025 | 518400 |
| 26 | 416 | 2106 | 6656 | 16250 | 33696 | 62426 | 106496 | 170586 | 380666 | 539136 |
| 27 | 432 | 2187 | 6912 | 16875 | 34992 | 64827 | 110592 | 177147 | 395307 | 559872 |
| 28 | 448 | 2268 | 7168 | 17500 | 36288 | 67228 | 114688 | 183708 | 409948 | 580608 |
| 29 | 464 | 2349 | 7424 | 18125 | 37584 | 69629 | 118784 | 190269 | 424589 | 601344 |
| 30 | 480 | 2430 | 7680 | 18750 | 38880 | 72030 | 122880 | 196830 | 439230 | 622080 |
| 31 | 496 | 2511 | 7936 | 19375 | 40176 | 74431 | 126976 | 203391 | 453871 | 642816 |
| 32 | 512 | 2592 | 8192 | 20000 | 41472 | 76832 | 131072 | 209952 | 468512 | 663552 |
| 33 | 528 | 2673 | 8448 | 20625 | 42768 | 79233 | 135168 | 216513 | 483153 | 684288 |
| 34 | 544 | 2754 | 8704 | 21250 | 44064 | 81634 | 139264 | 223074 | 497794 | 705024 |
| 35 | 560 | 2835 | 8960 | 21875 | 45360 | 84035 | 143360 | 229635 | 512435 | 725760 |
| 36 | 576 | 2916 | 9216 | 22500 | 46656 | 86436 | 147456 | 236196 | 527076 | 746496 |
| 37 | 592 | 2997 | 9472 | 23125 | 47952 | 88837 | 151552 | 242757 | 541717 | 767232 |
| 38 | 608 | 3078 | 9728 | 23750 | 49248 | 91238 | 155648 | 249318 | 556358 | 787968 |
| 39 | 624 | 3159 | 9984 | 24375 | 50544 | 93639 | 159744 | 255879 | 570999 | 808704 |
| 40 | 640 | 3240 | 10240 | 25000 | 51840 | 96040 | 163840 | 262440 | 585640 | 829440 |
| 41 | 656 | 3321 | 10496 | 25625 | 53136 | 98441 | 167936 | 269001 | 600281 | 850176 |
| 42 | 672 | 3402 | 10752 | 26250 | 54432 | 100842 | 172032 | 275562 | 614922 | 870912 |
| 43 | 688 | 3483 | 11008 | 26875 | 55728 | 103243 | 176128 | 282123 | 629563 | 891648 |
| 44 | 704 | 3564 | 11264 | 27500 | 57024 | 105644 | 180224 | 288684 | 644204 | 912384 |
| 45 | 720 | 3645 | 11520 | 28125 | 58320 | 108045 | 184320 | 295245 | 658845 | 933120 |
| 46 | 736 | 3726 | 11776 | 28750 | 59616 | 110446 | 188416 | 301806 | 673486 | 953856 |
| 47 | 752 | 3807 | 12032 | 29375 | 60912 | 112847 | 192512 | 308367 | 688127 | 974592 |
| 48 | 768 | 3888 | 12288 | 30000 | 62208 | 115248 | 196608 | 314928 | 702768 | 995328 |
| 49 | 784 | 3969 | 12544 | 30625 | 63504 | 117649 | 200704 | 321489 | 717409 | 1016064 |
| 50 | 800 | 4050 | 12800 | 31250 | 64800 | 120050 | 204800 | 328050 | 732050 | 1036800 |

Продолжение табл. IV

| n_j | $x=2$ | $x=3$ | $x=4$ | $x=5$ | $x=6$ | $x=7$ | $x=8$ | $x=9$ | $x=11$ |
|-------|-------|-------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| 51 | 816 | 4 131 | 13 056 | 31 875 | 66 096 | 122 451 | 208 896 | 334 611 | 746 691 |
| 52 | 832 | 4 212 | 13 312 | 32 500 | 67 392 | 124 852 | 212 992 | 341 172 | 761 332 |
| 53 | 848 | 4 293 | 13 568 | 33 125 | 68 688 | 127 253 | 217 088 | 347 733 | 775 973 |
| 54 | 864 | 4 374 | 13 824 | 33 750 | 69 984 | 129 654 | 221 184 | 354 294 | 790 614 |
| 55 | 880 | 4 455 | 14 080 | 34 375 | 71 280 | 132 055 | 225 280 | 360 855 | 805 255 |
| 55 | 896 | 4 536 | 14 336 | 35 000 | 72 576 | 134 456 | 229 376 | 367 416 | 819 896 |
| 57 | 912 | 4 617 | 14 592 | 35 625 | 73 872 | 136 857 | 233 472 | 373 977 | 834 537 |
| 58 | 928 | 4 698 | 14 848 | 36 250 | 75 168 | 139 258 | 237 568 | 380 538 | 849 178 |
| 59 | 944 | 4 779 | 15 104 | 36 875 | 76 464 | 141 659 | 241 664 | 387 099 | 863 819 |
| 60 | 960 | 4 860 | 15 360 | 37 500 | 77 760 | 144 060 | 245 760 | 393 660 | 878 460 |
| 61 | 976 | 4 941 | 15 616 | 38 125 | 79 056 | 146 461 | 249 856 | 400 221 | 893 101 |
| 62 | 992 | 5 022 | 15 872 | 38 750 | 80 352 | 148 862 | 253 952 | 406 782 | 907 742 |
| 63 | 1 008 | 5 103 | 16 128 | 39 375 | 81 648 | 151 263 | 258 048 | 413 343 | 922 383 |
| 64 | 1 024 | 5 184 | 16 384 | 40 000 | 82 944 | 153 664 | 262 144 | 419 904 | 937 024 |
| 65 | 1 040 | 5 265 | 16 640 | 40 625 | 84 240 | 156 065 | 266 240 | 426 465 | 951 665 |
| 66 | 1 056 | 5 346 | 16 896 | 41 250 | 85 536 | 158 466 | 270 336 | 433 026 | 966 306 |
| 67 | 1 072 | 5 427 | 17 152 | 41 875 | 86 832 | 160 867 | 274 432 | 439 587 | 980 947 |
| 68 | 1 088 | 5 508 | 17 408 | 42 500 | 88 128 | 163 268 | 278 528 | 446 148 | 995 588 |
| 69 | 1 104 | 5 589 | 17 664 | 43 125 | 89 424 | 165 662 | 282 624 | 452 209 | 1 010 229 |
| 70 | 1 120 | 5 670 | 17 920 | 43 750 | 90 720 | 168 070 | 286 720 | 459 270 | 1 024 870 |
| 71 | 1 136 | 5 751 | 18 176 | 44 375 | 92 016 | 170 471 | 290 816 | 465 831 | 1 039 511 |
| 72 | 1 152 | 5 832 | 18 432 | 45 000 | 93 312 | 172 872 | 294 912 | 472 392 | 1 054 152 |
| 73 | 1 168 | 5 913 | 18 688 | 45 625 | 94 608 | 175 273 | 299 008 | 478 953 | 1 068 793 |
| 74 | 1 184 | 5 994 | 18 944 | 46 250 | 95 904 | 177 674 | 303 104 | 485 514 | 1 083 434 |
| 75 | 1 200 | 6 075 | 19 200 | 46 875 | 97 200 | 180 075 | 307 200 | 492 075 | 1 098 075 |
| 76 | 1 216 | 6 156 | 19 456 | 47 500 | 98 496 | 182 476 | 311 296 | 498 636 | 1 112 716 |
| 77 | 1 232 | 6 237 | 19 712 | 48 125 | 99 792 | 184 877 | 315 392 | 505 197 | 1 127 357 |
| 78 | 1 248 | 6 318 | 19 968 | 48 750 | 101 088 | 187 278 | 319 488 | 511 758 | 1 141 998 |
| 79 | 1 264 | 6 399 | 20 224 | 49 375 | 102 384 | 189 679 | 323 584 | 518 319 | 1 156 639 |
| 80 | 1 280 | 6 480 | 20 480 | 50 000 | 103 680 | 192 080 | 327 680 | 524 880 | 1 171 280 |
| 81 | 1 296 | 6 561 | 20 736 | 50 625 | 104 976 | 194 481 | 331 776 | 531 441 | 1 185 921 |
| 82 | 1 312 | 6 642 | 20 992 | 51 250 | 106 272 | 196 882 | 335 872 | 538 002 | 1 200 562 |
| 83 | 1 328 | 6 723 | 21 248 | 51 875 | 107 568 | 199 283 | 339 968 | 544 563 | 1 215 203 |
| 84 | 1 344 | 6 804 | 21 504 | 52 500 | 108 864 | 201 684 | 344 064 | 551 124 | 1 229 844 |
| 85 | 1 360 | 6 885 | 21 760 | 53 125 | 110 160 | 204 085 | 348 160 | 557 685 | 1 244 485 |
| 86 | 1 376 | 6 966 | 22 016 | 53 750 | 111 456 | 206 486 | 352 256 | 564 246 | 1 259 126 |
| 87 | 1 392 | 7 047 | 22 272 | 54 375 | 112 752 | 208 887 | 356 352 | 570 807 | 1 273 767 |
| 88 | 1 408 | 7 128 | 22 528 | 55 000 | 114 048 | 211 288 | 360 448 | 577 368 | 1 288 408 |
| 89 | 1 424 | 7 209 | 22 784 | 55 625 | 115 344 | 213 689 | 364 544 | 583 929 | 1 303 049 |
| 90 | 1 440 | 7 290 | 23 040 | 56 250 | 116 640 | 216 090 | 368 640 | 590 490 | 1 317 690 |
| 91 | 1 456 | 7 371 | 23 296 | 56 875 | 117 936 | 218 491 | 372 736 | 597 051 | 1 332 331 |
| 92 | 1 472 | 7 452 | 23 552 | 57 500 | 119 232 | 220 892 | 376 832 | 603 612 | 1 346 972 |
| 93 | 1 488 | 7 533 | 23 808 | 58 125 | 120 528 | 223 293 | 380 928 | 610 173 | 1 361 613 |
| 94 | 1 504 | 7 614 | 24 064 | 58 750 | 121 824 | 225 694 | 385 024 | 616 734 | 1 376 254 |
| 95 | 1 520 | 7 695 | 24 320 | 59 375 | 123 120 | 228 095 | 389 120 | 623 295 | 1 390 895 |
| 96 | 1 536 | 7 776 | 24 576 | 60 000 | 124 416 | 230 496 | 393 216 | 629 856 | 1 405 536 |
| 97 | 1 552 | 7 857 | 24 832 | 60 625 | 125 712 | 232 897 | 397 312 | 636 417 | 1 420 177 |
| 98 | 1 568 | 7 938 | 25 088 | 61 250 | 127 008 | 235 298 | 401 408 | 642 978 | 1 434 818 |
| 99 | 1 584 | 8 019 | 25 344 | 61 875 | 128 304 | 237 699 | 405 504 | 649 539 | 1 449 459 |
| 100 | 1 600 | 8 100 | 25 600 | 62 500 | 129 600 | 240 100 | 409 600 | 656 100 | 1 464 100 |

Продолжение табл. IV

| n_j | $x=2$ | $x=3$ | $x=4$ | $x=5$ | $x=6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 101 | 1616 | 8181 | 25856 | 63125 | 130896 |
| 102 | 1632 | 8262 | 26112 | 63750 | 132192 |
| 103 | 1648 | 8343 | 26368 | 64375 | 133488 |
| 104 | 1664 | 8424 | 26624 | 65000 | 134784 |
| 105 | 1680 | 8505 | 26880 | 65625 | 136080 |
| 106 | 1696 | 8586 | 27136 | 66250 | 137376 |
| 107 | 1712 | 8667 | 27392 | 66875 | 138672 |
| 108 | 1728 | 8748 | 27648 | 67500 | 139968 |
| 109 | 1744 | 8829 | 27904 | 68125 | 141264 |
| 110 | 1760 | 8910 | 28160 | 68750 | 142560 |
| 111 | 1776 | 8991 | 28416 | 69375 | 143856 |
| 112 | 1792 | 9072 | 28672 | 70000 | 145152 |
| 113 | 1808 | 9153 | 28928 | 70625 | 146448 |
| 114 | 1824 | 9234 | 29184 | 71250 | 147744 |
| 115 | 1840 | 9315 | 29440 | 71875 | 149040 |
| 116 | 1856 | 9396 | 29696 | 72500 | 150336 |
| 117 | 1872 | 9477 | 29952 | 73125 | 151632 |
| 118 | 1888 | 9558 | 30208 | 73750 | 152928 |
| 119 | 1904 | 9639 | 30464 | 74375 | 154224 |
| 120 | 1920 | 9720 | 30720 | 75000 | 155520 |
| 121 | 1936 | 9801 | 30976 | 75625 | 156816 |
| 122 | 1952 | 9882 | 31232 | 76250 | 158112 |
| 123 | 1968 | 9963 | 31488 | 76875 | 159408 |
| 124 | 1984 | 10044 | 31744 | 77500 | 160704 |
| 125 | 2000 | 10125 | 32000 | 78125 | 162000 |
| 126 | 2016 | 10206 | 32256 | 78750 | 163296 |
| 127 | 2032 | 10287 | 32512 | 79375 | 164592 |
| 128 | 2048 | 10369 | 32768 | 80000 | 165888 |
| 129 | 2064 | 10449 | 33024 | 80625 | 167184 |
| 130 | 2080 | 10530 | 33280 | 81250 | 168480 |
| 131 | 2096 | 10611 | 33536 | 81875 | 169776 |
| 132 | 2112 | 10692 | 33792 | 82500 | 171072 |
| 133 | 2128 | 10773 | 34048 | 83125 | 172368 |
| 134 | 2144 | 10854 | 34304 | 83750 | 173664 |
| 135 | 2160 | 10935 | 34560 | 84375 | 174960 |
| 136 | 2176 | 11016 | 34816 | 85000 | 176256 |
| 137 | 2192 | 11097 | 35072 | 85625 | 177552 |
| 138 | 2208 | 11178 | 35328 | 86250 | 178848 |
| 139 | 2224 | 11259 | 35584 | 86875 | 180144 |
| 140 | 2240 | 11340 | 35840 | 87500 | 181440 |
| 141 | 2256 | 11421 | 36096 | 88125 | 182736 |
| 142 | 2272 | 11502 | 36352 | 88750 | 184032 |
| 143 | 2288 | 11583 | 36608 | 89375 | 185328 |
| 144 | 2304 | 11664 | 36864 | 90000 | 186624 |
| 145 | 2320 | 11745 | 37120 | 90625 | 187920 |
| 146 | 2336 | 11826 | 37376 | 91250 | 189216 |
| 147 | 2352 | 11907 | 37632 | 91875 | 190512 |
| 148 | 2368 | 11988 | 37888 | 92500 | 191808 |
| 149 | 2384 | 12069 | 38144 | 93125 | 193104 |
| 150 | 2400 | 12150 | 38400 | 93750 | 194400 |

| n_j | $x=2$ | $x=3$ | $x=4$ | $x=5$ |
|-------|-------|-------|-------|--------|
| 151 | 2416 | 12231 | 38656 | 94375 |
| 152 | 2432 | 12312 | 38912 | 95000 |
| 153 | 2448 | 12393 | 39168 | 95625 |
| 154 | 2464 | 12474 | 39424 | 96250 |
| 155 | 2480 | 12555 | 39680 | 96875 |
| 156 | 2496 | 12636 | 39936 | 97500 |
| 157 | 2512 | 12717 | 40192 | 98125 |
| 158 | 2528 | 12798 | 40448 | 98750 |
| 159 | 2544 | 12879 | 40704 | 99375 |
| 160 | 2560 | 12960 | 40960 | 100000 |
| 161 | 2576 | 13041 | 41216 | 100625 |
| 162 | 2592 | 13122 | 41472 | 101250 |
| 163 | 2608 | 13203 | 41728 | 101875 |
| 164 | 2624 | 13284 | 41984 | 102500 |
| 165 | 2640 | 13365 | 42240 | 103125 |
| 166 | 2656 | 13446 | 42496 | 103750 |
| 167 | 2672 | 13527 | 42752 | 104375 |
| 168 | 2688 | 13608 | 43008 | 105000 |
| 169 | 2704 | 13689 | 43264 | 105625 |
| 170 | 2720 | 13770 | 43520 | 106250 |
| 171 | 2736 | 13851 | 43776 | 106875 |
| 172 | 2752 | 13932 | 44032 | 107500 |
| 173 | 2768 | 14013 | 44288 | 108125 |
| 174 | 2784 | 14094 | 44544 | 108750 |
| 175 | 2800 | 14175 | 44800 | 109375 |
| 176 | 2816 | 14256 | 45056 | 110000 |
| 177 | 2832 | 14337 | 45312 | 110625 |
| 178 | 2848 | 14418 | 45568 | 111250 |
| 179 | 2864 | 14499 | 45824 | 111875 |
| 180 | 2880 | 14580 | 46080 | 112500 |
| 181 | 2896 | 14661 | 46336 | 113125 |
| 182 | 2912 | 14742 | 46592 | 113750 |
| 183 | 2928 | 14823 | 46848 | 114375 |
| 184 | 2944 | 14904 | 47104 | 115000 |
| 185 | 2960 | 14985 | 47360 | 115625 |
| 186 | 2976 | 15066 | 47616 | 116250 |
| 187 | 2992 | 15147 | 47872 | 116875 |
| 188 | 3008 | 15228 | 48128 | 117500 |
| 189 | 3024 | 15309 | 48384 | 118125 |
| 190 | 3040 | 15390 | 48640 | 118750 |
| 191 | 3056 | 15471 | 48896 | 119375 |
| 192 | 3072 | 15552 | 49152 | 120000 |
| 193 | 3088 | 15633 | 49408 | 120625 |
| 194 | 3104 | 15714 | 49664 | 121250 |
| 195 | 3120 | 15795 | 49920 | 121875 |
| 196 | 3136 | 15876 | 50176 | 122500 |
| 197 | 3152 | 15957 | 50432 | 123125 |
| 198 | 3168 | 16038 | 50688 | 123750 |
| 199 | 3184 | 16119 | 50944 | 124375 |
| 200 | 3200 | 16200 | 51200 | 125000 |

Продолжение табл. IV

| n_j | $x = 2$ | $x = 3$ | $x = 4$ | $x = 5$ |
|-------|---------|---------|---------|---------|
| 201 | 3216 | 16281 | 51456 | 125625 |
| 202 | 3232 | 16362 | 51712 | 126250 |
| 203 | 3248 | 16443 | 51968 | 126875 |
| 204 | 3264 | 16524 | 52224 | 127500 |
| 205 | 3280 | 16605 | 52480 | 128125 |
| 206 | 3296 | 16686 | 52736 | 128750 |
| 207 | 3312 | 16767 | 52992 | 129375 |
| 208 | 3328 | 16848 | 53248 | 130000 |
| 209 | 3344 | 16929 | 53504 | 130625 |
| 210 | 3360 | 17010 | 53760 | 131250 |
| 211 | 3376 | 17091 | 54016 | 131875 |
| 212 | 3392 | 17172 | 54272 | 132500 |
| 213 | 3408 | 17253 | 54528 | 133125 |
| 214 | 3424 | 17334 | 54784 | 133750 |
| 215 | 3440 | 17415 | 55040 | 134375 |
| 216 | 3456 | 17496 | 55296 | 135000 |
| 217 | 3472 | 17577 | 55552 | 135625 |
| 218 | 3488 | 17658 | 55808 | 136250 |
| 219 | 3504 | 17739 | 56064 | 136875 |
| 220 | 3520 | 17820 | 56320 | 137500 |
| 221 | 3536 | 17901 | 56576 | 138125 |
| 222 | 3552 | 17982 | 56832 | 138750 |
| 223 | 3568 | 18063 | 57088 | 139375 |
| 224 | 3584 | 18144 | 57344 | 140000 |
| 225 | 3600 | 18225 | 57600 | 140625 |
| 226 | 3616 | 18306 | 57856 | 141250 |
| 227 | 3632 | 18387 | 58112 | 141875 |
| 228 | 3648 | 18468 | 58368 | 142500 |
| 229 | 3664 | 18549 | 58624 | 143125 |
| 230 | 3680 | 18630 | 58880 | 143750 |
| 231 | 3696 | 18711 | 59136 | 144375 |
| 232 | 3712 | 18792 | 59392 | 145000 |
| 233 | 3728 | 18873 | 59648 | 145625 |
| 234 | 3744 | 18954 | 59904 | 146250 |
| 235 | 3760 | 19035 | 60160 | 146875 |
| 236 | 3776 | 19116 | 60416 | 147500 |
| 237 | 3792 | 19197 | 60672 | 148125 |
| 238 | 3808 | 19278 | 60928 | 148750 |
| 239 | 3824 | 19359 | 61184 | 149375 |
| 240 | 3840 | 19440 | 61440 | 150000 |
| 241 | 3856 | 19521 | 61696 | 150625 |
| 242 | 3872 | 19602 | 61952 | 151250 |
| 243 | 3888 | 19683 | 62208 | 151875 |
| 244 | 3904 | 19764 | 62464 | 152500 |
| 245 | 3920 | 19845 | 62720 | 153125 |
| 246 | 3936 | 19926 | 62976 | 153750 |
| 247 | 3952 | 20007 | 63232 | 154375 |
| 248 | 3968 | 20088 | 63488 | 155000 |
| 249 | 3984 | 20169 | 63744 | 155625 |
| 250 | 4000 | 20250 | 64000 | 156250 |

| n_j | $x = 2$ | $x = 3$ | $x = 4$ | $x = 5$ |
|-------|---------|---------|---------|---------|
| 251 | 4016 | 20331 | 64256 | 156875 |
| 252 | 4032 | 20412 | 64512 | 157500 |
| 253 | 4048 | 20493 | 64768 | 158125 |
| 254 | 4064 | 20574 | 65024 | 158750 |
| 255 | 4080 | 20655 | 65280 | 159375 |
| 256 | 4096 | 20736 | 65536 | 160000 |
| 257 | 4112 | 20817 | 65792 | 160625 |
| 258 | 4128 | 20898 | 66048 | 161250 |
| 259 | 4144 | 20979 | 66304 | 161875 |
| 260 | 4160 | 21060 | 66560 | 162500 |
| 261 | 4176 | 21141 | 66816 | 163125 |
| 262 | 4192 | 21222 | 67072 | 163750 |
| 263 | 4208 | 21303 | 67328 | 164375 |
| 264 | 4224 | 21384 | 67584 | 165000 |
| 265 | 4240 | 21465 | 67840 | 165625 |
| 266 | 4256 | 21546 | 68096 | 166250 |
| 267 | 4272 | 21627 | 68352 | 166875 |
| 268 | 4288 | 21708 | 68608 | 167500 |
| 269 | 4304 | 21789 | 68864 | 168125 |
| 270 | 4320 | 21870 | 69120 | 168750 |
| 271 | 4336 | 21951 | 69376 | 169375 |
| 272 | 4352 | 22032 | 69632 | 170000 |
| 273 | 4368 | 22113 | 69888 | 170625 |
| 274 | 4384 | 22194 | 70144 | 171250 |
| 275 | 4400 | 22275 | 70400 | 171875 |
| 276 | 4416 | 22356 | 70656 | 172500 |
| 277 | 4432 | 22437 | 70912 | 173125 |
| 278 | 4448 | 22518 | 71168 | 173750 |
| 279 | 4464 | 22599 | 71424 | 174375 |
| 280 | 4480 | 22680 | 71680 | 175000 |
| 281 | 4496 | 22761 | 71936 | 175625 |
| 282 | 4512 | 22842 | 72192 | 176250 |
| 283 | 4528 | 22923 | 72448 | 176875 |
| 284 | 4544 | 23004 | 72704 | 177500 |
| 285 | 4560 | 23085 | 72960 | 178125 |
| 286 | 4576 | 23166 | 73216 | 178750 |
| 287 | 4592 | 23247 | 73472 | 179375 |
| 288 | 4608 | 23328 | 73728 | 180000 |
| 289 | 4624 | 23409 | 73984 | 180625 |
| 290 | 4640 | 23490 | 74240 | 181250 |
| 291 | 4656 | 23571 | 74496 | 181875 |
| 292 | 4672 | 23652 | 74752 | 182500 |
| 293 | 4688 | 23733 | 75008 | 183125 |
| 294 | 4704 | 23814 | 75264 | 183750 |
| 295 | 4720 | 23895 | 75520 | 184375 |
| 296 | 4736 | 23976 | 75776 | 185000 |
| 297 | 4752 | 24057 | 76032 | 185625 |
| 298 | 4768 | 24138 | 76288 | 186250 |
| 299 | 4784 | 24219 | 76544 | 186875 |
| 300 | 4800 | 24300 | 76800 | 187500 |

Логарифмы факториалов ($\lg n!$)

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | — | 0,000 0000 | 0,301 0300 | 0,778 1513 | 1,380 2112 |
| 1 | 6,559 7630 | 7,601 1557 | 8,680 3370 | 9,794 2803 | 10,940 4084 |
| 2 | 18,386 1246 | 19,708 3439 | 21,050 7666 | 22,412 4944 | 23,792 7057 |
| 3 | 32,423 6601 | 33,915 0218 | 35,420 1717 | 36,938 6857 | 38,470 1646 |
| 4 | 47,911 6451 | 49,524 4289 | 51,147 6782 | 52,781 1467 | 54,424 5993 |
| 5 | 64,483 0749 | 66,190 6450 | 67,906 6484 | 69,630 9243 | 71,363 3180 |
| 6 | 81,920 1748 | 83,705 5047 | 85,497 8964 | 87,297 2369 | 89,103 4169 |
| 7 | 100,078 4050 | 101,929 6634 | 103,786 9959 | 105,650 3187 | 107,519 5505 |
| 8 | 118,854 7277 | 120,763 2127 | 122,677 0266 | 124,596 1047 | 126,520 3840 |
| 9 | 138,171 9358 | 140,130 9772 | 142,094 7650 | 144,063 2480 | 146,036 3758 |
| 10 | 157,970 0037 | 159,974 3250 | 161,982 9252 | 163,995 7624 | 166,012 7958 |
| 11 | 178,200 9176 | 180,246 2406 | 182,295 4586 | 184,348 5371 | 186,405 4419 |
| 12 | 198,825 3938 | 200,908 1792 | 202,994 5390 | 205,084 4442 | 207,177 8658 |
| 13 | 219,810 6932 | 221,927 9645 | 224,048 5384 | 226,172 3900 | 228,299 4948 |
| 14 | 241,129 1100 | 243,278 3291 | 245,430 6174 | 247,585 9535 | 249,744 3160 |
| 15 | 262,756 8934 | 264,935 8704 | 267,117 7139 | 269,307 4054 | 271,489 9261 |
| 16 | 284,673 4562 | 286,880 2821 | 289,089 7971 | 291,301 9847 | 293,516 8286 |
| 17 | 306,860 7820 | 309,093 7781 | 311,329 3066 | 313,567 3527 | 315,807 9019 |
| 18 | 329,302 9714 | 331,560 6500 | 333,820 7214 | 336,083 1725 | 338,347 9903 |
| 19 | 351,985 8898 | 354,266 9232 | 356,550 2244 | 358,835 7817 | 361,123 5835 |
| 20 | 374,896 8886 | 377,200 0847 | 379,505 4361 | 381,812 9321 | 384,122 5623 |
| 21 | 398,024 5826 | 400,348 8651 | 402,675 2009 | 405,003 5805 | 407,333 9943 |
| 22 | 421,358 6695 | 423,703 0618 | 426,049 4148 | 428,397 7197 | 430,747 9677 |
| 23 | 444,889 7827 | 447,253 3946 | 449,618 8826 | 451,986 2385 | 454,355 4544 |
| 24 | 468,609 3687 | 470,991 3857 | 473,375 2011 | 475,760 8074 | 478,148 1972 |
| 25 | 492,509 5864 | 494,909 2601 | 497,310 6607 | 499,713 7812 | 502,118 6149 |
| 26 | 516,583 2210 | 518,999 8615 | 521,418 1628 | 523,838 1185 | 526,259 7225 |
| 27 | 540,823 6121 | 543,256 5814 | 545,691 1503 | 548,127 3129 | 550,565 0635 |
| 28 | 565,224 5920 | 567,673 2984 | 570,123 5475 | 572,575 3339 | 575,028 6523 |
| 29 | 589,780 4334 | 592,244 3264 | 594,709 7092 | 597,176 5768 | 599,644 9242 |
| 30 | 614,485 8030 | 616,964 3695 | 619,444 3765 | 621,925 8191 | 624,408 6927 |
| 31 | 639,335 7232 | 641,828 4836 | 644,322 6382 | 646,818 1825 | 649,315 1122 |
| 32 | 664,325 5369 | 666,832 0419 | 669,339 8978 | 671,849 1003 | 674,359 6453 |
| 33 | 689,450 8777 | 691,970 7057 | 694,491 8438 | 697,014 2880 | 699,538 0345 |
| 34 | 714,707 6438 | 717,240 3982 | 719,774 4243 | 722,309 7184 | 724,846 2768 |
| 35 | 740,091 9742 | 742,637 2813 | 745,183 8240 | 747,731 5987 | 750,280 6020 |
| 36 | 765,600 2285 | 768,157 7357 | 770,716 4443 | 773,276 3509 | 775,837 4523 |
| 37 | 791,228 9682 | 793,798 3421 | 796,368 8851 | 798,940 5939 | 801,513 4655 |
| 38 | 816,974 9406 | 819,555 8655 | 822,137 9289 | 824,721 1277 | 827,305 4589 |
| 39 | 842,835 0638 | 845,427 2406 | 848,020 5267 | 850,614 9192 | 853,210 4154 |
| 40 | 868,806 4142 | 871,409 5586 | 874,013 7846 | 876,619 0896 | 879,225 4710 |
| 41 | 894,886 2138 | 897,500 0556 | 900,114 9528 | 902,730 9029 | 905,347 9032 |
| 42 | 921,071 8203 | 923,696 1024 | 926,321 4149 | 928,947 7552 | 931,575 1211 |
| 43 | 947,360 7170 | 949,995 1943 | 952,630 6780 | 955,267 1659 | 957,904 6557 |
| 44 | 973,750 5041 | 976,394 9427 | 979,040 3650 | 981,686 7687 | 984,334 1517 |
| 45 | 1000,238 8910 | 1002,893 0675 | 1005,548 2059 | 1008,204 3041 | 1010,861 3600 |
| 46 | 1026,823 6884 | 1029,487 3893 | 1032,152 0313 | 1034,817 6123 | 1037,484 1303 |
| 47 | 1053,502 8026 | 1056,175 8235 | 1058,849 7655 | 1061,524 6266 | 1064,200 4050 |
| 48 | 1080,274 2286 | 1082,956 3737 | 1085,639 4207 | 1088,323 3678 | 1091,008 2132 |
| 49 | 1107,136 0449 | 1109,827 1264 | 1112,519 0915 | 1115,211 9384 | 1117,905 6654 |

Продолжение табл. V

| n | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | 2,079 1812 | 2,857 3325 | 3,702 4305 | 4,605 5205 | 5,559 7630 |
| 1 | 12,116 4996 | 13,320 6196 | 14,551 0685 | 15,806 3410 | 17,085 0946 |
| 2 | 25,190 6457 | 26,605 6190 | 28,036 9828 | 29,484 1408 | 30,946 5388 |
| 3 | 40,014 2326 | 41,570 5351 | 43,138 7369 | 44,718 5205 | 46,309 5851 |
| 4 | 56,077 8119 | 57,740 5697 | 59,412 6676 | 61,093 9088 | 62,784 1049 |
| 5 | 73,103 6807 | 74,851 8687 | 76,607 7436 | 78,371 1716 | 80,142 0236 |
| 6 | 90,916 3303 | 92,735 8742 | 94,561 9490 | 96,394 4579 | 98,233 3070 |
| 7 | 109,394 6117 | 111,275 4253 | 113,161 9160 | 115,054 0106 | 116,951 6377 |
| 8 | 128,449 8029 | 130,384 3013 | 132,323 8206 | 134,268 3033 | 136,217 6933 |
| 9 | 148,014 0994 | 149,996 3707 | 151,983 1424 | 153,974 3685 | 155,970 0037 |
| 10 | 168,033 851 | 170,059 2909 | 172,088 6747 | 174,122 0985 | 176,159 5250 |
| 11 | 188,466 1398 | 190,530 5978 | 192,598 7836 | 194,670 6656 | 196,746 2126 |
| 12 | 209,274 7759 | 211,375 1464 | 213,478 9501 | 215,586 1601 | 217,696 7498 |
| 13 | 230,429 8286 | 232,563 3675 | 234,700 0881 | 236,839 9672 | 238,982 9820 |
| 14 | 251,905 6840 | 254,070 0368 | 256,237 3542 | 258,407 6159 | 260,580 8022 |
| 15 | 273,680 2578 | 275,873 3824 | 278,069 2820 | 280,267 9391 | 282,469 3363 |
| 16 | 295,734 3125 | 297,954 4206 | 300,177 1371 | 302,402 4464 | 304,630 3331 |
| 17 | 318,050 9400 | 320,296 4526 | 322,544 4259 | 324,794 8459 | 327,047 6989 |
| 18 | 340,615 1620 | 342,884 6750 | 345,156 5166 | 347,430 6744 | 349,707 1362 |
| 19 | 363,413 6181 | 365,705 8742 | 368,000 3404 | 370,297 0056 | 372,595 8586 |
| 20 | 386,434 3161 | 388,748 1834 | 391,064 1537 | 393,382 2170 | 395,702 3633 |
| 21 | 409,666 4328 | 412,000 8865 | 414,337 3463 | 416,675 8027 | 419,016 2469 |
| 22 | 433,100 1502 | 435,454 2586 | 437,810 2845 | 440,168 2193 | 442,528 0548 |
| 23 | 456,726 5223 | 459,099 4343 | 461,474 1826 | 463,850 7596 | 466,229 1575 |
| 24 | 480,537 3633 | 482,928 2984 | 485,320 9954 | 487,715 4470 | 490,111 6464 |
| 25 | 504,525 1551 | 506,933 3950 | 509,343 3282 | 511,754 9479 | 514,168 2476 |
| 26 | 528,682 9683 | 531,107 8500 | 533,534 3612 | 535,962 4960 | 538,392 2483 |
| 27 | 553,004 3962 | 555,445 3052 | 557,887 7850 | 560,331 8298 | 562,777 4340 |
| 28 | 577,483 4971 | 579,939 8631 | 582,397 7450 | 584,857 1375 | 587,318 0354 |
| 29 | 602,114 7462 | 604,586 0379 | 607,058 7943 | 609,533 0106 | 612,008 6818 |
| 30 | 626,892 9925 | 629,378 7140 | 631,865 8523 | 634,354 4031 | 636,844 3515 |
| 31 | 651,813 4227 | 654,313 1098 | 656,814 1691 | 659,316 5962 | 661,820 3869 |
| 32 | 676,871 5287 | 679,384 7463 | 681,899 2940 | 684,415 1679 | 686,932 3638 |
| 33 | 702,063 0793 | 704,589 4186 | 707,117 0485 | 709,645 9652 | 712,176 1649 |
| 34 | 727,384 0959 | 729,923 1720 | 732,463 5015 | 735,005 0807 | 737,547 9062 |
| 35 | 752,830 8303 | 755,382 2803 | 757,934 9485 | 760,488 8316 | 763,043 9260 |
| 36 | 778,399 7452 | 780,963 2262 | 783,527 8923 | 786,093 7401 | 788,660 7665 |
| 37 | 804,087 4968 | 806,662 6846 | 809,239 0260 | 811,816 5178 | 814,395 1570 |
| 38 | 829,890 9196 | 832,477 5069 | 835,065 2179 | 837,654 0496 | 840,243 9992 |
| 39 | 855,807 0125 | 858,404 7077 | 861,003 4982 | 863,603 3813 | 866,204 3542 |
| 40 | 881,832 9260 | 884,441 4521 | 887,051 0465 | 889,661 7066 | 892,273 4300 |
| 41 | 907,965 9513 | 910,585 0447 | 913,205 1807 | 915,826 3570 | 918,448 5710 |
| 42 | 934,203 5100 | 936,832 9196 | 939,463 3475 | 942,094 7913 | 944,727 2486 |
| 43 | 960,543 1449 | 963,182 6314 | 965,823 1128 | 968,464 5869 | 971,107 0515 |
| 44 | 986,982 5117 | 989,631 8466 | 992,282 1541 | 994,933 4321 | 997,585 6784 |
| 45 | 1013,519 3714 | 1016,178 3362 | 1018,838 2524 | 1021,499 1179 | 1024,160 9306 |
| 46 | 1040,151 5832 | 1042,819 9692 | 1045,489 2860 | 1048,159 5319 | 1050,830 7047 |
| 47 | 1066,877 0986 | 1069,554 7056 | 1072,233 2239 | 1074,912 6518 | 1077,592 9873 |
| 48 | 1093,693 9549 | 1096,380 5912 | 1099,068 1202 | 1101,756 5400 | 1104,445 8488 |
| 49 | 1120,600 2706 | 1123,295 7523 | 1125,992 1086 | 1128,689 3380 | 1131,387 4385 |

Продолжение табл. V

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 50 | 1134,086 4085 | 1136,786 2463 | 1139,486 9500 | 1142,188 5180 | 1144,890 9485 |
| 51 | 1161,123 5500 | 1163,831 9709 | 1166,541 2409 | 1169,251 3583 | 1171,962 3214 |
| 52 | 1188,245 7693 | 1190,962 6070 | 1193,680 2775 | 1196,398 7792 | 1199,118 1105 |
| 53 | 1215,451 4316 | 1218,176 5262 | 1220,902 4378 | 1223,629 1650 | 1226,356 7063 |
| 54 | 1242,738 9639 | 1245,472 1612 | 1248,202 1605 | 1250,940 9603 | 1253,676 5592 |
| 55 | 1270,106 8513 | 1272,848 0029 | 1275,589 9419 | 1278,332 6671 | 1281,076 1768 |
| 56 | 1297,553 6338 | 1300,302 5967 | 1303,052 3330 | 1305,802 8414 | 1308,554 1205 |
| 57 | 1325,077 9039 | 1327,834 5400 | 1330,591 9360 | 1333,350 0907 | 1336,109 0026 |
| 58 | 1352,678 3031 | 1355,442 4792 | 1358,207 4022 | 1360,973 0708 | 1363,739 4836 |
| 59 | 1380,353 5198 | 1383,125 1073 | 1385,897 4290 | 1388,670 4837 | 1391,444 2702 |
| 60 | 1408,102 2870 | 1410,881 1614 | 1413,660 7579 | 1416,441 0752 | 1419,222 1122 |
| 61 | 1435,923 3796 | 1438,709 4208 | 1441,496 1722 | 1444,283 6327 | 1447,071 8011 |
| 62 | 1463,815 6129 | 1466,608 7045 | 1469,402 4948 | 1472,196 9829 | 1474,992 1675 |
| 63 | 1491,777 8402 | 1494,577 8696 | 1497,378 5866 | 1500,179 9904 | 1502,982 0796 |
| 64 | 1519,808 9514 | 1522,615 8094 | 1525,423 3445 | 1528,231 5554 | 1531,040 4413 |
| 65 | 1547,907 8709 | 1550,721 4519 | 1553,535 6995 | 1556,350 6126 | 1559,166 1904 |
| 66 | 1576,073 5561 | 1578,893 7576 | 1581,714 6156 | 1584,536 1291 | 1587,358 2972 |
| 67 | 1604,304 9963 | 1607,131 7188 | 1609,959 0881 | 1612,787 1031 | 1615,615 7630 |
| 68 | 1632,601 2106 | 1635,434 3577 | 1638,268 1420 | 1641,102 5627 | 1643,937 6189 |
| 69 | 1660,961 2470 | 1663,800 7251 | 1666,640 8312 | 1669,481 5644 | 1672,322 9239 |
| 70 | 1689,384 1813 | 1692,229 8994 | 1695,076 2365 | 1697,923 1918 | 1700,770 7644 |
| 71 | 1717,869 1155 | 1720,720 9851 | 1723,573 4651 | 1726,426 5546 | 1729,280 2529 |
| 72 | 1746,415 1769 | 1749,273 1122 | 1752,131 6494 | 1754,990 7877 | 1757,850 5262 |
| 73 | 1775,021 5170 | 1777,885 4344 | 1780,749 9455 | 1783,615 0495 | 1786,480 7455 |
| 74 | 1803,687 3107 | 1806,557 1289 | 1809,427 5328 | 1812,298 5216 | 1815,170 0946 |
| 75 | 1832,411 7549 | 1835,287 3949 | 1838,163 6127 | 1841,040 4077 | 1843,917 7790 |
| 76 | 1861,194 0682 | 1864,075 4529 | 1866,957 4079 | 1869,839 9324 | 1872,723 0258 |
| 77 | 1890,033 4896 | 1892,920 5440 | 1895,808 1613 | 1898,696 3408 | 1901,585 0817 |
| 78 | 1918,929 2778 | 1921,821 9289 | 1924,715 1356 | 1927,608 8974 | 1930,503 2135 |
| 79 | 1947,880 7107 | 1950,778 8872 | 1953,677 6124 | 1956,576 8856 | 1959,476 7061 |
| 80 | 1976,887 0842 | 1979,790 7168 | 1982,694 8911 | 1985,599 6067 | 1988,504 8627 |
| 81 | 2005,947 7121 | 2008,856 7329 | 2011,766 2890 | 2014,676 3795 | 2017,587 0039 |
| 82 | 2035,061 9248 | 2037,976 2679 | 2040,891 1398 | 2043,806 5396 | 2046,722 4668 |
| 83 | 2064,229 0693 | 2067,148 6703 | 2070,068 7936 | 2072,989 4386 | 2075,910 6047 |
| 84 | 2093,448 5082 | 2096,373 3042 | 2099,298 6162 | 2102,224 4438 | 2105,150 7863 |
| 85 | 2122,719 6192 | 2125,649 5488 | 2128,579 9884 | 2131,510 9374 | 2134,442 3953 |
| 86 | 2152,041 7949 | 2154,976 7980 | 2157,912 3053 | 2160,848 3161 | 2163,784 8298 |
| 87 | 2181,414 4417 | 2184,354 4598 | 2187,294 9763 | 2190,235 9906 | 2193,177 5020 |
| 88 | 2210,836 9793 | 2213,781 9557 | 2216,727 4243 | 2219,673 3850 | 2222,619 8373 |
| 89 | 2240,308 8426 | 2243,258 7203 | 2246,209 0852 | 2249,159 9366 | 2252,111 2742 |
| 90 | 2269,829 4762 | 2272,784 2010 | 2275,739 4075 | 2278,695 0953 | 2281,651 2637 |
| 91 | 2299,398 3389 | 2302,357 8573 | 2305,317 8521 | 2308,278 3229 | 2311,239 2691 |
| 92 | 2329,014 9010 | 2331,979 1606 | 2334,943 8915 | 2337,909 0932 | 2340,874 7652 |
| 93 | 2358,678 6443 | 2361,647 5940 | 2364,617 0099 | 2367,586 8915 | 2370,557 2384 |
| 94 | 2388,389 0618 | 2391,362 6514 | 2394,336 7023 | 2397,311 2140 | 2400,286 1860 |
| 95 | 2418,145 6570 | 2421,123 8376 | 2424,102 4745 | 2427,081 5674 | 2430,061 1158 |
| 96 | 2447,947 9443 | 2450,930 6677 | 2453,913 8428 | 2456,897 4691 | 2459,881 5461 |
| 97 | 2477,795 4479 | 2480,782 6671 | 2483,770 3334 | 2486,758 4462 | 2489,747 0052 |
| 98 | 2507,687 7018 | 2510,679 3708 | 2513,671 4823 | 2516,664 0358 | 2519,657 0309 |
| 99 | 2537,624 2497 | 2540,620 3233 | 2543,616 8350 | 2546,613 7842 | 2549,611 1706 |

Продолжение табл. V

| <i>n</i> | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 50 | 1147,594 2399 | 1150,298 3904 | 1153,003 3984 | 1155,709 2621 | 1158,415 9798 |
| 51 | 1174,674 1286 | 1177,386 7783 | 1180,100 2688 | 1182,814 5986 | 1185,529 7660 |
| 52 | 1201,838 2698 | 1204,559 2556 | 1207,281 0662 | 1210,003 7001 | 1212,727 1558 |
| 53 | 1229,085 0600 | 1231,814 2248 | 1234,544 1991 | 1237,274 9314 | 1240,006 5702 |
| 54 | 1256,412 9557 | 1259,150 1483 | 1261,888 1357 | 1264,626 9162 | 1267,366 4886 |
| 55 | 1283,820 4698 | 1286,565 5446 | 1289,311 3998 | 1292,058 0340 | 1294,805 4458 |
| 56 | 1311,306 1690 | 1314,058 9854 | 1316,812 5684 | 1319,566 9168 | 1322,322 0290 |
| 57 | 1338,868 6704 | 1341,629 0929 | 1344,390 2687 | 1347,152 1965 | 1349,914 8751 |
| 58 | 1366,506 6395 | 1369,274 5371 | 1372,043 1752 | 1374,812 5525 | 1377,582 6678 |
| 59 | 1394,218 7871 | 1396,994 0334 | 1399,770 0077 | 1402,546 7089 | 1405,324 1357 |
| 60 | 1422,003 8676 | 1424,786 3402 | 1427,569 5289 | 1430,353 4324 | 1433,138 0497 |
| 61 | 1449,860 6762 | 1452,650 2569 | 1455,440 5420 | 1458,231 5305 | 1461,023 2212 |
| 62 | 1477,788 0475 | 1480,584 6218 | 1483,381 8894 | 1486,179 8490 | 1488,978 4997 |
| 63 | 1505,784 8533 | 1508,588 3105 | 1511,392 4499 | 1514,197 2706 | 1517,002 7714 |
| 64 | 1533,850 0010 | 1536,660 2335 | 1539,471 1378 | 1542,282 7128 | 1545,094 9575 |
| 65 | 1561,982 4317 | 1564,799 3355 | 1567,616 9009 | 1570,435 1268 | 1573,254 0122 |
| 66 | 1590,181 1188 | 1593,004 5931 | 1595,828 7189 | 1598,653 4954 | 1601,478 9215 |
| 67 | 1618,445 0668 | 1621,275 0135 | 1624,105 6022 | 1626,936 8319 | 1629,768 7016 |
| 68 | 1646,773 3094 | 1649,609 6335 | 1652,446 5903 | 1655,284 1787 | 1658,122 3979 |
| 69 | 1675,164 9387 | 1678,007 5179 | 1680,850 7507 | 1683,694 6051 | 1686,539 0833 |
| 70 | 1703,618 9536 | 1706,467 7583 | 1709,317 1777 | 1712,167 2109 | 1715,017 8572 |
| 71 | 1732,134 5589 | 1734,989 4719 | 1737,844 9911 | 1740,701 1155 | 1743,557 8444 |
| 72 | 1760,710 8642 | 1763,571 8009 | 1766,433 3353 | 1769,295 4667 | 1772,158 1942 |
| 73 | 1789,347 0329 | 1792,213 9107 | 1795,081 3782 | 1797,949 4345 | 1800,818 0790 |
| 74 | 1818,042 2508 | 1820,914 9897 | 1823,788 3103 | 1826,662 2119 | 1829,536 6937 |
| 75 | 1846,795 7260 | 1849,674 2478 | 1852,553 3437 | 1855,433 0129 | 1858,313 2546 |
| 76 | 1875,606 6872 | 1878,490 9160 | 1881,375 7113 | 1884,261 0726 | 1887,146 9989 |
| 77 | 1904,474 3835 | 1907,364 2452 | 1910,254 6662 | 1913,145 6458 | 1916,037 1832 |
| 78 | 1933,398 0831 | 1936,293 5057 | 1939,189 4804 | 1942,086 0066 | 1944,983 0836 |
| 79 | 1962,377 0732 | 1965,277 9863 | 1968,179 4446 | 1971,081 4475 | 1973,983 9943 |
| 80 | 1991,410 6586 | 1994,316 9936 | 1997,223 8672 | 2000,131 2785 | 2003,039 2271 |
| 81 | 2020,498 1615 | 2023,409 8517 | 2026,322 0737 | 2029,234 8270 | 2032,148 1109 |
| 82 | 2049,638 9208 | 2052,555 9008 | 2055,473 4063 | 2058,391 4367 | 2061,309 9912 |
| 83 | 2078,832 2912 | 2081,754 4974 | 2084,677 2229 | 2087,600 4669 | 2090,524 2289 |
| 84 | 2108,077 6430 | 2111,005 0133 | 2113,932 8967 | 2116,861 2926 | 2119,790 2003 |
| 85 | 2137,374 3614 | 2140,306 8352 | 2143,239 8160 | 2146,173 3033 | 2149,107 2964 |
| 86 | 2166,721 8459 | 2169,659 3638 | 2172,597 3829 | 2175,535 9027 | 2178,474 9224 |
| 87 | 2196,119 5101 | 2199,062 0142 | 2202,005 0138 | 2204,948 5083 | 2207,892 4971 |
| 88 | 2225,566 7805 | 2228,514 2143 | 2231,462 1379 | 2234,410 5509 | 2237,359 4526 |
| 89 | 2255,063 0972 | 2258,015 4052 | 2260,968 1976 | 2263,921 4740 | 2266,875 2337 |
| 90 | 2284,607 9123 | 2287,565 0405 | 2290,522 6478 | 2293,480 7336 | 2296,439 2975 |
| 91 | 2314,200 6902 | 2317,162 5856 | 2320,124 9550 | 2323,087 7977 | 2326,051 1132 |
| 92 | 2343,840 9069 | 2346,807 5179 | 2349,774 5977 | 2352,742 1456 | 2355,710 1614 |
| 93 | 2373,528 0500 | 2376,499 3259 | 2379,471 0655 | 2382,443 2683 | 2385,415 9339 |
| 94 | 2403,261 6178 | 2406,237 5089 | 2409,213 8589 | 2412,190 6672 | 2415,167 9334 |
| 95 | 2433,041 1192 | 2436,021 5771 | 2439,002 4890 | 2441,983 8545 | 2444,965 6731 |
| 96 | 2462,866 0734 | 2465,851 0506 | 2468,836 4770 | 2471,822 3524 | 2474,808 6762 |
| 97 | 2492,736 0098 | 2495,725 4596 | 2498,715 3542 | 2501,705 6930 | 2504,696 4757 |
| 98 | 2522,650 4672 | 2525,644 3441 | 2528,638 6612 | 2531,633 4182 | 2534,628 6145 |
| 99 | 2552,608 9937 | 2555,607 2530 | 2558,605 9482 | 2561,605 0787 | 2564,604 6442 |

 $\lg 1000! = 2567,604 6442$

Таблица VI

Значения функции $f(x)$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0 | 39894 | 39892 | 39886 | 39876 | 39862 | 39844 | 39822 | 39797 | 39767 | 39733 |
| 0,1 | 39695 | 39654 | 39608 | 39559 | 39505 | 39448 | 39387 | 39322 | 39253 | 39181 |
| 0,2 | 39104 | 39024 | 38940 | 38853 | 38762 | 38667 | 38568 | 38466 | 38361 | 38251 |
| 0,3 | 38139 | 38023 | 37903 | 37780 | 37654 | 37524 | 37391 | 37255 | 37115 | 36973 |
| 0,4 | 36827 | 36678 | 36526 | 36371 | 36213 | 36053 | 35889 | 35723 | 35553 | 35381 |
| 0,5 | 35207 | 35029 | 34849 | 34667 | 34482 | 34294 | 34105 | 33912 | 33718 | 33521 |
| 0,6 | 33322 | 33121 | 32918 | 32713 | 32506 | 32297 | 32086 | 31874 | 31659 | 31443 |
| 0,7 | 31225 | 31006 | 30785 | 30563 | 30339 | 30114 | 29887 | 29659 | 29430 | 29200 |
| 0,8 | 28969 | 28737 | 28504 | 28269 | 28034 | 27798 | 27562 | 27324 | 27086 | 26848 |
| 0,9 | 26609 | 26369 | 26129 | 25888 | 25647 | 25406 | 25164 | 24923 | 24681 | 24439 |
| 1,0 | 24197 | 23955 | 23713 | 23471 | 23230 | 22988 | 22747 | 22506 | 22265 | 22025 |
| 1,1 | 21785 | 21546 | 21307 | 21069 | 20831 | 20594 | 20327 | 20121 | 19886 | 19652 |
| 1,2 | 19419 | 19186 | 18954 | 18724 | 18494 | 18265 | 18037 | 17810 | 17585 | 17360 |
| 1,3 | 17137 | 16915 | 16694 | 16474 | 16256 | 16038 | 15822 | 15608 | 15395 | 15183 |
| 1,4 | 14973 | 14764 | 14556 | 14350 | 14146 | 13943 | 13742 | 13542 | 13344 | 13147 |
| 1,5 | 12952 | 12758 | 12566 | 12376 | 12188 | 12001 | 11816 | 11632 | 11450 | 11270 |
| 1,6 | 11092 | 10915 | 10741 | 10567 | 10396 | 10226 | 10059 | 09893 | 09728 | 09566 |
| 1,7 | 09405 | 09246 | 09089 | 08933 | 08780 | 08628 | 08478 | 08329 | 08183 | 08038 |
| 1,8 | 07895 | 07754 | 07614 | 07477 | 07341 | 07206 | 07074 | 06943 | 06814 | 06687 |
| 1,9 | 06562 | 06438 | 06316 | 06195 | 06077 | 05959 | 05844 | 05730 | 05618 | 05508 |
| 2,0 | 05399 | 05292 | 05186 | 05082 | 04980 | 04879 | 04780 | 04682 | 04586 | 04491 |
| 2,1 | 04398 | 04307 | 04217 | 04128 | 04041 | 03955 | 03871 | 03788 | 03706 | 03626 |
| 2,2 | 03547 | 03470 | 03394 | 03319 | 03246 | 03174 | 03103 | 03034 | 02965 | 02898 |
| 2,3 | 02833 | 02768 | 02705 | 02643 | 02582 | 02522 | 02463 | 02406 | 02349 | 02294 |
| 2,4 | 02239 | 02186 | 02134 | 02083 | 02033 | 01984 | 01936 | 01888 | 01842 | 01797 |
| 2,5 | 01753 | 01709 | 01667 | 01625 | 01585 | 01545 | 01506 | 01468 | 01431 | 01394 |
| 2,6 | 01358 | 01323 | 01289 | 01256 | 01223 | 01191 | 01160 | 01130 | 01100 | 01071 |
| 2,7 | 01042 | 01014 | 00987 | 00961 | 00935 | 00909 | 00885 | 00861 | 00837 | 00814 |
| 2,8 | 00792 | 00770 | 00748 | 00727 | 00707 | 00687 | 00668 | 00649 | 00631 | 00613 |
| 2,9 | 00595 | 00578 | 00562 | 00545 | 00530 | 00514 | 00499 | 00485 | 00470 | 00457 |
| 3,0 | 00443 | 00430 | 00417 | 00405 | 00393 | 00381 | 00370 | 00358 | 00348 | 00337 |
| 3,1 | 00327 | 00317 | 00307 | 00298 | 00288 | 00279 | 00271 | 00262 | 00254 | 00246 |
| 3,2 | 00238 | 00231 | 00224 | 00216 | 00210 | 00203 | 00196 | 00190 | 00184 | 00178 |
| 3,3 | 00172 | 00167 | 00161 | 00156 | 00151 | 00146 | 00141 | 00136 | 00132 | 00127 |
| 3,4 | 00123 | 00119 | 00115 | 00111 | 00107 | 00104 | 00100 | 00097 | 00094 | 00090 |
| 3,5 | 00087 | 00084 | 00081 | 00079 | 00076 | 00073 | 00071 | 00068 | 00066 | 00063 |
| 3,6 | 00061 | 00059 | 00057 | 00055 | 00053 | 00051 | 00049 | 00047 | 00046 | 00044 |
| 3,7 | 00042 | 00041 | 00039 | 00038 | 00037 | 00035 | 00034 | 00033 | 00031 | 00030 |
| 3,8 | 00029 | 00028 | 00027 | 00026 | 00025 | 00024 | 00023 | 00022 | 00021 | 00021 |
| 3,9 | 00020 | 00019 | 00018 | 00018 | 00017 | 00016 | 00016 | 00015 | 00014 | 00014 |
| 4, | 00013 | 00009 | 00006 | 00004 | 00002 | 00002 | 00001 | 00001 | 00000 | 00000 |

Т а б л и ц а VII

Значения функции $f^*(x)$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0 | 1,00000 | 99995 | 99980 | 99955 | 99920 | 99875 | 99820 | 99755 | 99680 | 99596 |
| 0,1 | 99501 | 99397 | 99283 | 99159 | 99025 | 98881 | 98728 | 98565 | 98393 | 98211 |
| 0,2 | 98020 | 97819 | 97609 | 97390 | 97161 | 96923 | 96676 | 96421 | 96156 | 95882 |
| 0,3 | 95600 | 95309 | 95009 | 94701 | 94384 | 94059 | 93725 | 93384 | 93034 | 92677 |
| 0,4 | 92312 | 91939 | 91558 | 91169 | 90774 | 90371 | 89960 | 89543 | 89119 | 88688 |
| 0,5 | 88250 | 87805 | 87354 | 86897 | 86433 | 85963 | 85487 | 85006 | 84518 | 84025 |
| 0,6 | 83527 | 83023 | 82514 | 82000 | 81481 | 80957 | 80429 | 79896 | 79358 | 78816 |
| 0,7 | 78270 | 77721 | 77167 | 76609 | 76048 | 75484 | 74916 | 74345 | 73771 | 73194 |
| 0,8 | 72615 | 72033 | 71448 | 70861 | 70272 | 69680 | 69087 | 68492 | 67896 | 67297 |
| 0,9 | 66698 | 66097 | 65495 | 64892 | 64288 | 63683 | 63078 | 62472 | 61866 | 61260 |
| 1,0 | 60653 | 60047 | 59440 | 58834 | 58228 | 57623 | 57018 | 56414 | 55811 | 55209 |
| 1,1 | 54607 | 54007 | 53408 | 52811 | 52215 | 51621 | 51028 | 50437 | 49848 | 49260 |
| 1,2 | 48675 | 48092 | 47511 | 46933 | 46357 | 45783 | 45212 | 44644 | 44078 | 43516 |
| 1,3 | 42956 | 42399 | 41845 | 41294 | 40748 | 40202 | 39661 | 39123 | 38589 | 38058 |
| 1,4 | 37531 | 37007 | 36488 | 35971 | 35459 | 34950 | 34445 | 33944 | 33447 | 32954 |
| 1,5 | 32465 | 31980 | 31499 | 31023 | 30550 | 30082 | 29618 | 29158 | 28702 | 28251 |
| 1,6 | 27804 | 27361 | 26923 | 26489 | 26059 | 25634 | 25213 | 24797 | 24385 | 23978 |
| 1,7 | 23575 | 23176 | 22782 | 22392 | 22007 | 21627 | 21250 | 20879 | 20511 | 20148 |
| 1,8 | 19790 | 19436 | 19086 | 18741 | 18400 | 18064 | 17732 | 17404 | 17081 | 16762 |
| 1,9 | 16447 | 16137 | 15831 | 15529 | 15232 | 14938 | 14649 | 14364 | 14083 | 13806 |
| 2,0 | 13534 | 13265 | 13000 | 12740 | 12483 | 12230 | 11982 | 11737 | 11496 | 11258 |
| 2,1 | 11025 | 10795 | 10569 | 10347 | 10129 | 9914 | 9702 | 9495 | 9290 | 9090 |
| 2,2 | 08892 | 08698 | 08508 | 08320 | 08137 | 07956 | 07779 | 07604 | 07433 | 07265 |
| 2,3 | 07101 | 06939 | 06780 | 06624 | 06471 | 06321 | 06174 | 06030 | 05888 | 05750 |
| 2,4 | 05613 | 05480 | 05349 | 05221 | 05096 | 04972 | 04852 | 04734 | 04618 | 04505 |
| 2,5 | 04394 | 04285 | 04179 | 04074 | 03972 | 03873 | 03775 | 03679 | 03586 | 03494 |
| 2,6 | 03405 | 03317 | 03232 | 03148 | 03066 | 02985 | 02908 | 02831 | 02757 | 02683 |
| 2,7 | 02612 | 02542 | 02474 | 02408 | 02343 | 02279 | 02217 | 02157 | 02098 | 02040 |
| 2,8 | 01984 | 01929 | 01876 | 01823 | 01772 | 01723 | 01674 | 01627 | 01581 | 01536 |
| 2,9 | 01492 | 01449 | 01408 | 01367 | 01328 | 01289 | 01252 | 01215 | 01179 | 01145 |
| 3,0 | 01111 | 01078 | 01046 | 01015 | 00985 | 00955 | 00926 | 00898 | 00871 | 00845 |
| 3,1 | 00819 | 00794 | 00769 | 00746 | 00723 | 00700 | 00679 | 00658 | 00637 | 00617 |
| 3,2 | 00598 | 00579 | 00560 | 00543 | 00525 | 00509 | 00492 | 00477 | 00461 | 00446 |
| 3,3 | 00432 | 00418 | 00404 | 00391 | 00378 | 00366 | 00354 | 00342 | 00331 | 00320 |
| 3,4 | 00309 | 00299 | 00289 | 00279 | 00269 | 00260 | 00251 | 00243 | 00235 | 00227 |
| 3,5 | 00219 | 00211 | 00204 | 00197 | 00190 | 00183 | 00177 | 00171 | 00165 | 00159 |
| 3,6 | 00153 | 00148 | 00143 | 00138 | 00133 | 00128 | 00123 | 00119 | 00115 | 00110 |
| 3,7 | 00106 | 00103 | 00099 | 00095 | 00092 | 00088 | 00085 | 00082 | 00079 | 00076 |
| 3,8 | 00073 | 00070 | 00068 | 00065 | 00063 | 00060 | 00058 | 00056 | 00054 | 00052 |
| 3,9 | 00050 | 00048 | 00046 | 00044 | 00043 | 00041 | 00039 | 00038 | 00036 | 00035 |
| 4, | 00034 | 00022 | 00015 | 00010 | 00006 | 00004 | 00003 | 00002 | 00001 | 00001 |

Таблица VIII

Значения функции $\Phi(x)$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0 | 00000 | 00798 | 01596 | 02393 | 03191 | 03988 | 04784 | 05581 | 06376 | 07171 |
| 0,1 | 07966 | 08759 | 09552 | 10343 | 11134 | 11924 | 12712 | 13499 | 14285 | 15069 |
| 0,2 | 15852 | 16633 | 17413 | 18191 | 18967 | 19741 | 20514 | 21284 | 22052 | 22818 |
| 0,3 | 23582 | 24344 | 25103 | 25860 | 26614 | 27366 | 28115 | 28862 | 29605 | 30346 |
| 0,4 | 31084 | 31819 | 32551 | 33280 | 34006 | 34729 | 35448 | 36164 | 36877 | 37587 |
| 0,5 | 38292 | 38995 | 39694 | 40389 | 41080 | 41768 | 42452 | 43132 | 43809 | 44481 |
| 0,6 | 45149 | 45814 | 46474 | 47131 | 47783 | 48431 | 49075 | 49714 | 50350 | 50981 |
| 0,7 | 51607 | 52230 | 52848 | 53461 | 54070 | 54675 | 55275 | 55870 | 56461 | 57047 |
| 0,8 | 57629 | 58206 | 58778 | 59346 | 59909 | 60468 | 61021 | 61570 | 62114 | 62653 |
| 0,9 | 63188 | 63718 | 64243 | 64763 | 65278 | 65789 | 66294 | 66795 | 67291 | 67783 |
| 1,0 | 68269 | 68750 | 69227 | 69699 | 70166 | 70628 | 71086 | 71538 | 71986 | 72429 |
| 1,1 | 72867 | 73300 | 73729 | 74152 | 74571 | 74986 | 75395 | 75800 | 76200 | 76595 |
| 1,2 | 76986 | 77372 | 77754 | 78130 | 78502 | 78870 | 79233 | 79592 | 79945 | 80295 |
| 1,3 | 80640 | 80980 | 81316 | 81648 | 81975 | 82298 | 82617 | 82931 | 83241 | 83547 |
| 1,4 | 83849 | 84146 | 84439 | 84728 | 85013 | 85294 | 85571 | 85844 | 86113 | 86378 |
| 1,5 | 86639 | 86896 | 87149 | 87398 | 87644 | 87886 | 88124 | 88358 | 88589 | 88817 |
| 1,6 | 89040 | 89260 | 89477 | 89690 | 89899 | 90106 | 90309 | 90508 | 90704 | 90897 |
| 1,7 | 91087 | 91273 | 91457 | 91637 | 91814 | 91988 | 92159 | 92327 | 92492 | 92655 |
| 1,8 | 92814 | 92970 | 93124 | 93275 | 93423 | 93569 | 93711 | 93852 | 93989 | 94124 |
| 1,9 | 94257 | 94387 | 94514 | 94639 | 94762 | 94882 | 95000 | 95116 | 95230 | 95341 |
| 2,0 | 95450 | 95557 | 95662 | 95764 | 95865 | 95964 | 96060 | 96155 | 96247 | 96338 |
| 2,1 | 96427 | 96514 | 96599 | 96683 | 96765 | 96844 | 96923 | 96999 | 97074 | 97148 |
| 2,2 | 97219 | 97289 | 97358 | 97425 | 97491 | 97555 | 97618 | 97679 | 97739 | 97798 |
| 2,3 | 97855 | 97911 | 97966 | 98019 | 98072 | 98123 | 98172 | 98221 | 98269 | 98315 |
| 2,4 | 98360 | 98405 | 98448 | 98490 | 98531 | 98571 | 98611 | 98649 | 98686 | 98723 |
| 2,5 | 98758 | 98793 | 98826 | 98859 | 98891 | 98923 | 98953 | 98983 | 99012 | 99040 |
| 2,6 | 99068 | 99095 | 99121 | 99146 | 99171 | 99195 | 99219 | 99241 | 99264 | 99285 |
| 2,7 | 99307 | 99327 | 99347 | 99367 | 99386 | 99404 | 99422 | 99439 | 99456 | 99473 |
| 2,8 | 99489 | 99505 | 99520 | 99535 | 99549 | 99563 | 99576 | 99590 | 99602 | 99615 |
| 2,9 | 99627 | 99639 | 99650 | 99661 | 99672 | 99682 | 99692 | 99702 | 99712 | 99721 |
| 3,0 | 99730 | 99739 | 99747 | 99755 | 99763 | 99771 | 99779 | 99786 | 99793 | 99800 |
| 3,1 | 99806 | 99813 | 99819 | 99825 | 99831 | 99837 | 99842 | 99848 | 99853 | 99858 |
| 3,2 | 99863 | 99867 | 99872 | 99876 | 99880 | 99885 | 99889 | 99892 | 99896 | 99900 |
| 3,3 | 99903 | 99907 | 99910 | 99913 | 99916 | 99919 | 99922 | 99925 | 99928 | 99930 |
| 3,4 | 99933 | 99935 | 99937 | 99940 | 99942 | 99944 | 99946 | 99948 | 99950 | 99952 |
| 3,5 | 99953 | 99955 | 99957 | 99958 | 99960 | 99961 | 99963 | 99964 | 99966 | 99967 |
| 3,6 | 99968 | 99969 | 99971 | 99972 | 99973 | 99974 | 99975 | 99976 | 99977 | 99978 |
| 3,7 | 99978 | 99979 | 99980 | 99981 | 99982 | 99982 | 99983 | 99984 | 99984 | 99985 |
| 3,8 | 99986 | 99986 | 99987 | 99987 | 99988 | 99988 | 99989 | 99989 | 99990 | 99990 |
| 3,9 | 99990 | 99991 | 99991 | 99992 | 99992 | 99992 | 99992 | 99993 | 99993 | 99993 |
| 4, | 99994 | 99996 | 99997 | 99998 | 99999 | 99999 | — | — | — | — |

Примечание. В таблицах там, где это не вызывает сомнений, приведены лишь дробные части значений функций.

Т а б л и ц а IX

Значения функции $F(x)$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0 | 50000 | 50399 | 50798 | 51197 | 51595 | 51994 | 52392 | 52790 | 53188 | 53586 |
| 0,1 | 53983 | 54380 | 54776 | 55172 | 55567 | 55962 | 56356 | 56749 | 57142 | 57535 |
| 0,2 | 57926 | 58317 | 58706 | 59095 | 59483 | 59871 | 60257 | 60642 | 61026 | 61409 |
| 0,3 | 61791 | 62172 | 62552 | 62930 | 63307 | 63683 | 64058 | 64431 | 64803 | 65173 |
| 0,4 | 65542 | 65910 | 66276 | 66640 | 67003 | 67364 | 67724 | 68082 | 68439 | 68793 |
| 0,5 | 69146 | 69497 | 69847 | 70194 | 70540 | 70884 | 71226 | 71566 | 71904 | 72240 |
| 0,6 | 72575 | 72907 | 73237 | 73565 | 73891 | 74215 | 74537 | 74857 | 75175 | 75490 |
| 0,7 | 75804 | 76115 | 76424 | 76730 | 77035 | 77337 | 77637 | 77935 | 78230 | 78524 |
| 0,8 | 78814 | 79103 | 79389 | 79673 | 79955 | 80234 | 80511 | 80785 | 81057 | 81327 |
| 0,9 | 81594 | 81859 | 82121 | 82381 | 82639 | 82894 | 83147 | 83398 | 83646 | 83891 |
| 1,0 | 84134 | 84375 | 84614 | 84850 | 85083 | 85314 | 85543 | 85769 | 85993 | 86214 |
| 1,1 | 86433 | 86650 | 86864 | 87076 | 87286 | 87493 | 87698 | 87900 | 88100 | 88298 |
| 1,2 | 88493 | 88686 | 88877 | 89065 | 89251 | 89435 | 89617 | 89796 | 89973 | 90147 |
| 1,3 | 90320 | 90490 | 90658 | 90824 | 90988 | 91149 | 91308 | 91466 | 91621 | 91774 |
| 1,4 | 91924 | 92073 | 92220 | 92364 | 92507 | 92647 | 92786 | 92922 | 93056 | 93189 |
| 1,5 | 93319 | 93448 | 93574 | 93699 | 93822 | 93943 | 94062 | 94179 | 94295 | 94408 |
| 1,6 | 94520 | 94630 | 94738 | 94845 | 94950 | 95053 | 95154 | 95254 | 95352 | 95449 |
| 1,7 | 95543 | 95637 | 95728 | 95818 | 95907 | 95994 | 96080 | 96164 | 96246 | 96327 |
| 1,8 | 96407 | 96485 | 96562 | 96638 | 96712 | 96784 | 96856 | 96926 | 96995 | 97062 |
| 1,9 | 97128 | 97193 | 97257 | 97320 | 97381 | 97441 | 97500 | 97558 | 97615 | 97670 |
| 2,0 | 97725 | 97778 | 97831 | 97882 | 97932 | 97982 | 98030 | 98077 | 98124 | 98169 |
| 2,1 | 98214 | 98257 | 98300 | 98341 | 98382 | 98422 | 98461 | 98500 | 98537 | 98574 |
| 2,2 | 98610 | 98645 | 98679 | 98713 | 98745 | 98778 | 98809 | 98840 | 98870 | 98899 |
| 2,3 | 98928 | 98956 | 98983 | 99010 | 99036 | 99061 | 99086 | 99111 | 99134 | 99158 |
| 2,4 | 99180 | 99202 | 99224 | 99245 | 99266 | 99286 | 99305 | 99324 | 99343 | 99361 |
| 2,5 | 99379 | 99396 | 99413 | 99430 | 99446 | 99461 | 99477 | 99492 | 99506 | 99520 |
| 2,6 | 99534 | 99547 | 99560 | 99573 | 99585 | 99598 | 99609 | 99621 | 99632 | 99643 |
| 2,7 | 99653 | 99664 | 99674 | 99683 | 99693 | 99702 | 99711 | 99720 | 99728 | 99736 |
| 2,8 | 99744 | 99752 | 99760 | 99767 | 99774 | 99781 | 99788 | 99795 | 99801 | 99807 |
| 2,9 | 99813 | 99819 | 99825 | 99831 | 99836 | 99841 | 99846 | 99851 | 99856 | 99861 |
| 3,0 | 99865 | 99869 | 99874 | 99878 | 99882 | 99886 | 99889 | 99893 | 99896 | 99900 |
| 3,1 | 99903 | 99906 | 99910 | 99913 | 99916 | 99918 | 99921 | 99924 | 99926 | 99929 |
| 3,2 | 99931 | 99934 | 99936 | 99938 | 99940 | 99942 | 99944 | 99946 | 99948 | 99950 |
| 3,3 | 99952 | 99953 | 99955 | 99957 | 99958 | 99960 | 99961 | 99962 | 99964 | 99965 |
| 3,4 | 99966 | 99968 | 99969 | 99970 | 99971 | 99972 | 99973 | 99974 | 99975 | 99976 |
| 3,5 | 99977 | 99978 | 99978 | 99979 | 99980 | 99981 | 99981 | 99982 | 99983 | 99983 |
| 3,6 | 99984 | 99985 | 99985 | 99986 | 99986 | 99987 | 99987 | 99988 | 99988 | 99989 |
| 3,7 | 99989 | 99990 | 99990 | 99990 | 99991 | 99991 | 99992 | 99992 | 99992 | 99992 |
| 3,8 | 99993 | 99993 | 99993 | 99994 | 99994 | 99994 | 99994 | 99995 | 99995 | 99995 |
| 3,9 | 99995 | 99995 | 99996 | 99996 | 99996 | 99996 | 99996 | 99996 | 99997 | 99997 |
| 4, | 99997 | 99998 | 99999 | 99999 | 99999 | — | — | — | — | — |

Таблица X

Значения функции p_m

| m | λ | | | | | | | | | | m |
|-----|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | |
| 0 | 90484 | 81873 | 74082 | 67032 | 60653 | 54881 | 49658 | 44933 | 40657 | 36788 | 0 |
| 1 | 09048 | 16375 | 22224 | 26813 | 30326 | 32929 | 34761 | 35946 | 36591 | 36788 | 1 |
| 2 | 00453 | 01637 | 03334 | 05363 | 07582 | 09879 | 12166 | 14379 | 16466 | 18394 | 2 |
| 3 | 00015 | 00109 | 00333 | 00715 | 01264 | 01976 | 02839 | 03834 | 04940 | 06131 | 3 |
| 4 | — | 00006 | 00025 | 00071 | 00158 | 00296 | 00497 | 00767 | 01112 | 01533 | 4 |
| 5 | — | — | 00002 | 00006 | 00016 | 00035 | 00070 | 00123 | 00200 | 00307 | 5 |
| 6 | — | — | — | — | 00001 | 00003 | 00008 | 00016 | 00030 | 00051 | 6 |
| 7 | — | — | — | — | — | — | 00001 | 00002 | 00004 | 00007 | 7 |
| 8 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 00001 | 8 |

| m | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 | m |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 33287 | 30120 | 27253 | 24660 | 22313 | 20190 | 18268 | 16530 | 14957 | 13533 | 0 |
| 1 | 36616 | 36143 | 35429 | 34524 | 33470 | 32303 | 31056 | 29754 | 28418 | 27067 | 1 |
| 2 | 20139 | 21686 | 23029 | 24166 | 25102 | 25842 | 26398 | 26778 | 26997 | 27067 | 2 |
| 3 | 07384 | 08675 | 09979 | 11278 | 12551 | 13783 | 14959 | 16067 | 17098 | 18045 | 3 |
| 4 | 02030 | 02602 | 03243 | 03947 | 04707 | 05513 | 06358 | 07230 | 08122 | 09022 | 4 |
| 5 | 00447 | 00625 | 00843 | 01105 | 01412 | 01764 | 02161 | 02603 | 03086 | 03609 | 5 |
| 6 | 00082 | 00125 | 00183 | 00258 | 00353 | 00470 | 00612 | 00781 | 00977 | 01203 | 6 |
| 7 | 00013 | 00021 | 00034 | 00052 | 00076 | 00108 | 00149 | 00201 | 00265 | 00344 | 7 |
| 8 | 00002 | 00003 | 00006 | 00009 | 00014 | 00022 | 00032 | 00045 | 00063 | 00086 | 8 |
| 9 | — | — | 00001 | 00001 | 00002 | 00004 | 00006 | 00009 | 00013 | 00019 | 9 |
| 10 | — | — | — | — | — | 00001 | 00001 | 00002 | 00003 | 00004 | 10 |
| 11 | — | — | — | — | — | — | — | — | 00001 | 00001 | 11 |

| m | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 | 3,0 | m |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 12246 | 11080 | 10026 | 09072 | 08209 | 07427 | 06721 | 06081 | 05502 | 04979 | 0 |
| 1 | 25716 | 24377 | 23060 | 21772 | 20521 | 19311 | 18146 | 17027 | 15957 | 14936 | 1 |
| 2 | 27001 | 26814 | 26518 | 26127 | 25652 | 25104 | 24496 | 23837 | 23137 | 22404 | 2 |
| 3 | 18901 | 19664 | 20331 | 20901 | 21376 | 21757 | 22047 | 22248 | 22366 | 22404 | 3 |
| 4 | 09923 | 10815 | 11690 | 12541 | 13360 | 14142 | 14882 | 15574 | 16215 | 16803 | 4 |
| 5 | 04168 | 04759 | 05378 | 06020 | 06680 | 07354 | 08036 | 08721 | 09405 | 10082 | 5 |
| 6 | 01459 | 01745 | 02061 | 02408 | 02783 | 03187 | 03616 | 04070 | 04546 | 05041 | 6 |
| 7 | 00437 | 00548 | 00677 | 00825 | 00994 | 01184 | 01395 | 01628 | 01883 | 02161 | 7 |
| 8 | 00115 | 00151 | 00195 | 00248 | 00311 | 00385 | 00471 | 00570 | 00683 | 00810 | 8 |
| 9 | 00027 | 00037 | 00050 | 00066 | 00086 | 00111 | 00141 | 00177 | 00220 | 00270 | 9 |
| 10 | 00006 | 00008 | 00011 | 00016 | 00022 | 00029 | 00038 | 00050 | 00064 | 00081 | 10 |
| 11 | 00001 | 00002 | 00002 | 00003 | 00005 | 00007 | 00009 | 00013 | 00017 | 00022 | 11 |
| 12 | — | — | 00001 | 00001 | 00001 | 00002 | 00002 | 00003 | 00004 | 00006 | 12 |
| 13 | — | — | — | — | — | — | — | 00001 | 00001 | 00001 | 13 |

Продолжение табл. X

| m | λ | | | | | | | | | | m |
|----|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,7 | 3,8 | 3,9 | 4,0 | |
| 0 | 04505 | 04076 | 03688 | 03337 | 03020 | 02732 | 02472 | 02237 | 02024 | 01832 | 0 |
| 1 | 13965 | 13044 | 12171 | 11347 | 10569 | 09837 | 09148 | 08501 | 07894 | 07326 | 1 |
| 2 | 21646 | 20870 | 20083 | 19290 | 18496 | 17706 | 16923 | 16152 | 15394 | 14652 | 2 |
| 3 | 22368 | 22262 | 22091 | 21862 | 21578 | 21247 | 20872 | 20459 | 20012 | 19537 | 3 |
| 4 | 17335 | 17809 | 18225 | 18583 | 18881 | 19122 | 19307 | 19436 | 19512 | 19537 | 4 |
| 5 | 10748 | 11398 | 12029 | 12636 | 13217 | 13768 | 14287 | 14771 | 15219 | 15629 | 5 |
| 6 | 05553 | 06079 | 06616 | 07160 | 07710 | 08261 | 08810 | 09355 | 09893 | 10420 | 6 |
| 7 | 02459 | 02779 | 03119 | 03478 | 03855 | 04248 | 04657 | 05079 | 05512 | 05954 | 7 |
| 8 | 00953 | 01112 | 01286 | 01478 | 01687 | 01912 | 02154 | 02412 | 02687 | 02977 | 8 |
| 9 | 00328 | 00395 | 00472 | 00558 | 00656 | 00765 | 00885 | 01019 | 01164 | 01323 | 9 |
| 10 | 00102 | 00126 | 00156 | 00190 | 00230 | 00275 | 00327 | 00387 | 00454 | 00529 | 10 |
| 11 | 00029 | 00037 | 00047 | 00059 | 00073 | 00090 | 00110 | 00134 | 00161 | 00192 | 11 |
| 12 | 00007 | 00010 | 00013 | 00017 | 00021 | 00027 | 00034 | 00042 | 00052 | 00064 | 12 |
| 13 | 00002 | 00002 | 00003 | 00004 | 00006 | 00008 | 00010 | 00012 | 00016 | 00020 | 13 |
| 14 | — | 00001 | 00001 | 00001 | 00001 | 00002 | 00003 | 00003 | 00005 | 00006 | 14 |
| 15 | — | — | — | — | — | — | 00001 | 00001 | 00001 | 00002 | 15 |
| m | 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 | 4,7 | 4,8 | 4,9 | 5,0 | m |
| 0 | 01657 | 01500 | 01357 | 01228 | 01111 | 01005 | 00910 | 00823 | 00745 | 00674 | 0 |
| 1 | 06795 | 06298 | 05835 | 05402 | 04999 | 04624 | 04275 | 03950 | 03649 | 03369 | 1 |
| 2 | 13929 | 13226 | 12544 | 11884 | 11248 | 10635 | 10046 | 09481 | 08940 | 08422 | 2 |
| 3 | 19037 | 18516 | 17980 | 17431 | 16872 | 16307 | 15738 | 15169 | 14601 | 14037 | 3 |
| 4 | 19513 | 19442 | 19328 | 19174 | 18981 | 18753 | 18492 | 18203 | 17887 | 17547 | 4 |
| 5 | 16000 | 16332 | 16622 | 16873 | 17083 | 17252 | 17383 | 17475 | 17529 | 17547 | 5 |
| 6 | 10934 | 11432 | 11913 | 12373 | 12812 | 13227 | 13617 | 13980 | 14315 | 14622 | 6 |
| 7 | 06404 | 06859 | 07318 | 07778 | 08236 | 08692 | 09143 | 09586 | 10021 | 10445 | 7 |
| 8 | 03282 | 03601 | 03933 | 04278 | 04633 | 04998 | 05371 | 05752 | 06138 | 06528 | 8 |
| 9 | 01495 | 01681 | 01879 | 02091 | 02317 | 02555 | 02805 | 03068 | 03342 | 03627 | 9 |
| 10 | 00613 | 00706 | 00808 | 00920 | 01042 | 01175 | 01318 | 01472 | 01637 | 01813 | 10 |
| 11 | 00229 | 00270 | 00316 | 00368 | 00426 | 00491 | 00563 | 00642 | 00729 | 00824 | 11 |
| 12 | 00078 | 00094 | 00113 | 00135 | 00160 | 00188 | 00221 | 00257 | 00298 | 00343 | 12 |
| 13 | 00025 | 00030 | 00038 | 00046 | 00055 | 00067 | 00080 | 00095 | 00112 | 00132 | 13 |
| 14 | 00007 | 00009 | 00012 | 00014 | 00018 | 00022 | 00027 | 00033 | 00039 | 00047 | 14 |
| 15 | 00002 | 00003 | 00003 | 00004 | 00005 | 00007 | 00008 | 00010 | 00013 | 00016 | 15 |
| 16 | — | 00001 | 00001 | 00001 | 00002 | 00002 | 00002 | 00003 | 00004 | 00005 | 16 |
| 17 | — | — | — | — | — | — | 00001 | 00001 | 00001 | 00002 | 17 |

Продолжение табл. X

[illegible]

Продолжение табл. X

| $\lambda = 20$ | | | | $\lambda = 30$ | | | | $\lambda = 40$ | | | |
|----------------|-------|-----|-------|----------------|-------|-----|-------|----------------|-------|-----|-------|
| m | p_m | m | p_m | m | p_m | m | p_m | m | p_m | m | p_m |
| — | — | 20 | 08884 | 10 | 00002 | 30 | 07264 | — | — | 40 | 06295 |
| — | — | 21 | 08460 | 11 | 00004 | 31 | 07029 | 16 | 00001 | 41 | 06141 |
| — | — | 22 | 07691 | 12 | 00810 | 32 | 03590 | 17 | 00002 | 42 | 05849 |
| — | — | 23 | 06688 | 13 | 00024 | 33 | 05991 | 18 | 00005 | 43 | 05441 |
| 4 | 00001 | 24 | 05574 | 14 | 00051 | 34 | 05286 | 19 | 00010 | 44 | 04946 |
| 5 | 00006 | 25 | 04459 | 15 | 00103 | 35 | 04531 | 20 | 00019 | 45 | 04397 |
| 6 | 00018 | 26 | 03430 | 16 | 00192 | 36 | 03776 | 21 | 00037 | 46 | 03823 |
| 7 | 00052 | 27 | 02541 | 17 | 00340 | 37 | 03061 | 22 | 00066 | 47 | 03254 |
| 8 | 00131 | 28 | 01815 | 18 | 00566 | 38 | 02417 | 23 | 00116 | 48 | 02711 |
| 9 | 00291 | 29 | 01252 | 19 | 00894 | 39 | 01859 | 24 | 00193 | 49 | 02213 |
| 10 | 00582 | 30 | 00834 | 20 | 01341 | 40 | 01394 | 25 | 00308 | 50 | 01771 |
| 11 | 01057 | 31 | 00538 | 21 | 01916 | 41 | 01020 | 26 | 00474 | 51 | 01389 |
| 12 | 01762 | 32 | 00336 | 22 | 02613 | 42 | 00729 | 27 | 00703 | 52 | 01068 |
| 13 | 02712 | 33 | 00204 | 23 | 03408 | 43 | 00508 | 28 | 01004 | 53 | 00806 |
| 14 | 03824 | 34 | 00120 | 24 | 04260 | 44 | 00347 | 29 | 01385 | 54 | 00597 |
| 15 | 05165 | 35 | 00068 | 25 | 05112 | 45 | 00231 | 30 | 01847 | 55 | 00434 |
| 16 | 06456 | 36 | 00038 | 26 | 05898 | 46 | 00151 | 31 | 02383 | 56 | 00310 |
| 17 | 07595 | 37 | 00021 | 27 | 06553 | 47 | 00096 | 32 | 02978 | 57 | 00218 |
| 18 | 08439 | 38 | 00011 | 28 | 07021 | 48 | 00060 | 33 | 03610 | 58 | 00150 |
| 19 | 08884 | 39 | 00006 | 29 | 07264 | 49 | 00037 | 34 | 04247 | 59 | 00102 |
| | | 40 | 00003 | | | 50 | 00022 | 35 | 04854 | 60 | 00068 |
| | | 41 | 00001 | | | 51 | 00013 | 36 | 05393 | 61 | 00045 |
| | | 42 | 00001 | | | 52 | 00008 | 37 | 05831 | 62 | 00029 |
| | | | | | | 53 | 00004 | 38 | 06137 | 63 | 00018 |
| | | | | | | 54 | 00002 | 39 | 06295 | 64 | 00011 |
| | | | | | | 55 | 00001 | | | 65 | 00007 |
| | | | | | | 56 | 00001 | | | 66 | 00004 |
| | | | | | | | | | | 67 | 00002 |
| | | | | | | | | | | 68 | 00002 |
| | | | | | | | | | | 69 | 00001 |

Таблица XI

Логарифмы гамма-функции $[\lg \Gamma(x)]$ от $x = 1$ до $x = 2$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1,00 | | 97497 | 95001 | 92512 | 90030 | 87555 | 85087 | 82627 | 80173 | 77727 |
| 1 | 1,99 75287 | 72855 | 70430 | 68011 | 65600 | 63196 | 60798 | 58408 | 56025 | 53648 |
| 2 | 51279 | 48916 | 46561 | 44212 | 41870 | 39535 | 37207 | 34886 | 32572 | 30265 |
| 3 | 27964 | 25671 | 23384 | 21104 | 18831 | 16564 | 14305 | 12052 | 09806 | 07567 |
| 4 | 05334 | 03108 | 00889 | *98677 | *96471 | *94273 | *92080 | *89895 | *87716 | *85544 |
| 5 | 1,98 83379 | 81220 | 79068 | 76922 | 74783 | 72651 | 70525 | 68406 | 66294 | 64188 |
| 6 | 62089 | 59996 | 57910 | 55830 | 53757 | 51690 | 49630 | 47577 | 45530 | 43489 |
| 7 | 41455 | 39428 | 37407 | 35392 | 33384 | 31382 | 29387 | 27398 | 25415 | 23439 |
| 8 | 21469 | 19506 | 17549 | 15599 | 13655 | 11717 | 09785 | 07860 | 05941 | 04029 |
| 9 | 02123 | 00223 | *98329 | *96442 | *94561 | *92686 | *90818 | *88956 | *87100 | *85250 |
| 10 | 1,97 83407 | 81570 | 79738 | 77914 | 76095 | 74283 | 72476 | 70676 | 68882 | 67095 |
| 1 | 65313 | 63538 | 61768 | 60005 | 58248 | 56497 | 54753 | 53014 | 51281 | 49555 |
| 2 | 47834 | 46120 | 44411 | 42709 | 41013 | 39323 | 37638 | 35960 | 34288 | 32622 |
| 3 | 30962 | 29308 | 27659 | 26017 | 24381 | 22751 | 21126 | 19508 | 17896 | 16289 |
| 4 | 14689 | 13094 | 11505 | 09922 | 08345 | 06774 | 05209 | 03650 | 02096 | 00549 |
| 5 | 1,96 99007 | 97471 | 95941 | 94417 | 92898 | 91386 | 89879 | 88378 | 86883 | 85393 |
| 6 | 83910 | 82432 | 80960 | 79493 | 78033 | 76578 | 75129 | 73686 | 72248 | 70816 |
| 7 | 63930 | 67969 | 66554 | 65145 | 63742 | 62344 | 60952 | 59566 | 58185 | 56810 |
| 8 | 55440 | 54076 | 52718 | 51366 | 50019 | 48677 | 47341 | 46011 | 44687 | 43368 |
| 9 | 42054 | 40746 | 39444 | 38147 | 36856 | 35570 | 34290 | 33016 | 31747 | 30483 |
| 20 | 29225 | 27973 | 26725 | 25484 | 24248 | 23017 | 21792 | 20573 | 19358 | 18150 |
| 1 | 16946 | 15748 | 14556 | 13369 | 12188 | 11011 | 09841 | 08675 | 07515 | 06361 |
| 2 | 05212 | 04068 | 02930 | 01796 | 00669 | *99546 | *98430 | *97318 | *96212 | *95111 |
| 3 | 1,95 94515 | 92925 | 91840 | 90760 | 89685 | 88616 | 87553 | 86494 | 85441 | 84393 |
| 4 | 83350 | 82313 | 81280 | 80253 | 79232 | 78215 | 77204 | 76198 | 75197 | 74201 |
| 5 | 73211 | 72226 | 71246 | 70271 | 69301 | 68337 | 67377 | 66423 | 65474 | 64530 |
| 6 | 63592 | 62658 | 61730 | 60806 | 59888 | 58975 | 58067 | 57165 | 56267 | 55374 |
| 7 | 54487 | 53604 | 52727 | 51855 | 50988 | 50126 | 49268 | 48416 | 47570 | 46728 |
| 8 | 45891 | 45059 | 44232 | 43410 | 42593 | 41782 | 40975 | 40173 | 39376 | 38585 |
| 9 | 37798 | 37016 | 36239 | 35467 | 34700 | 33938 | 33181 | 32429 | 31682 | 30940 |
| 30 | 30203 | 29470 | 28743 | 28021 | 27303 | 26590 | 25883 | 25180 | 24482 | 23789 |
| 1 | 23100 | 22417 | 21739 | 21065 | 20396 | 19732 | 19073 | 18419 | 17770 | 17125 |
| 2 | 16485 | 15850 | 15220 | 14595 | 13975 | 13359 | 12748 | 12142 | 11541 | 10944 |
| 3 | 10353 | 09766 | 09184 | 08606 | 08034 | 07466 | 06903 | 06344 | 05794 | 05242 |
| 4 | 04698 | 04158 | 03624 | 03094 | 02568 | 02048 | 01532 | 01021 | 00514 | 00012 |
| 5 | 1,94 99515 | 99023 | 98535 | 98052 | 97573 | 97100 | 96630 | 96166 | 95706 | 95251 |
| 6 | 94800 | 94355 | 93913 | 93477 | 93044 | 92617 | 92194 | 91776 | 91362 | 90953 |
| 7 | 90549 | 90149 | 89754 | 89363 | 88977 | 88595 | 88218 | 87846 | 87478 | 87115 |
| 8 | 86756 | 86402 | 86052 | 85707 | 85366 | 85030 | 84698 | 84371 | 84049 | 83731 |
| 9 | 83417 | 83108 | 82803 | 82503 | 82208 | 81916 | 81630 | 81348 | 81070 | 80797 |
| 40 | 80528 | 80263 | 80003 | 79748 | 79497 | 79250 | 79008 | 78770 | 78537 | 78308 |
| 1 | 78084 | 77864 | 77648 | 77437 | 77230 | 77027 | 76829 | 76636 | 76446 | 76261 |
| 2 | 76081 | 75905 | 75733 | 75565 | 75402 | 75243 | 75089 | 74939 | 74793 | 74652 |
| 3 | 74515 | 74382 | 74254 | 74130 | 74010 | 73894 | 73783 | 73676 | 73574 | 73476 |
| 4 | 73382 | 73292 | 73207 | 73125 | 73049 | 72976 | 72908 | 72844 | 72784 | 72728 |
| 5 | 72677 | 72630 | 72587 | 72549 | 72514 | 72484 | 72459 | 72437 | 72419 | 72406 |
| 6 | 72397 | 72393 | 72392 | 72396 | 72404 | 72416 | 72432 | 72452 | 72477 | 72506 |
| 7 | 72539 | 72576 | 72617 | 72662 | 72712 | 72766 | 72824 | 72886 | 72952 | 73022 |
| 8 | 73097 | 73175 | 73258 | 73345 | 73436 | 73531 | 73630 | 73734 | 73841 | 73953 |
| 9 | 74068 | 74188 | 74312 | 74440 | 74572 | 74708 | 74848 | 74992 | 75141 | 75293 |

Примечание. Знак «*» означает, что первые три цифры берутся из нулевого столбца следующей строки.

Продолжение табл. XI

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1,50 | 1,94 | 75449 | 75610 | 75774 | 75943 | 76116 | 76292 | 76473 | 76658 | 76847 | 77040 |
| 1 | | 77237 | 77437 | 77642 | 77851 | 78064 | 78281 | 78502 | 78727 | 78956 | 79189 |
| 2 | | 79426 | 79667 | 79912 | 80161 | 80414 | 80671 | 80932 | 81196 | 81465 | 81738 |
| 3 | | 82015 | 82295 | 82580 | 82868 | 83161 | 83457 | 83758 | 84062 | 84370 | 84682 |
| 4 | | 84998 | 85318 | 85642 | 85970 | 86302 | 86638 | 86977 | 87321 | 87668 | 88019 |
| 5 | | 88374 | 88733 | 89096 | 89463 | 89834 | 90208 | 90587 | 90969 | 91355 | 91745 |
| 6 | | 92139 | 92537 | 92938 | 93344 | 93753 | 94166 | 94583 | 95004 | 95429 | 95857 |
| 7 | | 96289 | 96725 | 97165 | 97609 | 98056 | 98508 | 98963 | 99422 | 99885 | *00351 |
| 8 | 1,95 | 00822 | 01296 | 01774 | 02255 | 02741 | 03230 | 03723 | 04220 | 04720 | 05225 |
| 9 | | 05733 | 06245 | 06760 | 07280 | 07803 | 08330 | 08869 | 09395 | 09933 | 10475 |
| 60 | | 11020 | 11569 | 12122 | 12679 | 13240 | 13804 | 14372 | 14943 | 15519 | 16098 |
| 1 | | 16680 | 17267 | 17857 | 18451 | 19048 | 19649 | 20254 | 20862 | 21475 | 22091 |
| 2 | | 22710 | 23333 | 23960 | 24591 | 25225 | 25863 | 26504 | 27149 | 27798 | 28451 |
| 3 | | 29107 | 29766 | 30430 | 31097 | 31767 | 32442 | 33120 | 33801 | 34486 | 35175 |
| 4 | | 35867 | 36563 | 37263 | 37966 | 38673 | 39383 | 40097 | 40815 | 41536 | 42260 |
| 5 | | 42989 | 43721 | 44456 | 45195 | 45938 | 46684 | 47434 | 48187 | 48944 | 49704 |
| 6 | | 50468 | 51236 | 52007 | 52782 | 53560 | 54342 | 55127 | 55916 | 56708 | 57504 |
| 7 | | 58303 | 59106 | 59913 | 60723 | 61536 | 62353 | 63174 | 63998 | 64825 | 65656 |
| 8 | | 66491 | 67329 | 68170 | 69015 | 69864 | 70716 | 71571 | 72430 | 73293 | 74159 |
| 9 | | 75028 | 75601 | 76777 | 77657 | 78540 | 79427 | 80317 | 81211 | 82108 | 83008 |
| 70 | | 83912 | 84820 | 85731 | 86645 | 87563 | 88484 | 89409 | 90337 | 91268 | 92203 |
| 1 | | 93141 | 94083 | 95028 | 95977 | 96929 | 97884 | 98843 | 99805 | *00771 | *01740 |
| 2 | 1,96 | 02712 | 03688 | 04667 | 05650 | 06636 | 07625 | 08618 | 09614 | 10613 | 11616 |
| 3 | | 12622 | 13632 | 14645 | 15661 | 16681 | 17704 | 18730 | 19760 | 20793 | 21830 |
| 4 | | 22869 | 23912 | 24959 | 26009 | 27062 | 28118 | 29178 | 30241 | 31308 | 32377 |
| 5 | | 33451 | 34527 | 35607 | 36690 | 37776 | 38866 | 39959 | 41055 | 42155 | 43258 |
| 6 | | 44364 | 45473 | 46586 | 47702 | 48821 | 49944 | 51070 | 52199 | 53331 | 54467 |
| 7 | | 55606 | 56749 | 57894 | 59043 | 60195 | 61350 | 62509 | 63671 | 64836 | 66004 |
| 8 | | 67176 | 68351 | 69529 | 70710 | 71895 | 73082 | 74274 | 75468 | 76665 | 77866 |
| 9 | | 79070 | 80277 | 81488 | 82701 | 83918 | 85138 | 86361 | 87588 | 88818 | 90051 |
| 80 | | 91287 | 92526 | 93768 | 95014 | 96263 | 97515 | 98770 | *00029 | *01291 | *02555 |
| 1 | 1,97 | 03823 | 05095 | 06369 | 07646 | 08927 | 10211 | 11498 | 12788 | 14082 | 15378 |
| 2 | | 16678 | 17981 | 19287 | 20596 | 21908 | 23224 | 24542 | 25864 | 27189 | 28517 |
| 3 | | 29848 | 31182 | 32520 | 33860 | 35204 | 36551 | 37900 | 39254 | 40610 | 41969 |
| 4 | | 43331 | 44697 | 46065 | 47437 | 48812 | 50190 | 51571 | 52955 | 54342 | 55733 |
| 5 | | 57126 | 58522 | 59922 | 61325 | 62730 | 64139 | 65551 | 66966 | 68384 | 69805 |
| 6 | | 71230 | 72657 | 74087 | 75521 | 76957 | 78397 | 79839 | 81285 | 82734 | 84186 |
| 7 | | 85610 | 87098 | 88559 | 90023 | 91490 | 92960 | 94433 | 95909 | 97389 | 98871 |
| 8 | 1,98 | 00356 | 01844 | 03335 | 04830 | 06327 | 07827 | 09331 | 10837 | 12346 | 13859 |
| 9 | | 15374 | 16893 | 18414 | 19939 | 21466 | 22996 | 24530 | 26066 | 27606 | 29148 |
| 90 | | 30693 | 32242 | 33793 | 35348 | 36905 | 38465 | 40028 | 41595 | 43164 | 44736 |
| 1 | | 46311 | 47890 | 49471 | 51055 | 52642 | 54232 | 55825 | 57421 | 59020 | 60621 |
| 2 | | 62226 | 63834 | 65445 | 67058 | 68675 | 70294 | 71917 | 73542 | 75170 | 76802 |
| 3 | | 78436 | 80073 | 81713 | 83356 | 85002 | 86651 | 88302 | 89957 | 91614 | 93275 |
| 4 | | 94938 | 96605 | 98274 | 99946 | *01621 | *03300 | *04980 | *06663 | *08350 | *10039 |
| 5 | 1,99 | 11732 | 13427 | 15125 | 16826 | 18530 | 20237 | 21947 | 23659 | 25375 | 27093 |
| 6 | | 28815 | 30539 | 32266 | 33995 | 35728 | 37464 | 39202 | 40943 | 42688 | 44435 |
| 7 | | 46185 | 47937 | 49693 | 51451 | 53213 | 54977 | 56744 | 58513 | 60286 | 62062 |
| 8 | | 63840 | 66621 | 67405 | 69192 | 70982 | 72774 | 74569 | 76368 | 78169 | 79972 |
| 9 | | 81779 | 83588 | 85401 | 87216 | 89034 | 90854 | 92678 | 94504 | 96333 | 98165 |

Т а б л и ц а XII

Логарифмы гамма-функции $[\lg \Gamma(x)]$ от $x = 1,00$ до $x = 50,99$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1,0 | | 99753 | 99513 | 99280 | 99053 | 98834 | 98621 | 98415 | 98215 | 98021 |
| 1,1 | 9,97834 | 97653 | 97478 | 97310 | 97147 | 96990 | 96839 | 96694 | 96554 | 96421 |
| 1,2 | 9,96292 | 96169 | 96052 | 95940 | 95834 | 95732 | 95636 | 95545 | 95459 | 95378 |
| 1,3 | 9,95302 | 95231 | 95165 | 95104 | 95047 | 94995 | 94948 | 94905 | 94868 | 94834 |
| 1,4 | 9,94805 | 94781 | 94761 | 94745 | 94734 | 94727 | 94724 | 94725 | 94731 | 94741 |
| 1,5 | 9,94754 | 94772 | 94794 | 94820 | 94850 | 94884 | 94921 | 94963 | 95008 | 95057 |
| 1,6 | 9,95110 | 95167 | 95227 | 95291 | 95359 | 95430 | 95505 | 95583 | 95665 | 95750 |
| 1,7 | 9,95839 | 95931 | 96027 | 96126 | 96229 | 96335 | 96444 | 96556 | 96672 | 96791 |
| 1,8 | 9,96913 | 97038 | 97167 | 97298 | 97433 | 97571 | 97712 | 97856 | 98004 | 98154 |
| 1,9 | 9,98307 | 98463 | 98622 | 98784 | 98949 | 99117 | 99288 | 99462 | 99638 | 99818 |
| 2,0 | 0,00000 | 00185 | 00373 | 00563 | 00757 | 00953 | 01151 | 01353 | 01557 | 01764 |
| 2,1 | 0,01973 | 02185 | 02400 | 02617 | 02837 | 03060 | 03285 | 03512 | 03743 | 03975 |
| 2,2 | 0,04210 | 04448 | 04688 | 04931 | 05176 | 05423 | 05673 | 05925 | 06180 | 06437 |
| 2,3 | 0,06696 | 06958 | 07222 | 07489 | 07757 | 08029 | 08302 | 08578 | 08855 | 09136 |
| 2,4 | 0,09418 | 09703 | 09990 | 10279 | 10570 | 10864 | 11159 | 11457 | 11757 | 12059 |
| 2,5 | 0,12364 | 12670 | 12979 | 13289 | 13602 | 13917 | 14234 | 14553 | 14874 | 15197 |
| 2,6 | 0,15522 | 15849 | 16179 | 16510 | 16843 | 17178 | 17515 | 17855 | 18196 | 18539 |
| 2,7 | 0,18884 | 19231 | 19580 | 19931 | 20284 | 20638 | 20995 | 21353 | 21714 | 22076 |
| 2,8 | 0,22440 | 22806 | 23174 | 23544 | 23915 | 24288 | 24664 | 25041 | 25419 | 25800 |
| 2,9 | 0,26182 | 26566 | 26952 | 27340 | 27730 | 28121 | 28514 | 28908 | 29305 | 29703 |
| 3,0 | 0,30103 | 30505 | 30908 | 31313 | 31720 | 32128 | 32538 | 32950 | 33363 | 33779 |
| 3,1 | 0,34195 | 34614 | 35034 | 35455 | 35879 | 36304 | 36730 | 37158 | 37588 | 38020 |
| 3,2 | 0,38453 | 38887 | 39323 | 39761 | 40200 | 40641 | 41084 | 41528 | 41973 | 42420 |
| 3,3 | 0,42869 | 43319 | 43771 | 44224 | 44679 | 45135 | 45593 | 46052 | 46513 | 46975 |
| 3,4 | 0,47439 | 47904 | 48371 | 48839 | 49309 | 49780 | 50253 | 50727 | 51202 | 51679 |
| 3,5 | 0,52158 | 52637 | 53119 | 53601 | 54085 | 54571 | 55058 | 55546 | 56036 | 56527 |
| 3,6 | 0,57020 | 57513 | 58009 | 58505 | 59003 | 59503 | 60004 | 60506 | 61009 | 61514 |
| 3,7 | 0,62020 | 62528 | 63037 | 63547 | 64059 | 64572 | 65086 | 65601 | 66118 | 66636 |
| 3,8 | 0,67156 | 67677 | 68199 | 68722 | 69247 | 69773 | 70300 | 70829 | 71359 | 71890 |
| 3,9 | 0,72422 | 72956 | 73491 | 74027 | 74564 | 75103 | 75643 | 76184 | 76727 | 77270 |
| 4,0 | 0,77815 | 78361 | 78909 | 79457 | 80007 | 80558 | 81110 | 81664 | 82218 | 82774 |
| 4,1 | 0,83331 | 83890 | 84449 | 85010 | 85572 | 86135 | 86699 | 87264 | 87831 | 88399 |
| 4,2 | 0,88968 | 89538 | 90109 | 90681 | 91255 | 91830 | 92406 | 92983 | 93561 | 94140 |
| 4,3 | 0,94721 | 95302 | 95885 | 96469 | 97054 | 97640 | 98227 | 98815 | 99405 | 99995 |
| 4,4 | 1,00537 | 01180 | 01774 | 02369 | 02965 | 03562 | 04160 | 04760 | 05360 | 05962 |
| 4,5 | 1,06564 | 07168 | 07773 | 08379 | 08986 | 09594 | 10203 | 10813 | 11424 | 12036 |
| 4,6 | 1,12650 | 13264 | 13880 | 14496 | 15114 | 15732 | 16352 | 16972 | 17594 | 18217 |
| 4,7 | 1,18841 | 19465 | 20091 | 20718 | 21346 | 21975 | 22605 | 23236 | 23867 | 24500 |
| 4,8 | 1,25134 | 25769 | 26405 | 27042 | 27680 | 28319 | 28959 | 29600 | 30242 | 30885 |
| 4,9 | 1,31529 | 32173 | 32819 | 33466 | 34114 | 34763 | 35412 | 36063 | 36715 | 37368 |
| 5,0 | 1,38021 | 38676 | 39331 | 39988 | 40645 | 41304 | 41963 | 42623 | 43284 | 43947 |
| 5,1 | 1,44610 | 45274 | 45939 | 46605 | 47272 | 47940 | 48608 | 49278 | 49949 | 50620 |
| 5,2 | 1,51293 | 51966 | 52640 | 53315 | 53992 | 54669 | 55347 | 56025 | 56705 | 57386 |
| 5,3 | 1,58067 | 58750 | 59433 | 60118 | 60803 | 61489 | 62176 | 62864 | 63552 | 64242 |
| 5,4 | 1,64932 | 65624 | 66316 | 67009 | 67703 | 68398 | 69094 | 69791 | 70488 | 71186 |
| 5,5 | 1,71886 | 72586 | 73287 | 73989 | 74691 | 75395 | 76099 | 76805 | 77511 | 78218 |
| 5,6 | 1,78926 | 79634 | 80344 | 81054 | 81765 | 82477 | 83190 | 83904 | 84619 | 85334 |
| 5,7 | 1,86050 | 86767 | 87485 | 88204 | 88924 | 89644 | 90365 | 91087 | 91810 | 92534 |
| 5,8 | 1,93258 | 93984 | 94710 | 95437 | 96165 | 96893 | 97623 | 98353 | 99084 | 99816 |
| 5,9 | 2,00548 | 01282 | 02016 | 02751 | 03487 | 04223 | 04961 | 05699 | 06438 | 07178 |
| 6,0 | 2,07918 | 08659 | 09402 | 10145 | 10888 | 11633 | 12378 | 13124 | 13871 | 14618 |

Продолжение табл. XII

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|---------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 6,0 | 2,07918 | 08659 | 09402 | 10145 | 10888 | 11633 | 12378 | 13124 | 13871 | 14618 |
| 6,1 | 2,15367 | 16116 | 16866 | 17617 | 18368 | 19120 | 19873 | 20627 | 21382 | 22137 |
| 6,2 | 2,22893 | 23650 | 24407 | 25166 | 25925 | 26685 | 27445 | 28206 | 28969 | 29731 |
| 6,3 | 2,30495 | 31259 | 32024 | 32790 | 33557 | 34324 | 35092 | 35861 | 36630 | 37401 |
| 6,4 | 2,38172 | 38943 | 39716 | 40489 | 41263 | 42038 | 42813 | 43589 | 44366 | 45144 |
| 6,5 | 2,45922 | 46701 | 47481 | 48261 | 49042 | 49824 | 50607 | 51390 | 52174 | 52959 |
| 6,6 | 2,53744 | 54531 | 55317 | 56105 | 56893 | 57682 | 58472 | 59262 | 60054 | 60845 |
| 6,7 | 2,61638 | 62431 | 63225 | 64020 | 64815 | 65611 | 66408 | 67205 | 68003 | 68802 |
| 6,8 | 2,69601 | 70401 | 71202 | 72004 | 72806 | 73609 | 74412 | 75217 | 76021 | 76827 |
| 6,9 | 2,77633 | 78440 | 79248 | 80056 | 80865 | 81675 | 82485 | 83296 | 84108 | 84920 |
| 7,0 | 2,85733 | 86547 | 87361 | 88176 | 88992 | 89808 | 90625 | 91443 | 92261 | 93080 |
| 7,1 | 2,93900 | 94720 | 95541 | 96363 | 97185 | 98008 | 98831 | 99656 | *00480 | *01306 |
| 7,2 | 3,02132 | 02959 | 03786 | 04614 | 05443 | 06273 | 07103 | 07933 | 08765 | 09596 |
| 7,3 | 3,10429 | 11262 | 12096 | 12931 | 13766 | 14601 | 15438 | 16275 | 17113 | 17951 |
| 7,4 | 3,18790 | 19629 | 20469 | 21310 | 22152 | 22994 | 23836 | 24680 | 25524 | 26368 |
| 7,5 | 3,27213 | 28359 | 28905 | 29752 | 30600 | 31448 | 32297 | 33147 | 33997 | 34847 |
| 7,6 | 3,35699 | 36551 | 37403 | 38256 | 39110 | 39964 | 40819 | 41675 | 42531 | 43388 |
| 7,7 | 3,44245 | 45103 | 45962 | 46821 | 47681 | 48541 | 49402 | 50264 | 51126 | 51989 |
| 7,8 | 3,52852 | 53716 | 54581 | 55446 | 56311 | 57178 | 58045 | 58912 | 59780 | 60649 |
| 7,9 | 3,61518 | 62388 | 63259 | 64130 | 65001 | 65873 | 66746 | 67620 | 68493 | 69368 |
| 8,0 | 3,70243 | 71119 | 71995 | 72872 | 73749 | 74627 | 75506 | 76385 | 77265 | 78145 |
| 8,1 | 3,79026 | 79907 | 80789 | 81672 | 82555 | 83438 | 84323 | 85207 | 86093 | 86979 |
| 8,2 | 3,87865 | 88752 | 89640 | 90528 | 91417 | 92306 | 93196 | 94087 | 94978 | 95869 |
| 8,3 | 3,96761 | 97654 | 98547 | 99441 | *00335 | *01230 | *02126 | *03022 | *03918 | *04815 |
| 8,4 | 4,05713 | 06611 | 07510 | 08409 | 09309 | 10209 | 11110 | 12012 | 12914 | 13816 |
| 8,5 | 4,14719 | 15623 | 16527 | 17432 | 18337 | 19243 | 20149 | 21056 | 21964 | 22872 |
| 8,6 | 4,23780 | 24689 | 25599 | 26509 | 27419 | 28331 | 29242 | 30155 | 31067 | 31981 |
| 8,7 | 4,32894 | 33809 | 34724 | 35639 | 36555 | 37471 | 38388 | 39306 | 40224 | 41142 |
| 8,8 | 4,42062 | 42981 | 43901 | 44822 | 45743 | 46665 | 47587 | 48510 | 49433 | 50357 |
| 8,9 | 4,51281 | 52206 | 53131 | 54057 | 54983 | 55910 | 56837 | 57765 | 58694 | 59623 |
| 9,0 | 4,60552 | 61482 | 62412 | 63343 | 64275 | 65207 | 66139 | 67072 | 68006 | 68940 |
| 9,1 | 4,69874 | 70809 | 71745 | 72681 | 73617 | 74554 | 75492 | 76430 | 77368 | 78307 |
| 9,2 | 4,79247 | 80187 | 81127 | 82068 | 83010 | 83952 | 84894 | 85837 | 86781 | 87725 |
| 9,3 | 4,88669 | 89614 | 90560 | 91505 | 92452 | 93399 | 94346 | 95294 | 96243 | 97191 |
| 9,4 | 4,98141 | 99091 | *00041 | *00992 | *01943 | *02895 | *03847 | *04800 | *05753 | *06707 |
| 9,5 | 5,07661 | 08616 | 09571 | 10527 | 11483 | 12440 | 13397 | 14354 | 15312 | 16271 |
| 9,6 | 5,17230 | 18189 | 19149 | 20110 | 21071 | 22032 | 22994 | 23956 | 24919 | 25883 |
| 9,7 | 5,26846 | 27811 | 28775 | 29740 | 30706 | 31672 | 32639 | 33606 | 34573 | 35541 |
| 9,8 | 5,36510 | 37479 | 38448 | 39418 | 40388 | 41359 | 42330 | 43302 | 44274 | 45247 |
| 9,9 | 5,46220 | 47194 | 48168 | 49142 | 50117 | 51092 | 52068 | 53045 | 54021 | 54999 |
| 10,0 | 5,55976 | 56954 | 57933 | 58912 | 59892 | 60872 | 61852 | 62833 | 63814 | 64796 |
| 10,1 | 5,65778 | 66761 | 67744 | 68728 | 69712 | 70696 | 71681 | 72667 | 73652 | 74639 |
| 10,2 | 5,75625 | 76613 | 77600 | 78588 | 79577 | 80566 | 81555 | 82545 | 83535 | 84526 |
| 10,3 | 5,85517 | 86509 | 87501 | 88494 | 89487 | 90480 | 91474 | 92468 | 93463 | 94458 |
| 10,4 | 5,95454 | 96450 | 97446 | 98443 | 99440 | *00438 | *01436 | *02435 | *03434 | *04434 |
| 10,5 | 6,05434 | 06434 | 07435 | 08436 | 09438 | 10440 | 11443 | 12446 | 13449 | 14453 |
| 10,6 | 6,15457 | 16462 | 17467 | 18473 | 19479 | 20485 | 21492 | 22499 | 23507 | 24515 |
| 10,7 | 6,25523 | 26532 | 27542 | 28552 | 29562 | 30573 | 31584 | 32595 | 33607 | 34620 |
| 10,8 | 6,35632 | 36646 | 37659 | 38673 | 39688 | 40703 | 41718 | 42734 | 43750 | 44767 |
| 10,9 | 6,45784 | 46801 | 47819 | 48837 | 49856 | 50875 | 51894 | 52914 | 53934 | 54955 |
| 11,0 | 6,55976 | 56998 | 58020 | 59042 | 60065 | 61088 | 62112 | 63136 | 64160 | 65185 |

Продолжение табл. XII

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 11,0 | 6,55976 | 56998 | 58020 | 59042 | 60065 | 61088 | 62112 | 63136 | 64160 | 65185 |
| 11,1 | 6,66210 | 67236 | 68262 | 69289 | 70316 | 71343 | 72371 | 73399 | 74427 | 75456 |
| 11,2 | 6,76486 | 77515 | 78545 | 79576 | 80607 | 81638 | 82670 | 83702 | 84735 | 85768 |
| 11,3 | 6,86801 | 87835 | 88869 | 89904 | 90937 | 91974 | 93010 | 94046 | 95083 | 96120 |
| 11,4 | 6,97157 | 98194 | 99233 | *00271 | *01310 | *02350 | *03390 | *04430 | *05470 | *06511 |
| 11,5 | 7,07553 | 08594 | 09636 | 10679 | 11722 | 12765 | 13809 | 14853 | 15898 | 16942 |
| 11,6 | 7,17988 | 19033 | 20079 | 21126 | 22173 | 23220 | 24268 | 25316 | 26364 | 27413 |
| 11,7 | 7,28462 | 29511 | 30561 | 31612 | 32662 | 33714 | 34765 | 35817 | 36869 | 37922 |
| 11,8 | 7,38975 | 40028 | 41082 | 42136 | 43191 | 44246 | 45301 | 46357 | 47413 | 48469 |
| 11,9 | 7,49526 | 50583 | 51641 | 52699 | 53757 | 54816 | 55875 | 56935 | 57995 | 59055 |
| 12,0 | 7,60116 | 61177 | 62238 | 63300 | 64362 | 65424 | 66487 | 67551 | 68614 | 69678 |
| 12,1 | 7,70743 | 71808 | 72873 | 73938 | 75004 | 76070 | 77137 | 78204 | 79271 | 80339 |
| 12,2 | 7,81407 | 82476 | 83545 | 84614 | 85684 | 86754 | 87824 | 88895 | 89966 | 91037 |
| 12,3 | 7,92109 | 93181 | 94254 | 95327 | 96400 | 97474 | 98548 | 99622 | *00697 | *01772 |
| 12,4 | 8,02847 | 03923 | 05000 | 06076 | 07153 | 08230 | 09308 | 10386 | 11464 | 12543 |
| 12,5 | 8,13622 | 14702 | 15782 | 16862 | 17942 | 19023 | 20105 | 21186 | 22268 | 23351 |
| 12,6 | 8,24433 | 25517 | 26600 | 27684 | 28768 | 29852 | 30937 | 32023 | 33108 | 34194 |
| 12,7 | 8,35280 | 36367 | 37454 | 38542 | 39629 | 40717 | 41806 | 42895 | 43984 | 45073 |
| 12,8 | 8,46163 | 47253 | 48344 | 49435 | 50526 | 51618 | 52709 | 53802 | 54894 | 55987 |
| 12,9 | 8,57081 | 58175 | 59269 | 60363 | 61458 | 62553 | 63648 | 64744 | 65840 | 66937 |
| 13,0 | 8,68034 | 69131 | 70228 | 71326 | 72425 | 73523 | 74622 | 75721 | 76821 | 77921 |
| 13,1 | 8,79021 | 80122 | 81223 | 82324 | 83426 | 84528 | 85630 | 86733 | 87836 | 88940 |
| 13,2 | 8,90043 | 91147 | 92252 | 93357 | 94462 | 95567 | 96673 | 97779 | 98886 | 99992 |
| 13,3 | 9,01100 | 02207 | 03315 | 04423 | 05531 | 06640 | 07750 | 08859 | 09969 | 11079 |
| 13,4 | 9,12190 | 13300 | 14412 | 15523 | 16635 | 17747 | 18860 | 19973 | 21086 | 22199 |
| 13,5 | 9,23313 | 24428 | 25542 | 26657 | 27772 | 28888 | 30004 | 31120 | 32236 | 33353 |
| 13,6 | 9,34471 | 35588 | 36706 | 37824 | 38943 | 40062 | 41181 | 42300 | 43420 | 44540 |
| 13,7 | 9,45661 | 46782 | 47903 | 49024 | 50146 | 51268 | 52391 | 53514 | 54637 | 55760 |
| 13,8 | 9,56884 | 58008 | 59133 | 60257 | 61382 | 62508 | 63634 | 64760 | 65886 | 67013 |
| 13,9 | 9,68140 | 69267 | 70395 | 71523 | 72651 | 73780 | 74909 | 76038 | 77168 | 78298 |
| 14,0 | 9,79428 | 80559 | 81690 | 82821 | 83952 | 85084 | 86216 | 87349 | 88482 | 89615 |
| 14,1 | 9,90749 | 91882 | 93016 | 94151 | 95286 | 96421 | 97556 | 98692 | 99828 | *00964 |
| 14,2 | 10,02101 | 03238 | 04375 | 05513 | 06650 | 07789 | 08927 | 10066 | 11205 | 12345 |
| 14,3 | 10,13485 | 14625 | 15765 | 16906 | 18047 | 19188 | 20330 | 21472 | 22614 | 23757 |
| 14,4 | 10,24900 | 26043 | 27187 | 28331 | 29475 | 30620 | 31764 | 32909 | 34055 | 35201 |
| 14,5 | 10,36347 | 37493 | 38640 | 39787 | 40934 | 42082 | 43230 | 44378 | 45526 | 46675 |
| 14,6 | 10,47824 | 48974 | 50124 | 51274 | 52424 | 53575 | 54726 | 55877 | 57029 | 58181 |
| 14,7 | 10,59333 | 60485 | 61638 | 62791 | 63945 | 65099 | 66253 | 67407 | 68562 | 69717 |
| 14,8 | 10,70872 | 72027 | 73183 | 74340 | 75496 | 76653 | 77810 | 78967 | 80125 | 81283 |
| 14,9 | 10,82441 | 83600 | 84759 | 85918 | 87078 | 88237 | 89397 | 90558 | 91719 | 92880 |
| 15,0 | 10,94041 | 95202 | 96364 | 97527 | 98689 | 99852 | *01015 | *02178 | *03342 | *04506 |
| 15,1 | 11,05670 | 06835 | 08003 | 09165 | 10330 | 11496 | 12662 | 13829 | 14995 | 16162 |
| 15,2 | 11,17338 | 18497 | 19665 | 20833 | 22001 | 23170 | 24339 | 25509 | 26678 | 27848 |
| 15,3 | 11,29018 | 30189 | 31360 | 32531 | 33702 | 34874 | 36046 | 37218 | 38390 | 39563 |
| 15,4 | 11,40736 | 41910 | 43083 | 44257 | 45432 | 46606 | 47781 | 48956 | 50132 | 51308 |
| 15,5 | 11,52484 | 53660 | 54836 | 56013 | 57191 | 58368 | 59546 | 60724 | 61902 | 63081 |
| 15,6 | 11,64260 | 65439 | 66618 | 67798 | 68978 | 70159 | 71339 | 72520 | 73701 | 74883 |
| 15,7 | 11,76065 | 77247 | 78429 | 79612 | 80795 | 81978 | 83161 | 84345 | 85529 | 86713 |
| 15,8 | 11,87898 | 89083 | 90263 | 91454 | 92639 | 93825 | 95012 | 96198 | 97385 | 98572 |
| 15,9 | 11,99760 | *00948 | *02136 | *03324 | *04513 | *05701 | *06891 | *08080 | *09270 | *10460 |
| 16,0 | 12,11650 | 12841 | 14031 | 15222 | 16414 | 17605 | 18797 | 19990 | 21182 | 22375 |

Продолжение табл. XII

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 16,0 | 12,11650 | 12841 | 14031 | 15222 | 16414 | 17605 | 18797 | 19990 | 21182 | 22375 |
| 16,1 | 12,23568 | 24761 | 25955 | 27149 | 28343 | 29537 | 30732 | 31927 | 33122 | 34318 |
| 16,2 | 12,35514 | 36710 | 37906 | 39103 | 40300 | 41497 | 42695 | 43892 | 45090 | 46289 |
| 16,3 | 12,47487 | 48686 | 49885 | 51085 | 52285 | 53484 | 54685 | 55885 | 57086 | 58287 |
| 16,4 | 12,59488 | 60690 | 61892 | 63094 | 64296 | 65499 | 66702 | 67905 | 69109 | 70313 |
| 16,5 | 12,71517 | 72721 | 73926 | 75131 | 76336 | 77541 | 78747 | 79953 | 81159 | 82365 |
| 16,6 | 12,83372 | 84779 | 85986 | 87194 | 88402 | 89610 | 90818 | 92027 | 93236 | 94445 |
| 16,7 | 12,95555 | 96864 | 98074 | 99285 | *00495 | *01706 | *02917 | *04128 | *05340 | *06552 |
| 16,8 | 13,07764 | 08976 | 10189 | 11402 | 12615 | 13828 | 15042 | 16256 | 17470 | 18685 |
| 16,9 | 13,19900 | 21115 | 22330 | 23546 | 24761 | 25978 | 27194 | 28410 | 29627 | 30845 |
| 17,0 | 13,32062 | 33280 | 34498 | 35716 | 36934 | 38153 | 39372 | 40591 | 41811 | 43031 |
| 17,1 | 13,44251 | 45471 | 46691 | 47912 | 49133 | 50355 | 51576 | 52798 | 54020 | 55243 |
| 17,2 | 13,56465 | 57688 | 58911 | 60135 | 61359 | 62583 | 63807 | 65031 | 66256 | 67481 |
| 17,3 | 13,68706 | 69932 | 71157 | 72383 | 73610 | 74836 | 76063 | 77290 | 78517 | 79745 |
| 17,4 | 13,80973 | 82201 | 83429 | 84658 | 85887 | 87116 | 88345 | 89575 | 90805 | 92035 |
| 17,5 | 13,93265 | 94496 | 95727 | 96958 | 98189 | 99421 | *00653 | *01885 | *03117 | *04350 |
| 17,6 | 14,05583 | 06816 | 08050 | 09283 | 10517 | 11751 | 12986 | 14221 | 15456 | 16691 |
| 17,7 | 14,17926 | 19162 | 20398 | 21634 | 22871 | 24107 | 25344 | 26582 | 27819 | 29057 |
| 17,8 | 14,30295 | 31533 | 32771 | 34010 | 35249 | 36488 | 37728 | 38968 | 40208 | 41448 |
| 17,9 | 14,42688 | 43929 | 45170 | 46411 | 47653 | 48894 | 50136 | 51379 | 52621 | 53864 |
| 18,0 | 14,55107 | 56350 | 57594 | 58838 | 60081 | 61325 | 62570 | 63815 | 65060 | 66305 |
| 18,1 | 14,67550 | 68796 | 70042 | 71288 | 72534 | 73781 | 75028 | 76275 | 77523 | 78770 |
| 18,2 | 14,80018 | 81266 | 82515 | 83763 | 85012 | 86261 | 87511 | 88760 | 90010 | 91260 |
| 18,3 | 14,92511 | 93761 | 95012 | 96263 | 97515 | 98766 | *00018 | *01270 | *02522 | *03775 |
| 18,4 | 15,05028 | 06281 | 07534 | 08788 | 10041 | 11295 | 12550 | 13804 | 15059 | 16314 |
| 18,5 | 15,17569 | 18824 | 20080 | 21336 | 22592 | 23849 | 25105 | 26362 | 27619 | 28877 |
| 18,6 | 15,30134 | 31392 | 32650 | 33909 | 35167 | 36426 | 37685 | 38944 | 40204 | 41464 |
| 18,7 | 15,42724 | 43984 | 45244 | 46505 | 47766 | 49027 | 50289 | 51550 | 52812 | 54074 |
| 18,8 | 15,55337 | 56599 | 57862 | 59125 | 60389 | 61652 | 62916 | 64180 | 65444 | 66709 |
| 18,9 | 15,67974 | 69239 | 70504 | 71769 | 73035 | 74301 | 75567 | 76833 | 78100 | 79367 |
| 19,0 | 15,80634 | 81901 | 83169 | 84437 | 85705 | 86973 | 88242 | 89510 | 90779 | 92049 |
| 19,1 | 15,93318 | 94588 | 95858 | 97128 | 98398 | 99669 | *00940 | *02211 | *03482 | *04754 |
| 19,2 | 16,06025 | 07297 | 08570 | 09842 | 11115 | 12388 | 13661 | 14934 | 16208 | 17482 |
| 19,3 | 16,18756 | 20030 | 21305 | 22580 | 23855 | 25130 | 26405 | 27681 | 28957 | 30233 |
| 19,4 | 16,31510 | 32786 | 34063 | 35340 | 36617 | 37895 | 39173 | 40451 | 41729 | 43007 |
| 19,5 | 16,44286 | 45565 | 46844 | 48124 | 49403 | 50683 | 51963 | 53243 | 54524 | 55805 |
| 19,6 | 16,57086 | 58367 | 59648 | 60930 | 62212 | 63494 | 64776 | 66059 | 67341 | 68624 |
| 19,7 | 16,69908 | 71191 | 72475 | 73759 | 75043 | 76327 | 77612 | 78897 | 80182 | 81467 |
| 19,8 | 16,82752 | 84038 | 85324 | 86610 | 87897 | 89183 | 90470 | 91757 | 93045 | 94332 |
| 19,9 | 16,95620 | 96908 | 98196 | 99484 | *00773 | *02062 | *03351 | *04640 | *05930 | *07219 |
| 20,0 | 17,08509 | 09800 | 11090 | 12381 | 13672 | 14963 | 16254 | 17545 | 18837 | 20129 |
| 20,1 | 17,21421 | 22714 | 24006 | 25299 | 26592 | 27886 | 29179 | 30473 | 31767 | 33061 |
| 20,2 | 17,34355 | 35650 | 36945 | 38240 | 39535 | 40831 | 42127 | 43422 | 44719 | 46015 |
| 20,3 | 17,47312 | 48608 | 49905 | 51203 | 52500 | 53798 | 55096 | 56394 | 57692 | 58991 |
| 20,4 | 17,60290 | 61589 | 62888 | 64187 | 65487 | 66787 | 68087 | 69387 | 70688 | 71989 |
| 20,5 | 17,73290 | 74591 | 85892 | 77194 | 78496 | 79798 | 81100 | 82402 | 83705 | 85008 |
| 20,6 | 17,86311 | 87614 | 88918 | 90222 | 91526 | 92830 | 94134 | 95439 | 96744 | 98049 |
| 20,7 | 17,99354 | *00660 | *01966 | *03271 | *04578 | *05884 | *07191 | *08497 | *09804 | *11112 |
| 20,8 | 18,12419 | 13727 | 15035 | 16343 | 17651 | 18959 | 20268 | 21577 | 22886 | 24196 |
| 20,9 | 18,25505 | 26815 | 28125 | 29435 | 30746 | 32056 | 33367 | 34678 | 35989 | 37301 |
| 21,0 | 18,38612 | 39924 | 41236 | 42549 | 43861 | 45174 | 46487 | 47800 | 49114 | 50427 |

Продолжение табл. XII

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|----------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 21,0 | 18,38612 | 39924 | 41236 | 42549 | 43861 | 45174 | 46487 | 47800 | 49114 | 50427 |
| 21,1 | 18,51741 | 53055 | 54369 | 55684 | 56998 | 58313 | 59628 | 60944 | 62259 | 63575 |
| 21,2 | 18,64891 | 66207 | 67523 | 68840 | 70156 | 71473 | 72790 | 74108 | 75425 | 76743 |
| 21,3 | 18,78061 | 79379 | 80698 | 82016 | 83335 | 84654 | 85974 | 87293 | 88613 | 89933 |
| 21,4 | 18,91253 | 92573 | 93893 | 95214 | 96535 | 97856 | 99178 | *00499 | *01821 | *03143 |
| 21,5 | 19,04465 | 05787 | 07110 | 08433 | 09756 | 11079 | 12402 | 13726 | 15050 | 16374 |
| 21,6 | 19,17698 | 19022 | 20347 | 21672 | 22997 | 24322 | 25648 | 26973 | 28299 | 29625 |
| 21,7 | 19,30951 | 32278 | 33605 | 34931 | 36259 | 37586 | 38913 | 40241 | 41569 | 42897 |
| 21,8 | 19,44225 | 45554 | 46883 | 48212 | 49541 | 50870 | 52200 | 53529 | 54859 | 56189 |
| 21,9 | 19,57520 | 58850 | 60181 | 61512 | 62843 | 64175 | 65506 | 66838 | 68170 | 69502 |
| 22,0 | 19,70834 | 72167 | 73500 | 74833 | 76166 | 77499 | 78833 | 80167 | 81501 | 82835 |
| 22,1 | 19,84169 | 85504 | 86839 | 88174 | 89509 | 90844 | 92180 | 93516 | 94852 | 96188 |
| 22,2 | 19,97524 | 98861 | *00198 | *01535 | *02872 | *04209 | *05547 | *06885 | *08223 | *09561 |
| 22,3 | 20,10899 | 12238 | 13577 | 14916 | 16255 | 17594 | 18934 | 20274 | 21614 | 22954 |
| 22,4 | 20,24294 | 25635 | 26975 | 28316 | 29658 | 30999 | 32341 | 33682 | 35024 | 36366 |
| 22,5 | 20,37709 | 39051 | 40394 | 41737 | 43080 | 44424 | 45767 | 47111 | 48455 | 49799 |
| 22,6 | 20,51143 | 52488 | 53832 | 55177 | 56523 | 57868 | 59213 | 60559 | 61905 | 63251 |
| 22,7 | 20,64597 | 65944 | 67291 | 68637 | 69984 | 71332 | 72679 | 74027 | 75375 | 76723 |
| 22,8 | 20,78071 | 79419 | 80768 | 82117 | 83466 | 84815 | 86165 | 87514 | 88864 | 90214 |
| 22,9 | 20,91564 | 92915 | 94265 | 95616 | 96967 | 98318 | 99669 | *01021 | *02373 | *03725 |
| 23,0 | 21,05077 | 06429 | 07781 | 09134 | 10487 | 11840 | 13193 | 14547 | 15901 | 17254 |
| 23,1 | 21,18608 | 19953 | 21317 | 22672 | 24027 | 25382 | 26737 | 28092 | 29448 | 30804 |
| 23,2 | 21,32160 | 33516 | 34872 | 36229 | 37585 | 38942 | 40299 | 41657 | 43014 | 44372 |
| 23,3 | 21,45730 | 47088 | 48446 | 49804 | 51163 | 52522 | 53881 | 55240 | 56600 | 57959 |
| 23,4 | 21,59319 | 60679 | 62039 | 63399 | 64760 | 66121 | 67482 | 68843 | 70204 | 71565 |
| 23,5 | 21,72927 | 74289 | 75651 | 77013 | 78376 | 79738 | 81101 | 82464 | 83827 | 85191 |
| 23,6 | 21,86554 | 87918 | 89282 | 90646 | 92010 | 93375 | 94739 | 96104 | 97469 | 98834 |
| 23,7 | 22,00200 | 01566 | 02931 | 04297 | 05664 | 07030 | 08396 | 09763 | 11130 | 12497 |
| 23,8 | 22,13864 | 15232 | 16600 | 17968 | 19336 | 20704 | 22072 | 23441 | 24810 | 26179 |
| 23,9 | 22,27548 | 28917 | 30287 | 31656 | 33026 | 34396 | 35767 | 37137 | 38508 | 39878 |
| 24,0 | 22,41249 | 42621 | 43992 | 45364 | 46735 | 48107 | 49479 | 50852 | 52224 | 53597 |
| 24,1 | 22,54970 | 56343 | 57716 | 59089 | 60463 | 61837 | 63211 | 64585 | 65959 | 67334 |
| 24,2 | 22,68708 | 70083 | 71458 | 72833 | 74209 | 75584 | 76960 | 78336 | 79712 | 81089 |
| 24,3 | 22,82465 | 83842 | 85219 | 86596 | 87973 | 89351 | 90728 | 92106 | 93484 | 94862 |
| 24,4 | 22,96240 | 97619 | 98998 | *00377 | *01756 | *03135 | *04514 | *05894 | *07274 | *08654 |
| 24,5 | 23,10034 | 11414 | 12795 | 14175 | 15556 | 16937 | 18319 | 19700 | 21082 | 22463 |
| 24,6 | 23,23845 | 25227 | 26610 | 27992 | 29375 | 30758 | 32141 | 33524 | 34907 | 36291 |
| 24,7 | 23,37675 | 39059 | 40443 | 41827 | 43212 | 44596 | 45981 | 47366 | 48751 | 50137 |
| 24,8 | 23,51522 | 52908 | 54294 | 55680 | 57066 | 58453 | 59839 | 61226 | 62613 | 64000 |
| 24,9 | 23,65387 | 66775 | 68163 | 69551 | 70939 | 72327 | 73715 | 75104 | 76493 | 77881 |
| 25,0 | 23,79271 | 80660 | 82049 | 83439 | 84829 | 86219 | 87609 | 88999 | 90390 | 91780 |
| 25,1 | 23,93171 | 94562 | 95954 | 97345 | 98737 | *00128 | *01520 | *02912 | *04305 | *05697 |
| 25,2 | 24,07090 | 08483 | 09876 | 11269 | 12662 | 14056 | 15449 | 16843 | 18237 | 19631 |
| 25,3 | 24,21026 | 22420 | 23815 | 25210 | 26605 | 28000 | 29396 | 30792 | 32187 | 33583 |
| 25,4 | 24,34979 | 36376 | 37772 | 39169 | 40566 | 41963 | 43360 | 44757 | 46155 | 47553 |
| 25,5 | 24,48950 | 50348 | 51747 | 53145 | 54544 | 55942 | 57341 | 58740 | 60140 | 61539 |
| 25,6 | 24,62939 | 64339 | 65739 | 67139 | 68539 | 69939 | 71340 | 72741 | 74142 | 75543 |
| 25,7 | 24,76944 | 78346 | 79748 | 81150 | 82552 | 83954 | 85356 | 86759 | 88161 | 89564 |
| 25,8 | 24,90967 | 92371 | 93774 | 95178 | 96581 | 97985 | 99389 | *00794 | *02198 | *03603 |
| 25,9 | 25,05007 | 06212 | 07617 | 09023 | 10428 | 11834 | 13240 | 14646 | 16052 | 17458 |
| 26,0 | 25,19065 | 20471 | 21878 | 23285 | 24692 | 26100 | 27507 | 28915 | 30323 | 31731 |

Продолжение табл. XII

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|----------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 26,0 | 25,19065 | 20471 | 21878 | 23285 | 24692 | 26100 | 27507 | 28915 | 30323 | 31731 |
| 26,1 | 25,33139 | 34547 | 35956 | 37364 | 38773 | 40182 | 41591 | 43001 | 44410 | 45820 |
| 26,2 | 25,47230 | 48640 | 50050 | 51461 | 52871 | 54282 | 55693 | 57104 | 58515 | 59926 |
| 26,3 | 25,61338 | 62750 | 64162 | 65574 | 66986 | 68398 | 69811 | 71224 | 72636 | 74050 |
| 26,4 | 25,75463 | 76876 | 78290 | 79704 | 81117 | 82532 | 83946 | 85360 | 86775 | 88190 |
| 26,5 | 25,89604 | 91020 | 92435 | 93850 | 95266 | 96682 | 98097 | 99514 | *00930 | 02346 |
| 26,6 | 26,03763 | 05180 | 06596 | 08014 | 09431 | 10848 | 12266 | 13684 | 15101 | 16520 |
| 26,7 | 26,17938 | 19356 | 20775 | 22194 | 23612 | 25031 | 26451 | 27870 | 29290 | 30709 |
| 26,8 | 26,32129 | 33549 | 34970 | 36390 | 37811 | 39231 | 40652 | 42073 | 43494 | 44916 |
| 26,9 | 26,46337 | 47759 | 49181 | 50603 | 52025 | 53448 | 54870 | 56293 | 57716 | *59139 |
| 27,0 | 26,60562 | 61985 | 63409 | 64832 | 66256 | 67680 | 69104 | 70529 | 71953 | 73378 |
| 27,1 | 26,74803 | 76228 | 77653 | 79078 | 80504 | 81929 | 83355 | 84781 | 86207 | 87634 |
| 27,2 | 26,89060 | 90487 | 91913 | 93340 | 94767 | 96195 | 97622 | 99050 | *00478 | *01905 |
| 27,3 | 27,03334 | 04762 | 06190 | 07619 | 09047 | 10476 | 11905 | 13335 | 14764 | 16194 |
| 27,4 | 27,17623 | 19053 | 20483 | 21913 | 23344 | 24774 | 26205 | 27636 | 29067 | 30498 |
| 27,5 | 27,31929 | 33361 | 34792 | 36224 | 37656 | 39088 | 40520 | 41953 | *43385 | 44818 |
| 27,6 | 27,46251 | 47684 | 49117 | 50551 | 51984 | 53418 | 54852 | 56286 | 57720 | 59154 |
| 27,7 | 27,60589 | 62024 | 63458 | 64893 | 66329 | 67764 | 69199 | 70635 | 72071 | 73507 |
| 27,8 | 27,74943 | 76379 | 77816 | 79252 | 80689 | 82126 | 83563 | 85000 | 86437 | 87875 |
| 27,9 | 27,89313 | 90750 | 92188 | 93627 | 95065 | 96503 | 97942 | 99381 | *00820 | *02259 |
| 28,0 | 28,03698 | 05138 | 06577 | 08017 | 09457 | 10897 | 12337 | 13778 | 15218 | 16659 |
| 28,1 | 28,18100 | 19541 | 20982 | 22423 | 23865 | 25306 | 26748 | 28190 | 29632 | 31074 |
| 28,2 | 28,32517 | 33960 | 35402 | 36845 | 38288 | 39731 | 41175 | 42618 | 44062 | 45506 |
| 28,3 | 28,46950 | 48394 | 49838 | 51283 | 52727 | 54172 | 55617 | 57062 | 58507 | 59953 |
| 28,4 | 28,61398 | 62844 | 64290 | 65736 | 67182 | 68628 | 70075 | 71521 | 72968 | 74415 |
| 28,5 | 28,75862 | 77310 | 78757 | 80205 | 81652 | 83100 | 84548 | 85996 | 87445 | 88893 |
| 28,6 | 28,90342 | 91791 | 93240 | 94689 | 96138 | 97587 | 99037 | *00487 | *01937 | *03387 |
| 28,7 | 29,04837 | 06287 | 07738 | 09188 | 10639 | 12090 | 13541 | 14993 | 16444 | 17896 |
| 28,8 | 29,19347 | 20799 | 22251 | 23703 | 25156 | 26608 | 28061 | 29514 | 30967 | 32420 |
| 28,9 | 29,33873 | 35326 | 36780 | 38234 | 39688 | 41142 | 42596 | 44050 | 45505 | 46959 |
| 29,0 | 29,48414 | 49869 | 51324 | 52779 | 54235 | 55690 | 57146 | 58602 | 60058 | 61514 |
| 29,1 | 29,62970 | 64427 | 65883 | 67340 | 68797 | 70254 | 71711 | 73169 | 74626 | 76084 |
| 29,2 | 29,77542 | 79000 | 80458 | 81916 | 83375 | 84833 | 86292 | 87751 | 89210 | 90669 |
| 29,3 | 29,92128 | 93588 | 95048 | 96507 | 97967 | 99427 | *00888 | *02348 | *03809 | *05269 |
| 29,4 | 30,06730 | 08191 | 09652 | 11114 | 12575 | 14037 | 15498 | 16960 | 18422 | 19884 |
| 29,5 | 30,21347 | 22809 | 24272 | 25735 | 27198 | 28661 | 30124 | 31587 | 33051 | 34515 |
| 29,6 | 30,35978 | 37442 | 38907 | 40371 | 41835 | 43300 | 44765 | 46230 | 47695 | 49160 |
| 29,7 | 30,50625 | 52091 | 53556 | 55022 | 56488 | 57954 | 59420 | 60887 | 62353 | 63820 |
| 29,8 | 30,65287 | 66754 | 68221 | 69688 | 71155 | 72623 | 74091 | 75558 | 77026 | 78495 |
| 29,9 | 30,79963 | 81431 | 82900 | 84369 | 85837 | 87307 | 88776 | 90245 | 91714 | 93184 |
| 30,0 | 30,94654 | 96124 | 97594 | 99064 | *00534 | *02005 | *03476 | *04946 | *06417 | *07888 |
| 30,1 | 31,09360 | 10831 | 12303 | 13774 | 15246 | 16718 | 18190 | 19662 | 21135 | 22607 |
| 30,2 | 31,24080 | 25553 | 27026 | 28499 | 29972 | 31446 | 32919 | 34393 | 35867 | 37341 |
| 30,3 | 31,38815 | 40289 | 41764 | 43239 | 44713 | 46188 | 47663 | 49138 | 50614 | 52089 |
| 30,4 | 31,53565 | 55041 | 56516 | 57993 | 59469 | 60945 | 62422 | 63898 | 65375 | 66852 |
| 30,5 | 31,68329 | 69806 | 71284 | 72761 | 74239 | 75717 | 77194 | 78673 | 80151 | 81629 |
| 30,6 | 31,83108 | 84586 | 86065 | 87544 | 89023 | 90502 | 91982 | 93461 | 94941 | 96421 |
| 30,7 | 31,97901 | 99381 | *00861 | *02341 | *03822 | *05303 | *06783 | *08264 | *09746 | 11227 |
| 30,8 | 32,12708 | 14190 | 15671 | 17153 | 18635 | 20117 | 21600 | 23082 | 24564 | 26047 |
| 30,9 | 32,27530 | 29013 | 30496 | 31979 | 33463 | 34946 | 36430 | 37914 | 39398 | 40882 |
| 31,0 | 32,42366 | 43850 | 45335 | 46820 | 48304 | 49789 | 51274 | 52760 | 54245 | 55731 |

Продолжение табл. XII

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|----------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 31,0 | 32,42366 | 43850 | 45335 | 46820 | 48304 | 49789 | 51274 | 52760 | 54245 | 55731 |
| 31,1 | 32,57216 | 58702 | 60188 | 61674 | 63160 | 64647 | 66133 | 67620 | 69107 | 70594 |
| 31,2 | 32,72081 | 73568 | 75055 | 76543 | 78031 | 79518 | 81006 | 82494 | 83983 | 85471 |
| 31,3 | 32,86959 | 88448 | 89937 | 91426 | 92915 | 94404 | 95893 | 97383 | 98873 | *00362 |
| 31,4 | 33,01852 | 03342 | 04832 | 06323 | 07813 | 09304 | 10795 | 12285 | 13776 | 15268 |
| 31,5 | 33,16759 | 18250 | 19742 | 21234 | 22726 | 24218 | 25710 | 27202 | 28694 | 30187 |
| 31,6 | 33,31680 | 33173 | 34666 | 36159 | 37652 | 39145 | 40639 | 42133 | 43626 | 45120 |
| 31,7 | 33,46615 | 48109 | 49603 | 51098 | 52592 | 54087 | 55582 | 57077 | 58572 | 60068 |
| 31,8 | 33,61563 | 63059 | 64555 | 66051 | 67547 | 69043 | 70539 | 72036 | 73532 | 75029 |
| 31,9 | 33,76526 | 78023 | 79520 | 81017 | 82515 | 84012 | 85510 | 87008 | 88506 | 90004 |
| 32,0 | 33,91502 | 93001 | 94499 | 95998 | 97497 | 98996 | *00495 | *01994 | *03493 | *04993 |
| 32,1 | 34,06492 | 07992 | 09492 | 10992 | 12492 | 13993 | 15493 | 16994 | 18494 | 19995 |
| 32,2 | 34,21496 | 22997 | 24499 | 26000 | 27502 | 29003 | 30505 | 32007 | 33509 | 35012 |
| 32,3 | 34,36514 | 38016 | 39519 | 41022 | 42525 | 44028 | 45531 | 47034 | 48538 | 50041 |
| 32,4 | 34,51545 | 53049 | 54553 | 56057 | 57561 | 59066 | 60570 | 62075 | 63580 | 65085 |
| 32,5 | 34,66590 | 68095 | 69601 | 71106 | 72612 | 74118 | 75623 | 77130 | 78636 | 80142 |
| 32,6 | 34,81648 | 83155 | 84662 | 86169 | 87676 | 89183 | 90690 | 92197 | 93705 | 95213 |
| 32,7 | 34,96720 | 98228 | 99736 | *01245 | *02753 | *04262 | *05770 | *07279 | *08788 | *10297 |
| 32,8 | 35,11806 | 13315 | 14825 | 16334 | 17844 | 19354 | 20864 | 22374 | 23884 | 25394 |
| 32,9 | 35,26905 | 28415 | 29926 | 31437 | 32948 | 34459 | 35971 | 37482 | 38994 | 40505 |
| 33,0 | 35,42017 | 43529 | 45041 | 46553 | 48066 | 49578 | 51091 | 52604 | 54117 | 55630 |
| 33,1 | 35,57143 | 58656 | 60170 | 61683 | 63197 | 64711 | 66225 | 67739 | 69253 | 70767 |
| 33,2 | 35,72282 | 73796 | 75311 | 76826 | 78341 | 79856 | 81372 | 82887 | 84403 | 85918 |
| 33,3 | 35,87434 | 88950 | 90466 | 91982 | 93499 | 95015 | 96532 | 98048 | 99565 | *01083 |
| 33,4 | 36,02600 | 04117 | 05634 | 07152 | 08670 | 10187 | 11705 | 13223 | 14742 | 16260 |
| 33,5 | 36,17778 | 19297 | 20816 | 22335 | 23854 | 25373 | 26892 | 28411 | 29931 | 31450 |
| 33,6 | 36,32970 | 34490 | 36010 | 37530 | 39051 | 40571 | 42092 | 43612 | 45133 | 46654 |
| 33,7 | 36,48175 | 49696 | 51218 | 52739 | 54261 | 55783 | 57305 | 58827 | 60349 | 61871 |
| 33,8 | 36,63393 | 64916 | 66439 | 67961 | 69484 | 71007 | 72530 | 74054 | 75577 | 77101 |
| 33,9 | 36,78624 | 80148 | 81672 | 83196 | 84721 | 86245 | 87769 | 89294 | 90819 | 92344 |
| 34,0 | 36,93869 | 95394 | 96919 | 98444 | 99970 | *01495 | *03021 | *04547 | *06073 | *07599 |
| 34,1 | 37,09126 | 10652 | 12179 | 13705 | 15232 | 16759 | 18286 | 19813 | 21341 | 22868 |
| 34,2 | 37,24396 | 25923 | 27451 | 28979 | 30507 | 32036 | 33564 | 35092 | 36621 | 38150 |
| 34,3 | 37,39679 | 41208 | 42737 | 44266 | 45795 | 47325 | 48854 | 50384 | 51914 | 53444 |
| 34,4 | 37,54974 | 56505 | 58035 | 59566 | 61095 | 62627 | 64158 | 65689 | 67220 | 68751 |
| 34,5 | 37,70283 | 71814 | 73346 | 74878 | 76410 | 77942 | 79474 | 81006 | 82539 | 84071 |
| 34,6 | 37,85604 | 87137 | 88670 | 90203 | 91736 | 93270 | 94803 | 96337 | 97870 | 99404 |
| 34,7 | 38,00938 | 02472 | 04007 | 05541 | 07075 | 08610 | 10145 | 11680 | 13215 | 14750 |
| 34,8 | 38,16285 | 17820 | 19356 | 20892 | 22427 | 23963 | 25499 | 27035 | 28572 | 30108 |
| 34,9 | 38,31644 | 33181 | 34718 | 36255 | 37792 | 39329 | 40866 | 42404 | 43941 | 45479 |
| 35,0 | 38,47016 | 48554 | 50092 | 51631 | 53169 | 54707 | 56246 | 57784 | 59323 | 60862 |
| 35,1 | 38,62401 | 63940 | 65480 | 67019 | 68558 | 70098 | 71638 | 73178 | 74718 | 76258 |
| 35,2 | 38,77798 | 79339 | 80879 | 82420 | 83961 | 85502 | 87043 | 88584 | 90125 | 91666 |
| 35,3 | 38,93208 | 94750 | 96291 | 97833 | 99375 | *00918 | *02460 | *04002 | *05545 | *07087 |
| 35,4 | 39,08630 | 10173 | 11716 | 13259 | 14802 | 16346 | 17889 | 19433 | 20977 | 22521 |
| 35,5 | 39,24065 | 25609 | 27153 | 28698 | 30242 | 31787 | 33331 | 34876 | 36421 | 37967 |
| 35,6 | 39,39512 | 41057 | 42603 | 44148 | 45694 | 47240 | 48786 | 50332 | 51878 | 53425 |
| 35,7 | 39,54971 | 56518 | 58065 | 59611 | 61158 | 62706 | 64253 | 65800 | 67348 | 68895 |
| 35,8 | 39,70443 | 71991 | 73539 | 75087 | 76635 | 78183 | 79732 | 81280 | 82829 | 84378 |
| 35,9 | 39,85927 | 87076 | 88625 | 90175 | 91724 | 93274 | 94823 | 96373 | 97923 | 99473 |
| 36,0 | 40,01423 | 02974 | 04524 | 06075 | 07625 | 09176 | 10727 | 12278 | 13829 | 15380 |

Продолжение табл. XII

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 36,0 | 40,01423 | 02974 | 04524 | 06075 | 07625 | 09176 | 10727 | 12278 | 13829 | 15380 |
| 36,1 | 40,16932 | 18483 | 20035 | 21587 | 23139 | 24691 | 26263 | 27795 | 29347 | 30900 |
| 36,2 | 40,32453 | 34005 | 35558 | 37111 | 38664 | 40217 | 41771 | 43324 | 44878 | 46432 |
| 36,3 | 40,47985 | 49539 | 51093 | 52648 | 54202 | 55756 | 57311 | 58866 | 60420 | 61975 |
| 36,4 | 40,63530 | 65086 | 66641 | 68196 | 69752 | 71308 | 72863 | 74419 | 75975 | 77531 |
| 36,5 | 40,79088 | 80644 | 82200 | 83757 | 85314 | 86871 | 88428 | 89985 | 91542 | 93099 |
| 36,6 | 40,94657 | 96214 | 97772 | 99330 | *00888 | *02446 | *04004 | *05562 | *07121 | *08679 |
| 36,7 | 41,10238 | 11797 | 13356 | 14915 | 16474 | 18033 | 19592 | 21152 | 22712 | 24271 |
| 36,8 | 41,25831 | 27391 | 28951 | 30512 | 32072 | 33632 | 35193 | 36754 | 38314 | 39875 |
| 36,9 | 41,41436 | 42998 | 44559 | 46120 | 47682 | 49243 | 50805 | 52367 | 53929 | 55491 |
| 37,0 | 41,57054 | 58616 | 60178 | 61741 | 63304 | 64867 | 66429 | 67993 | 69556 | 71119 |
| 37,1 | 41,72683 | 74246 | 75810 | 77374 | 78937 | 80501 | 82066 | 83630 | 85194 | 86759 |
| 37,2 | 41,88323 | 89888 | 91453 | 93018 | 94583 | 96148 | 97714 | 99279 | *00845 | *02410 |
| 37,3 | 42,03971 | 05542 | 07108 | 08674 | 10240 | 11807 | 13373 | 14940 | 16507 | 18074 |
| 37,4 | 42,19541 | 21208 | 22775 | 24342 | 25910 | 27478 | 29045 | 30613 | 32181 | 33749 |
| 37,5 | 42,35317 | 36885 | 38454 | 40022 | 41591 | 43159 | 44728 | 46297 | 47866 | 49436 |
| 37,6 | 42,51005 | 52574 | 54144 | 55714 | 57283 | 58853 | 60423 | 61993 | 63564 | 65134 |
| 37,7 | 42,66705 | 68275 | 69846 | 71417 | 72988 | 74559 | 76130 | 77701 | 79273 | 80844 |
| 37,8 | 42,82416 | 83938 | 85560 | 87132 | 88704 | 90276 | 91848 | 93421 | 94994 | 96566 |
| 37,9 | 42,98139 | 99712 | *01285 | *02858 | *04432 | *06005 | *07578 | *09152 | *10726 | *12300 |
| 38,0 | 43,13874 | 15448 | 17022 | 18596 | 20171 | 21745 | 23320 | 24895 | 26470 | 28045 |
| 38,1 | 43,29620 | 31195 | 32771 | 34346 | 35922 | 37497 | 39073 | 40649 | 42225 | 43801 |
| 38,2 | 43,45378 | 46954 | 48531 | 50107 | 51684 | 53261 | 54838 | 56415 | 57992 | 59570 |
| 38,3 | 43,61147 | 62725 | 64302 | 65880 | 67458 | 69036 | 70614 | 72192 | 73771 | 75349 |
| 38,4 | 43,76928 | 78506 | 80085 | 81664 | 83243 | 84822 | 86402 | 87981 | 89561 | 91140 |
| 38,5 | 43,92720 | 94300 | 95880 | 97460 | 99040 | *00620 | *02201 | *03781 | *05362 | *06943 |
| 38,6 | 44,08524 | 10105 | 11686 | 13267 | 14848 | 16430 | 18011 | 19593 | 21175 | 22757 |
| 38,7 | 44,24339 | 25221 | 27503 | 29085 | 30668 | 32251 | 33833 | 35416 | 36999 | 38582 |
| 38,8 | 44,40165 | 41748 | 43332 | 44915 | 46499 | 48083 | 49666 | 51250 | 52834 | 54419 |
| 38,9 | 44,56003 | 57587 | 59172 | 60756 | 62341 | 63926 | 65511 | 67096 | 68681 | 70267 |
| 39,0 | 44,71852 | 73438 | 75023 | 76609 | 78195 | 79781 | 81367 | 82953 | 84539 | 86126 |
| 39,1 | 44,87712 | 89299 | 90886 | 92473 | 94060 | 95647 | 97234 | 98821 | *00409 | *01996 |
| 39,2 | 45,03584 | 05172 | 06760 | 08348 | 09936 | 11524 | 13112 | 14701 | 16289 | 17878 |
| 39,3 | 45,19467 | 21056 | 22645 | 24234 | 25823 | 27412 | 29002 | 30592 | 32181 | 33771 |
| 39,4 | 45,35361 | 36951 | 38541 | 40131 | 41722 | 43312 | 44903 | 46493 | 48084 | 49675 |
| 39,5 | 45,51266 | 52857 | 54448 | 56040 | 57631 | 59223 | 60815 | 62406 | 63998 | 65590 |
| 39,6 | 45,67182 | 68775 | 70367 | 71959 | 73552 | 75145 | 76738 | 78330 | 79923 | 81517 |
| 39,7 | 45,83110 | 84703 | 86297 | 87890 | 89484 | 91078 | 92672 | 94266 | 95860 | 97454 |
| 39,8 | 45,99048 | *00643 | *02237 | *03832 | *05427 | *07022 | *08617 | *10212 | *11807 | *13402 |
| 39,9 | 46,14998 | 16593 | 18189 | 19785 | 21381 | 22977 | 24573 | 26169 | 27766 | 29362 |
| 40,0 | 46,30959 | 32555 | 34152 | 35749 | 37346 | 38943 | 40540 | 42137 | 43735 | 45332 |
| 40,1 | 46,46930 | 48529 | 50126 | 51724 | 53322 | 54920 | 56518 | 58117 | 59715 | 61314 |
| 40,2 | 46,62912 | 64511 | 66110 | 67710 | 69309 | 70908 | 72507 | 74107 | 75707 | 77306 |
| 40,3 | 46,78906 | 80506 | 82106 | 83706 | 85307 | 86907 | 88507 | 90108 | 91709 | 93310 |
| 40,4 | 46,94911 | 96512 | 98113 | 99714 | *01315 | *02917 | *04518 | *06120 | *07722 | *09324 |
| 40,5 | 47,10926 | 12523 | 14130 | 15732 | 17335 | 18938 | 20540 | 22143 | 23746 | 25349 |
| 40,6 | 47,26952 | 28555 | 30158 | 31762 | 33365 | 34969 | 36573 | 38177 | 39781 | 41385 |
| 40,7 | 47,42989 | 44593 | 46198 | 47802 | 49407 | 51011 | 52616 | 54221 | 55826 | 57431 |
| 40,8 | 47,59037 | 60642 | 62248 | 63853 | 65459 | 67065 | 68670 | 70277 | 71883 | 73489 |
| 40,9 | 47,75095 | 76702 | 78308 | 79915 | 81522 | 83129 | 84736 | 86343 | 87950 | 89557 |
| 41,0 | 47,91165 | 92772 | 94380 | 95987 | 97595 | 99203 | *00811 | *02419 | *04028 | *05636 |

Продолжение табл. XII

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 41,0 | 47,91165 | 92772 | 94380 | 95987 | 97595 | 99203 | *00811 | *02419 | *04028 | *05636 |
| 41,1 | 48,07245 | 08853 | 10462 | 12071 | 13680 | 15289 | 16898 | 18507 | 20116 | 21726 |
| 41,2 | 48,23335 | 24945 | 26555 | 28165 | 29775 | 31385 | 32995 | 34605 | 36215 | 37826 |
| 41,3 | 48,39437 | 41047 | 42658 | 44269 | 45880 | 47491 | 49103 | 50714 | 52325 | 53937 |
| 41,4 | 48,55549 | 57160 | 58772 | 60384 | 61996 | 63609 | 65221 | 66833 | 68446 | 70059 |
| 41,5 | 48,71671 | 73284 | 74897 | 76510 | 78123 | 79737 | 81350 | 82963 | 84577 | 86191 |
| 41,6 | 48,87805 | 89418 | 91032 | 92647 | 94261 | 95875 | 97490 | 99104 | *00719 | *02333 |
| 41,7 | 49,03948 | 05563 | 07178 | 08794 | 10409 | 12024 | 13640 | 15255 | 16871 | 18487 |
| 41,8 | 49,20103 | 21719 | 23335 | 24951 | 26567 | 28184 | 29800 | 31417 | 33034 | 34651 |
| 41,9 | 49,36268 | 37885 | 39502 | 41119 | 42736 | 44354 | 45972 | 47589 | 49207 | 50825 |
| 42,0 | 49,52443 | 54061 | 55679 | 57298 | 58916 | 60534 | 62153 | 63772 | 65391 | 67010 |
| 42,1 | 49,68629 | 70248 | 71867 | 73486 | 75106 | 76726 | 78345 | 79965 | 81585 | 83205 |
| 42,2 | 49,84825 | 86445 | 88065 | 89686 | 91306 | 92927 | 94548 | 96169 | 97789 | 99410 |
| 42,3 | 50,01032 | 02653 | 04274 | 05896 | 07517 | 09139 | 10761 | 12382 | 14004 | 15627 |
| 42,4 | 50,17249 | 18871 | 20493 | 22116 | 23738 | 25361 | 26984 | 28607 | 30230 | 31853 |
| 42,5 | 50,33476 | 35099 | 36723 | 38346 | 39970 | 41594 | 43218 | 44841 | 46465 | 48090 |
| 42,6 | 50,49714 | 51338 | 52963 | 54587 | 56212 | 57837 | 59461 | 61086 | 62712 | 64337 |
| 42,7 | 50,65962 | 67583 | 69213 | 70838 | 72464 | 74090 | 75716 | 77342 | 78968 | 80594 |
| 42,8 | 50,82203 | 83847 | 85473 | 87100 | 88727 | 90353 | 91980 | 93607 | 95234 | 96862 |
| 42,9 | 50,98489 | *00116 | *01744 | *03372 | *04999 | *06627 | *08255 | *09883 | *11511 | *13139 |
| 43,0 | 51,14768 | 16396 | 18025 | 19653 | 21282 | 22911 | 24540 | 26169 | 27798 | 29428 |
| 43,1 | 51,31057 | 32683 | 34316 | 35946 | 37575 | 39205 | 40835 | 42465 | 44096 | 45726 |
| 43,2 | 51,47356 | 48987 | 50617 | 52248 | 53879 | 55510 | 57141 | 58772 | 60403 | 62034 |
| 43,3 | 51,63666 | 65297 | 66929 | 68560 | 70192 | 71824 | 73456 | 75088 | 76721 | 78353 |
| 43,4 | 51,79985 | 81618 | 83250 | 84883 | 86516 | 88149 | 89782 | 91415 | 93048 | 94682 |
| 43,5 | 51,96315 | 97949 | 99582 | *01216 | *02850 | *04484 | *06118 | *07752 | *09386 | *11020 |
| 43,6 | 52,12655 | 14289 | 15924 | 17559 | 19194 | 20829 | 22464 | 24099 | 25734 | 27369 |
| 43,7 | 52,29005 | 30640 | 32276 | 33912 | 35548 | 37183 | 38820 | 40456 | 42092 | 43728 |
| 43,8 | 52,45365 | 47001 | 48638 | 50275 | 51911 | 53548 | 55185 | 56823 | 58460 | 60097 |
| 43,9 | 52,61735 | 63372 | 65010 | 66648 | 68285 | 69923 | 71561 | 73200 | 74838 | 76476 |
| 44,0 | 52,78115 | 79753 | 81392 | 83031 | 84669 | 86308 | 87947 | 89587 | 91226 | 92865 |
| 44,1 | 52,94505 | 96144 | 97784 | 99424 | *01063 | *02703 | *04343 | *05984 | *07624 | *09264 |
| 44,2 | 53,10905 | 12545 | 14186 | 15826 | 17467 | 19108 | 20749 | 22390 | 24032 | 25673 |
| 44,3 | 53,27314 | 28956 | 30598 | 32239 | 33881 | 35523 | 37165 | 38807 | 40449 | 42092 |
| 44,4 | 53,43734 | 45377 | 47019 | 48662 | 50305 | 51948 | 53591 | 55234 | 56877 | 58521 |
| 44,5 | 53,60164 | 61807 | 63451 | 65095 | 66739 | 68382 | 70026 | 71671 | 73315 | 74959 |
| 44,6 | 53,76603 | 78248 | 79893 | 81537 | 83182 | 84827 | 86472 | 88117 | 89762 | 91407 |
| 44,7 | 53,93053 | 94698 | 96344 | 97990 | 99635 | *01281 | *02927 | *04573 | *06219 | *07866 |
| 44,8 | 54,09512 | 11159 | 12805 | 14452 | 16099 | 17745 | 19392 | 21039 | 22687 | 24334 |
| 44,9 | 54,25981 | 27629 | 29276 | 30924 | 32571 | 34219 | 35867 | 37515 | 39163 | 40812 |
| 45,0 | 54,42460 | 44108 | 45757 | 47405 | 49054 | 50703 | 52352 | 54001 | 55650 | 57299 |
| 45,1 | 54,58948 | 60598 | 62247 | 63897 | 65547 | 67196 | 68846 | 70496 | 72146 | 73797 |
| 45,2 | 54,75447 | 77097 | 78748 | 80398 | 82049 | 83700 | 85350 | 87001 | 88652 | 90304 |
| 45,3 | 54,91955 | 93606 | 95258 | 96909 | 98561 | *00212 | *01864 | *03516 | *05168 | *06820 |
| 45,4 | 55,08473 | 10125 | 11777 | 13430 | 15082 | 16735 | 18388 | 20041 | 21694 | 23347 |
| 45,5 | 55,25000 | 26653 | 28307 | 29960 | 31614 | 33267 | 34921 | 36575 | 38229 | 39883 |
| 45,6 | 55,41537 | 43191 | 44846 | 46500 | 48154 | 49809 | 51464 | 53119 | 54774 | 56429 |
| 45,7 | 55,58084 | 59739 | 61394 | 63050 | 64705 | 66361 | 68016 | 69672 | 71328 | 72984 |
| 45,8 | 55,74640 | 76296 | 77952 | 79609 | 81265 | 82922 | 84578 | 86235 | 87892 | 89549 |
| 45,9 | 55,91206 | 92863 | 94520 | 96177 | 97835 | 99492 | *01150 | *02808 | *04465 | *06123 |
| 46,0 | 56,07781 | 09439 | 11097 | 12756 | 14414 | 16072 | 17731 | 19390 | 21048 | 22707 |

Продолжение табл. XII

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|----------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 46,0 | 56,07781 | 09439 | 11097 | 12756 | 14414 | 16072 | 17731 | 19390 | 21048 | 22707 |
| 46,1 | 56,24366 | 26025 | 27684 | 29344 | 31003 | 32662 | 34322 | 35981 | 37641 | 39301 |
| 46,2 | 56,40961 | 42621 | 44281 | 45941 | 47601 | 49261 | 50922 | 52582 | 54243 | 55904 |
| 46,3 | 56,57556 | 59226 | 60887 | 62548 | 64209 | 65870 | 67532 | 69193 | 70855 | 72516 |
| 46,4 | 56,74178 | 75840 | 77502 | 79164 | 80826 | 82488 | 84151 | 85813 | 87476 | 89138 |
| 46,5 | 56,90801 | 92464 | 94127 | 95790 | 97453 | 99116 | *00779 | *02443 | *04106 | *05770 |
| 46,6 | 57,07433 | 09097 | 10761 | 12425 | 14089 | 15753 | 17417 | 19082 | 20746 | 22411 |
| 46,7 | 57,24075 | 25740 | 27405 | 29070 | 30735 | 32400 | 34065 | 35730 | 37395 | 39061 |
| 46,8 | 57,40726 | 42392 | 44058 | 45724 | 47390 | 49056 | 50722 | 52388 | 54054 | 55721 |
| 46,9 | 57,57387 | 59054 | 60720 | 62387 | 64054 | 65721 | 67388 | 69055 | 70722 | 72390 |
| 47,0 | 57,74057 | 75724 | 77392 | 79060 | 80728 | 82395 | 84063 | 85731 | 87400 | 89068 |
| 47,1 | 57,90736 | 92405 | 94073 | 95742 | 97411 | 99079 | *00748 | *02417 | *04086 | *05756 |
| 47,2 | 58,07425 | 09094 | 10764 | 12433 | 14103 | 15773 | 17442 | 19112 | 20782 | 22453 |
| 47,3 | 58,24123 | 25793 | 27463 | 29134 | 30804 | 32475 | 34146 | 35817 | 37488 | 39159 |
| 47,4 | 58,40830 | 42501 | 44172 | 45844 | 47515 | 49187 | 50859 | 52530 | 54202 | 55874 |
| 47,5 | 58,57546 | 59219 | 60891 | 62563 | 64236 | 65908 | 67581 | 69253 | 70926 | 72599 |
| 47,6 | 58,74272 | 75945 | 77618 | 79292 | 80965 | 82638 | 84312 | 85986 | 87659 | 89333 |
| 47,7 | 58,91007 | 92681 | 94355 | 96029 | 97703 | 99378 | *01052 | *02727 | *04401 | *06076 |
| 47,8 | 59,07751 | 09426 | 11101 | 12776 | 14451 | 16127 | 17802 | 19477 | 21153 | 22829 |
| 47,9 | 59,24504 | 26180 | 27856 | 29532 | 31208 | 32884 | 34561 | 36237 | 37914 | 39590 |
| 48,0 | 59,41267 | 42944 | 44620 | 46297 | 47974 | 49651 | 51329 | 53006 | 54683 | 56361 |
| 48,1 | 59,58038 | 59716 | 61394 | 63072 | 64750 | 66428 | 68106 | 69784 | 71462 | 73141 |
| 48,2 | 59,74819 | 76498 | 78176 | 79855 | 81534 | 83213 | 84892 | 86571 | 88250 | 89929 |
| 48,3 | 59,91609 | 93288 | 94968 | 96648 | 98327 | *00007 | *01687 | *03367 | *05047 | *06727 |
| 48,4 | 60,08408 | 10088 | 11769 | 13449 | 15130 | 16811 | 18491 | 20172 | 21853 | 23535 |
| 48,5 | 60,25216 | 26897 | 28578 | 30260 | 31941 | 33623 | 35305 | 36987 | 38669 | 40351 |
| 48,6 | 60,42033 | 43715 | 45397 | 47080 | 48762 | 50445 | 52127 | 53810 | 55493 | 57176 |
| 48,7 | 60,58899 | 60542 | 62225 | 63908 | 65592 | 67275 | 68959 | 70642 | 72326 | 74010 |
| 48,8 | 60,75694 | 77378 | 79062 | 80746 | 82430 | 84115 | 85799 | 87484 | 89168 | 90853 |
| 48,9 | 60,92538 | 94223 | 95908 | 97593 | 99278 | *00963 | *02649 | *04334 | *06020 | *07705 |
| 49,0 | 61,09391 | 11077 | 12763 | 14449 | 16135 | 17821 | 19507 | 21193 | 22880 | 24566 |
| 49,1 | 61,26253 | 27940 | 29626 | 31313 | 33000 | 34687 | 36374 | 38062 | 39749 | 41436 |
| 49,2 | 61,43124 | 44811 | 46499 | 48187 | 49875 | 51563 | 53251 | 54939 | 56627 | 58315 |
| 49,3 | 61,60004 | 61692 | 63381 | 65069 | 66758 | 68447 | 70136 | 71825 | 73514 | 75203 |
| 49,4 | 61,76892 | 78582 | 80271 | 81961 | 83650 | 85340 | 87030 | 88720 | 90410 | 92100 |
| 49,5 | 61,93790 | 95480 | 97170 | 98861 | *00551 | *02242 | *03933 | *05623 | *07314 | *09005 |
| 49,6 | 62,10696 | 12387 | 14079 | 15770 | 17461 | 19153 | 20844 | 22536 | 24228 | 25920 |
| 49,7 | 62,27612 | 29304 | 30996 | 32688 | 34380 | 36073 | 37765 | 39458 | 41150 | 42843 |
| 49,8 | 62,44536 | 46229 | 47922 | 49615 | 51308 | 53001 | 54695 | 56388 | 58081 | 59775 |
| 49,9 | 62,61469 | 63163 | 64856 | 66550 | 68244 | 69939 | 71633 | 73327 | 75021 | 76716 |
| 50,0 | 62,78416 | 80105 | 81800 | 83495 | 85190 | 86885 | 88580 | 90275 | 91970 | 93666 |
| 50,1 | 62,95361 | 97057 | 98752 | *00448 | *02144 | *03840 | *05536 | *07232 | *08928 | *10624 |
| 50,2 | 63,12320 | 14017 | 15713 | 17410 | 19106 | 20803 | 22500 | 24197 | 25894 | 27591 |
| 50,3 | 63,29288 | 30986 | 32683 | 34380 | 36078 | 37776 | 39473 | 41171 | 42869 | 44567 |
| 50,4 | 63,46265 | 47963 | 49661 | 51360 | 53058 | 54757 | 56455 | 58154 | 59853 | 61551 |
| 50,5 | 63,63250 | 64949 | 66649 | 68348 | 70047 | 71746 | 73446 | 75145 | 76845 | 78545 |
| 50,6 | 63,80245 | 81944 | 83644 | 85344 | 87045 | 88745 | 90445 | 92146 | 93846 | 95547 |
| 50,7 | 63,97247 | 98948 | *00649 | *02350 | *04051 | *05752 | *07453 | *09154 | *10856 | *12557 |
| 50,8 | 64,14259 | 15960 | 17662 | 19364 | 21066 | 22768 | 24470 | 26172 | 27874 | 29576 |
| 50,9 | 64,31279 | 32981 | 34684 | 36387 | 38089 | 39792 | 41495 | 43198 | 44901 | 46604 |

Таблица XIII

Значения интегральной функции распределения $F(x)$,
дифференциальной функции распределения $f(x)$
и ее первых шести производных

| x | $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f^{(3)}(x)$ | $f^{(4)}(x)$ | $f^{(5)}(x)$ | $f^{(6)}(x)$ | x |
|------|---------|---------|----------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|
| 0,00 | 0,50000 | 0,39894 | -0,00000 | -0,39894 | +0,00000 | +1,19683 | -0,00000 | -5,98413 | 0,00 |
| 01 | 50399 | 39892 | 00399 | 39888 | 01197 | 19653 | 05983 | 98204 | 01 |
| 02 | 50798 | 39886 | 00798 | 39870 | 02393 | 19563 | 11963 | 97576 | 02 |
| 03 | 51197 | 39876 | 01196 | 39840 | 03588 | 19414 | 17934 | 96530 | 03 |
| 04 | 51595 | 39862 | 01594 | 39799 | 04781 | 19204 | 23892 | 95066 | 04 |
| 05 | 51994 | 39844 | 01992 | 39745 | 05972 | 18936 | 29834 | 93187 | 05 |
| 06 | 52392 | 39822 | 02389 | 39679 | 07159 | 18608 | 35754 | 90894 | 06 |
| 07 | 52790 | 39797 | 02786 | 39602 | 08344 | 18221 | 41650 | 88188 | 07 |
| 08 | 53188 | 39767 | 03181 | 39512 | 09524 | 17775 | 47517 | 85073 | 08 |
| 09 | 53586 | 39733 | 03576 | 39411 | 10699 | 17271 | 53350 | 81551 | 09 |
| 10 | 53983 | 39695 | 03970 | 39298 | 11869 | 16708 | 59146 | 77625 | 10 |
| 11 | 54380 | 39654 | 04362 | 39174 | 13033 | 16088 | 64921 | 73300 | 11 |
| 12 | 54776 | 39608 | 04753 | 39038 | 14193 | 15410 | 70611 | 68577 | 12 |
| 13 | 55172 | 39559 | 05143 | 38890 | 15341 | 14676 | 76272 | 63463 | 13 |
| 14 | 55567 | 39505 | 05531 | 38731 | 16484 | 13885 | 81879 | 57961 | 14 |
| 15 | 55962 | 39448 | 05917 | 38560 | 17018 | 13038 | 87429 | 52077 | 15 |
| 16 | 56356 | 39387 | 06302 | 38379 | 18744 | 12137 | 92919 | 45815 | 16 |
| 17 | 56749 | 39322 | 06685 | 38186 | 19861 | 11180 | 0,98345 | 39182 | 17 |
| 18 | 57142 | 39253 | 07066 | 37981 | 20968 | 10170 | 1,03702 | 32183 | 18 |
| 19 | 57535 | 39181 | 07444 | 37766 | 22064 | 09106 | 08987 | 24824 | 19 |
| 20 | 57926 | 39104 | 07821 | 37540 | 23150 | 07990 | 14197 | 17112 | 20 |
| 21 | 58317 | 39024 | 08195 | 37303 | 24224 | 06823 | 19328 | 09054 | 21 |
| 22 | 58706 | 38940 | 08567 | 37056 | 25266 | 05604 | 24377 | 5,00657 | 22 |
| 23 | 59095 | 38853 | 08936 | 36798 | 26336 | 04335 | 29340 | 4,91929 | 23 |
| 24 | 59483 | 38762 | 09303 | 36529 | 27373 | 03018 | 34214 | 82876 | 24 |
| 25 | 59871 | 38667 | 09667 | 36250 | 28396 | 01651 | 38597 | 73508 | 25 |
| 26 | 60257 | 38568 | 10028 | 35961 | 29405 | 1,00238 | 43684 | 63832 | 26 |
| 27 | 60642 | 38466 | 10386 | 35662 | 30401 | 0,98778 | 48272 | 53857 | 27 |
| 28 | 61026 | 38361 | 10741 | 35353 | 31381 | 97273 | 52760 | 43591 | 28 |
| 29 | 61409 | 38251 | 11093 | 35035 | 32346 | 95723 | 57143 | 33045 | 29 |
| 30 | 61791 | 38139 | 11442 | 34706 | 33295 | 94130 | 61420 | 22226 | 30 |
| 31 | 62172 | 38023 | 11787 | 34369 | 34228 | 92495 | 65587 | 4,11144 | 31 |
| 32 | 62552 | 37903 | 12129 | 34022 | 35145 | 90819 | 69642 | 3,99809 | 32 |
| 33 | 62930 | 37780 | 12467 | 33666 | 36045 | 89103 | 73582 | 88232 | 33 |
| 34 | 63307 | 37654 | 12802 | 33301 | 36927 | 87348 | 77406 | 76421 | 34 |
| 35 | 63683 | 37524 | 13133 | 32927 | 37791 | 85555 | 81110 | 64387 | 35 |
| 36 | 64058 | 37391 | 13461 | 32545 | 38638 | 83726 | 84693 | 52140 | 36 |
| 37 | 64431 | 37255 | 13784 | 32155 | 39466 | 81862 | 88152 | 39692 | 37 |
| 38 | 64803 | 37115 | 14104 | 31756 | 40275 | 79963 | 91486 | 27052 | 38 |
| 39 | 65173 | 36973 | 14419 | 31349 | 41065 | 78032 | 94692 | 14231 | 39 |
| 40 | 65542 | 36827 | 14731 | 30935 | 41835 | 76070 | 1,97770 | 3,01221 | 40 |
| 41 | 65910 | 36678 | 15038 | 30513 | 42586 | 74077 | 2,00717 | 2,88093 | 41 |
| 42 | 66276 | 36526 | 15341 | 30083 | 43317 | 72056 | 03531 | 74797 | 42 |
| 43 | 66640 | 36371 | 15640 | 29646 | 44027 | 70007 | 06212 | 61365 | 43 |
| 44 | 67003 | 36213 | 15934 | 29203 | 44717 | 67932 | 08758 | 47807 | 44 |
| 45 | 67364 | 36053 | 16224 | 28752 | 45386 | 65832 | 11166 | 34137 | 45 |
| 46 | 67724 | 35889 | 16509 | 28295 | 46034 | 63709 | 13441 | 20364 | 46 |
| 47 | 68082 | 35723 | 16790 | 27831 | 46660 | 61564 | 15575 | 2,06500 | 47 |
| 48 | 68439 | 35553 | 17066 | 27362 | 47265 | 59398 | 17570 | 1,92558 | 48 |
| 49 | 68793 | 35381 | 17337 | 26886 | 47848 | 57213 | 19426 | 78547 | 49 |
| 0,50 | 0,69146 | 0,35207 | -0,17603 | -0,26405 | +0,48409 | +0,55010 | -2,21141 | -1,64481 | 0,50 |

Продолжение табл. XIII

| x | $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f^{(3)}(x)$ | $f^{(4)}(x)$ | $f^{(5)}(x)$ | $f^{(6)}(x)$ | x |
|------|---------|---------|----------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|
| 0,50 | 0,69146 | 0,35207 | -0,17693 | -0,26405 | +0,48409 | +0,55010 | -2,21141 | -1,64481 | 0,50 |
| 51 | 69497 | 35029 | 17865 | 25918 | 48948 | 52791 | 22715 | 50369 | 51 |
| 52 | 69847 | 34849 | 18122 | 25426 | 49465 | 50556 | 24148 | 36225 | 52 |
| 53 | 70194 | 34667 | 18373 | 24929 | 49959 | 48308 | 25440 | 22058 | 53 |
| 54 | 70540 | 34482 | 18620 | 24427 | 50431 | 46048 | 26589 | 1,07882 | 54 |
| 55 | 70884 | 34294 | 18862 | 23920 | 50880 | 43777 | 27597 | 0,93706 | 55 |
| 56 | 71226 | 34105 | 19099 | 23409 | 51306 | 41497 | 28464 | 79543 | 56 |
| 57 | 71566 | 33912 | 19330 | 22894 | 51710 | 39208 | 29188 | 65404 | 57 |
| 58 | 71904 | 33718 | 19556 | 22375 | 52091 | 36913 | 29772 | 51299 | 58 |
| 59 | 72240 | 33521 | 19778 | 21853 | 52448 | 34613 | 30214 | 37240 | 59 |
| 60 | 72575 | 33322 | 19993 | 21326 | 52783 | 32309 | 30517 | 23237 | 60 |
| 61 | 72907 | 33121 | 20204 | 20797 | 53094 | 30003 | 30679 | -0,09302 | 61 |
| 62 | 73237 | 32918 | 20409 | 20265 | 53383 | 27696 | 30703 | +0,04554 | 62 |
| 63 | 73565 | 32713 | 20609 | 19729 | 53648 | 25390 | 30589 | 18322 | 63 |
| 64 | 73891 | 32506 | 20804 | 19192 | 53891 | 23085 | 30337 | 31991 | 64 |
| 65 | 74215 | 32297 | 20993 | 18652 | 54110 | 20783 | 29949 | 45550 | 65 |
| 66 | 74537 | 32086 | 21177 | 18110 | 54306 | 18486 | 29426 | 58989 | 66 |
| 67 | 74857 | 31874 | 21355 | 17566 | 54480 | 16195 | 28770 | 72299 | 67 |
| 68 | 75175 | 31659 | 21528 | 17020 | 54630 | 13912 | 27981 | 85469 | 68 |
| 69 | 75490 | 31443 | 21696 | 16473 | 54758 | 11636 | 27061 | 0,98491 | 69 |
| 70 | 75804 | 31225 | 21858 | 15925 | 54863 | 09371 | 26012 | 1,11354 | 70 |
| 71 | 76115 | 31006 | 22014 | 15376 | 54945 | 07116 | 24834 | 24050 | 71 |
| 72 | 76424 | 30785 | 22165 | 14826 | 55005 | 04874 | 23531 | 36570 | 72 |
| 73 | 76730 | 30563 | 22311 | 14276 | 55043 | 02646 | 22104 | 48905 | 73 |
| 74 | 77035 | 30339 | 22451 | 13725 | 55058 | +0,00433 | 20554 | 61046 | 74 |
| 75 | 77337 | 30114 | 22585 | 13175 | 55052 | -0,01764 | 18883 | 72985 | 75 |
| 76 | 77637 | 29887 | 22714 | 12624 | 55023 | 03944 | 17095 | 84714 | 76 |
| 77 | 77935 | 29659 | 22838 | 12074 | 54973 | 06106 | 15190 | 1,96226 | 77 |
| 78 | 78230 | 29430 | 22956 | 11525 | 54901 | 08248 | 13171 | 2,07513 | 78 |
| 79 | 78524 | 29200 | 23068 | 10976 | 54808 | 10369 | 11040 | 18567 | 79 |
| 80 | 78814 | 28969 | 23175 | 10429 | 54694 | 12468 | 08800 | 29382 | 80 |
| 81 | 79103 | 28737 | 23277 | 09883 | 54559 | 14545 | 06454 | 39951 | 81 |
| 82 | 79389 | 28504 | 23373 | 09338 | 54403 | 16597 | 04002 | 50267 | 82 |
| 83 | 79673 | 28269 | 23461 | 08795 | 54227 | 18624 | 2,01449 | 60325 | 83 |
| 84 | 79955 | 28034 | 23549 | 08253 | 54031 | 20626 | 1,98797 | 70118 | 84 |
| 85 | 80234 | 27798 | 23629 | 07714 | 53814 | 22600 | 96048 | 79640 | 85 |
| 86 | 80511 | 27562 | 23703 | 07177 | 53579 | 24546 | 93205 | 88888 | 86 |
| 87 | 80785 | 27324 | 23772 | 06643 | 53324 | 26464 | 90271 | 2,97854 | 87 |
| 88 | 81057 | 27086 | 23836 | 06111 | 53049 | 28351 | 87249 | 3,06536 | 88 |
| 89 | 81327 | 26848 | 23894 | 05582 | 52757 | 30208 | 84141 | 14928 | 89 |
| 90 | 81594 | 26609 | 23948 | 05056 | 52445 | 32034 | 80951 | 23026 | 90 |
| 91 | 81859 | 26369 | 23996 | 04533 | 52116 | 33827 | 77681 | 30826 | 91 |
| 92 | 82121 | 26129 | 24038 | 04013 | 51769 | 35587 | 74335 | 38326 | 92 |
| 93 | 82381 | 25888 | 24076 | 03497 | 51404 | 37314 | 70916 | 45520 | 93 |
| 94 | 82639 | 25647 | 24108 | 02985 | 51023 | 39005 | 67426 | 52408 | 94 |
| 95 | 82894 | 25406 | 24136 | 02477 | 50624 | 40668 | 63869 | 58985 | 95 |
| 96 | 83147 | 25164 | 24158 | 01973 | 50210 | 42283 | 60247 | 65251 | 96 |
| 97 | 83398 | 24923 | 24175 | 01473 | 49779 | 43979 | 56565 | 71202 | 97 |
| 98 | 83646 | 24681 | 24187 | 00977 | 49332 | 45414 | 52824 | 76837 | 98 |
| 99 | 83891 | 24439 | 24195 | 00486 | 48871 | 46923 | 49029 | 82154 | 99 |
| 1,00 | 0,84134 | 0,24197 | -0,24197 | -0,00000 | +0,48394 | -0,48394 | -1,45182 | +3,87153 | 1,00 |

Продолжение табл. XIII

| x | $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f^{(3)}(x)$ | $f^{(4)}(x)$ | $f^{(5)}(x)$ | $f^{(6)}(x)$ | x |
|------|---------|---------|----------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|
| 1,00 | 0,84134 | 0,24197 | -0,24197 | +0,00000 | +0,48394 | -0,48394 | -1,45182 | +3,87153 | 1,30 |
| 01 | 84375 | 23955 | 24195 | 00482 | 47903 | 49827 | 41287 | 91833 | 01 |
| 02 | 84614 | 23713 | 24187 | 00958 | 47398 | 51220 | 37347 | 3,96193 | 02 |
| 03 | 84850 | 23471 | 24176 | 01429 | 46879 | 52573 | 33364 | 4,00232 | 03 |
| 04 | 85083 | 23230 | 24159 | 01896 | 46346 | 53887 | 29343 | 03951 | 04 |
| 05 | 85314 | 22988 | 24138 | 02356 | 45801 | 55160 | 25286 | 07351 | 05 |
| 06 | 85543 | 22747 | 24112 | 02812 | 45243 | 56393 | 21197 | 10432 | 06 |
| 07 | 85769 | 22506 | 24081 | 03261 | 44673 | 57584 | 17079 | 13194 | 07 |
| 08 | 85993 | 22265 | 24047 | 03705 | 44092 | 58734 | 12934 | 15639 | 08 |
| 09 | 86214 | 22025 | 24007 | 04143 | 43499 | 59843 | 08767 | 17769 | 09 |
| 10 | 86433 | 21785 | 23964 | 04575 | 42895 | 60909 | 04580 | 19585 | 10 |
| 11 | 86650 | 21546 | 23916 | 05001 | 42281 | 61934 | 1,00377 | 21088 | 11 |
| 12 | 86864 | 21307 | 23864 | 05420 | 41657 | 62917 | 0,96159 | 22282 | 12 |
| 13 | 87076 | 21069 | 23807 | 05834 | 41023 | 63857 | 91932 | 23169 | 13 |
| 14 | 87286 | 20831 | 23747 | 06241 | 40380 | 64755 | 87697 | 23752 | 14 |
| 15 | 87493 | 20594 | 23683 | 06641 | 39728 | 65611 | 83458 | 24032 | 15 |
| 16 | 87698 | 20357 | 23614 | 07035 | 39067 | 66425 | 79217 | 24015 | 16 |
| 17 | 87900 | 20121 | 23542 | 07423 | 38399 | 67196 | 74979 | 23702 | 17 |
| 18 | 88100 | 19886 | 23466 | 07803 | 37724 | 67924 | 70744 | 23099 | 18 |
| 19 | 88298 | 19652 | 23386 | 08177 | 37041 | 68610 | 66518 | 22208 | 19 |
| 20 | 88493 | 19419 | 23302 | 08544 | 36352 | 69255 | 62301 | 21034 | 20 |
| 21 | 88686 | 19186 | 23215 | 08904 | 35656 | 69857 | 58098 | 19581 | 21 |
| 22 | 88877 | 18954 | 23124 | 09257 | 34955 | 70417 | 53910 | 17853 | 22 |
| 23 | 89065 | 18724 | 23030 | 09603 | 34248 | 70935 | 49742 | 15856 | 23 |
| 24 | 89251 | 18494 | 22932 | 09942 | 33536 | 71411 | 45594 | 13594 | 24 |
| 25 | 89435 | 18265 | 22831 | 10274 | 32820 | 71847 | 41471 | 11072 | 25 |
| 26 | 89617 | 18037 | 22727 | 10599 | 32099 | 72241 | 37374 | 08295 | 26 |
| 27 | 89796 | 17810 | 22619 | 10916 | 31375 | 72594 | 33306 | 05269 | 27 |
| 28 | 89973 | 17585 | 22508 | 11226 | 30648 | 72907 | 29269 | 4,02000 | 28 |
| 29 | 90147 | 17360 | 22395 | 11529 | 29917 | 73180 | 25266 | 3,98492 | 29 |
| 30 | 90320 | 17137 | 22278 | 11824 | 29184 | 73413 | 21300 | 94753 | 30 |
| 31 | 90490 | 16915 | 22158 | 12113 | 28449 | 73606 | 17372 | 90787 | 31 |
| 32 | 90658 | 16694 | 22036 | 12393 | 27712 | 73760 | 13485 | 86601 | 32 |
| 33 | 90824 | 16474 | 21910 | 12667 | 26974 | 73876 | 09641 | 82201 | 33 |
| 34 | 90988 | 16256 | 21782 | 12933 | 26235 | 73953 | 05842 | 77593 | 34 |
| 35 | 91149 | 16038 | 21652 | 13192 | 25495 | 73993 | -0,02090 | 72785 | 35 |
| 36 | 91308 | 15822 | 21519 | 13443 | 24755 | 73995 | +0,01613 | 67781 | 36 |
| 37 | 91466 | 15608 | 21383 | 13687 | 24015 | 73961 | 05265 | 62560 | 37 |
| 38 | 91621 | 15395 | 21245 | 13923 | 23276 | 73890 | 08865 | 57217 | 38 |
| 39 | 91774 | 15183 | 21104 | 14152 | 22537 | 73784 | 12409 | 51669 | 39 |
| 40 | 91924 | 14973 | 20962 | 14374 | 21800 | 73642 | 15897 | 45953 | 40 |
| 41 | 92073 | 14764 | 20817 | 14588 | 21065 | 73466 | 19328 | 40077 | 41 |
| 42 | 92220 | 14556 | 20670 | 14795 | 20331 | 73256 | 22698 | 34046 | 42 |
| 43 | 92364 | 14350 | 20521 | 14995 | 19600 | 73012 | 26008 | 27868 | 43 |
| 44 | 92507 | 14146 | 20370 | 15187 | 18871 | 72736 | 29255 | 21551 | 44 |
| 45 | 92647 | 13943 | 20217 | 15372 | 18145 | 72427 | 32439 | 15100 | 45 |
| 46 | 92786 | 13742 | 20063 | 15550 | 17423 | 72087 | 35557 | 08522 | 46 |
| 47 | 92922 | 13542 | 19906 | 15721 | 16704 | 71716 | 38609 | 3,01826 | 47 |
| 48 | 93056 | 13344 | 19748 | 15884 | 15988 | 71315 | 41593 | 2,95018 | 48 |
| 49 | 93189 | 13147 | 19589 | 16040 | 15277 | 70885 | 44509 | 88105 | 49 |
| 1,50 | 0,93319 | 0,12952 | -0,19428 | +0,16190 | +0,14571 | -0,70425 | +0,47355 | +2,81094 | 1,50 |

Продолжение табл. XIII

| x | $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f^{(3)}(x)$ | $f^{(4)}(x)$ | $f^{(5)}(x)$ | $f^{(6)}(x)$ | x |
|------|---------|---------|----------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|
| 1,50 | 0,93319 | 0,12952 | -0,19428 | +0,16190 | +0,14571 | -0,70425 | +0,47355 | +2,81094 | 1,50 |
| 51 | 93448 | 12758 | 19265 | 16332 | 13869 | 69937 | 50130 | 73992 | 51 |
| 52 | 93574 | 12566 | 19101 | 16467 | 13172 | 69423 | 52834 | 66806 | 52 |
| 53 | 93699 | 12376 | 18936 | 16595 | 12481 | 68881 | 55466 | 59543 | 53 |
| 54 | 93822 | 12188 | 18769 | 16717 | 11795 | 68314 | 58025 | 52210 | 54 |
| 55 | 93943 | 12001 | 18601 | 16831 | 11114 | 67721 | 60510 | 44814 | 55 |
| 56 | 94062 | 11816 | 18433 | 16939 | 10440 | 67104 | 62921 | 37362 | 56 |
| 57 | 94179 | 11632 | 18263 | 17040 | 09772 | 66463 | 65257 | 29860 | 57 |
| 58 | 94295 | 11450 | 18092 | 17134 | 09111 | 65799 | 67518 | 22316 | 58 |
| 59 | 94408 | 11270 | 17920 | 17222 | 08456 | 65113 | 69703 | 14735 | 59 |
| 60 | 94520 | 11092 | 17747 | 17304 | 07809 | 64405 | 71813 | 2,07125 | 60 |
| 61 | 94630 | 10915 | 17574 | 17379 | 07168 | 63677 | 73846 | 1,99492 | 61 |
| 62 | 94738 | 10741 | 17400 | 17447 | 06535 | 62928 | 75803 | 91842 | 62 |
| 63 | 94845 | 10567 | 17225 | 17509 | 05910 | 62161 | 77683 | 84182 | 63 |
| 64 | 94950 | 10396 | 17050 | 17565 | 05292 | 61375 | 79486 | 76518 | 64 |
| 65 | 95053 | 10226 | 16874 | 17615 | 04682 | 60571 | 81213 | 68856 | 65 |
| 66 | 95154 | 10059 | 16697 | 17659 | 04081 | 59751 | 82863 | 61202 | 66 |
| 67 | 95254 | 09893 | 16521 | 17697 | 03487 | 58914 | 84437 | 53562 | 67 |
| 68 | 95352 | 09728 | 16343 | 17729 | 02903 | 58063 | 85935 | 45942 | 68 |
| 69 | 95449 | 09566 | 16166 | 17755 | 02326 | 57202 | 87356 | 38348 | 69 |
| 70 | 95543 | 09405 | 15988 | 17775 | 01759 | 56316 | 88702 | 30785 | 70 |
| 71 | 95637 | 09246 | 15811 | 17790 | 01200 | 55422 | 89977 | 23259 | 71 |
| 72 | 95728 | 09089 | 15633 | 17799 | 00650 | 54516 | 91167 | 15775 | 72 |
| 73 | 95818 | 08933 | 15455 | 17803 | +0,00110 | 53599 | 92288 | 08338 | 73 |
| 74 | 95907 | 08780 | 15277 | 17802 | -0,00422 | 52671 | 93334 | 1,00954 | 74 |
| 75 | 95994 | 08628 | 15099 | 17795 | 00944 | 51733 | 94307 | 0,93626 | 75 |
| 76 | 96080 | 08478 | 14921 | 17783 | 01456 | 50785 | 95207 | 86362 | 76 |
| 77 | 96164 | 08329 | 14743 | 17766 | 01959 | 49829 | 96034 | 79163 | 77 |
| 78 | 96246 | 08183 | 14565 | 17744 | 02453 | 48865 | 96790 | 72036 | 78 |
| 79 | 96327 | 08038 | 14388 | 17717 | 02937 | 47893 | 97475 | 64985 | 79 |
| 80 | 96407 | 07895 | 14211 | 17685 | 03411 | 46915 | 98090 | 58014 | 80 |
| 81 | 96485 | 07754 | 14034 | 17648 | 03875 | 45932 | 98636 | 51127 | 81 |
| 82 | 96562 | 07614 | 13858 | 17607 | 04329 | 44943 | 99113 | 44329 | 82 |
| 83 | 96638 | 07477 | 13682 | 17562 | 04774 | 43950 | 99523 | 37622 | 83 |
| 84 | 96712 | 07341 | 13507 | 17512 | 05208 | 42953 | 0,99866 | 31010 | 84 |
| 85 | 96784 | 07206 | 13332 | 17458 | 05633 | 41953 | 1,00143 | 24498 | 85 |
| 86 | 96856 | 07074 | 13158 | 17399 | 06047 | 40950 | 00356 | 18088 | 86 |
| 87 | 96926 | 06943 | 12984 | 17337 | 06452 | 39946 | 00505 | 11783 | 87 |
| 88 | 96995 | 06814 | 12811 | 17270 | 06846 | 38940 | 00592 | +0,05587 | 88 |
| 89 | 97062 | 06687 | 12639 | 17200 | 07231 | 37934 | 00617 | -0,00497 | 89 |
| 90 | 97128 | 06562 | 12467 | 17126 | 07605 | 36928 | 00583 | 06467 | 90 |
| 91 | 97193 | 06438 | 12296 | 17048 | 07969 | 35923 | 00489 | 12320 | 91 |
| 92 | 97257 | 06316 | 12126 | 16966 | 08323 | 34918 | 00337 | 18054 | 92 |
| 93 | 97320 | 06195 | 11957 | 16881 | 08667 | 33916 | 1,00128 | 23667 | 93 |
| 94 | 97381 | 06077 | 11788 | 16793 | 09002 | 32916 | 0,99864 | 29156 | 94 |
| 95 | 97441 | 05959 | 11621 | 16701 | 09326 | 31919 | 99545 | 34519 | 95 |
| 96 | 97500 | 05844 | 11424 | 16607 | 09640 | 30925 | 99174 | 39754 | 96 |
| 97 | 97558 | 05730 | 11289 | 16509 | 09944 | 29936 | 98750 | 44861 | 97 |
| 98 | 97615 | 05618 | 11124 | 16408 | 10289 | 28950 | 98277 | 49836 | 98 |
| 99 | 97670 | 05508 | 10961 | 16304 | 10523 | 27970 | 97754 | 54680 | 99 |
| 2,00 | 0,97725 | 0,05399 | -0,10798 | +0,16197 | -0,10798 | -0,26996 | +0,97184 | -0,59390 | 2,00 |

Продолжение табл. XIII

| x | $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f^{(3)}(x)$ | $f^{(4)}(x)$ | $f^{(5)}(x)$ | $f^{(6)}(x)$ | x |
|------|---------|---------|----------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|
| 2,00 | 0,97725 | 0,05399 | -0,10798 | +0,16197 | -0,10798 | -0,26996 | +0,97184 | -0,59390 | 2,00 |
| 01 | 97778 | 05292 | 10637 | 16088 | 11063 | 26027 | 96567 | 63966 | 01 |
| 02 | 97831 | 05186 | 10476 | 15976 | 11319 | 25064 | 95905 | 68406 | 02 |
| 03 | 97882 | 05082 | 10317 | 15862 | 11565 | 24109 | 95199 | 72711 | 03 |
| 04 | 97932 | 04980 | 10159 | 15745 | 11801 | 23160 | 94451 | 76878 | 04 |
| 05 | 97982 | 04879 | 10002 | 15626 | 12028 | 22220 | 93662 | 80908 | 05 |
| 06 | 98030 | 04780 | 99847 | 15504 | 12245 | 21287 | 92833 | 84800 | 06 |
| 07 | 98077 | 04682 | 99592 | 15381 | 12454 | 20363 | 91966 | 88554 | 07 |
| 08 | 98124 | 04586 | 99339 | 15255 | 12653 | 19448 | 91063 | 92170 | 08 |
| 09 | 98169 | 04491 | 99387 | 15128 | 12844 | 18542 | 90124 | 95647 | 09 |
| 10 | 98214 | 04398 | 99237 | 14998 | 13024 | 17646 | 89150 | 0,98987 | 10 |
| 11 | 98257 | 04307 | 99087 | 14867 | 13196 | 16759 | 88144 | 1,02188 | 11 |
| 12 | 98300 | 04217 | 98939 | 14735 | 13359 | 15883 | 87107 | 05252 | 12 |
| 13 | 98341 | 04128 | 98793 | 14600 | 13513 | 15017 | 86040 | 08178 | 13 |
| 14 | 98382 | 04041 | 98647 | 14464 | 13659 | 14162 | 84944 | 10909 | 14 |
| 15 | 98422 | 03955 | 98503 | 14327 | 13797 | 13318 | 83821 | 13622 | 15 |
| 16 | 98461 | 03871 | 98361 | 14188 | 13926 | 12486 | 82672 | 16142 | 16 |
| 17 | 98500 | 03786 | 98220 | 14049 | 14046 | 11665 | 81499 | 18526 | 17 |
| 18 | 98537 | 03706 | 98080 | 13907 | 14159 | 10856 | 80302 | 20778 | 18 |
| 19 | 98574 | 03626 | 97941 | 13765 | 14263 | 10059 | 79083 | 22897 | 19 |
| 20 | 98610 | 03547 | 97804 | 13622 | 14360 | 99274 | 77844 | 24885 | 20 |
| 21 | 98645 | 03470 | 97669 | 13478 | 14449 | 98502 | 76586 | 25744 | 21 |
| 22 | 98679 | 03394 | 97535 | 13333 | 14530 | 97743 | 75310 | 28474 | 22 |
| 23 | 98713 | 03319 | 97402 | 13188 | 14604 | 96996 | 74017 | 30077 | 23 |
| 24 | 98745 | 03246 | 97271 | 13041 | 14670 | 96263 | 72709 | 31555 | 24 |
| 25 | 98778 | 03174 | 97141 | 12894 | 14729 | 95542 | 71386 | 32909 | 25 |
| 26 | 98809 | 03103 | 97013 | 12747 | 14781 | 94835 | 70051 | 34141 | 26 |
| 27 | 98840 | 03034 | 96886 | 12599 | 14826 | 94141 | 68704 | 35253 | 27 |
| 28 | 98870 | 02965 | 96761 | 12450 | 14864 | 93461 | 67346 | 36246 | 28 |
| 29 | 98899 | 02898 | 96638 | 12301 | 14895 | 92794 | 65979 | 37122 | 29 |
| 30 | 98928 | 02833 | 96515 | 12152 | 14920 | 92141 | 64604 | 37883 | 30 |
| 31 | 98955 | 02768 | 96394 | 12003 | 14948 | 91502 | 63222 | 38533 | 31 |
| 32 | 98983 | 02705 | 96275 | 11854 | 14950 | 90877 | 61834 | 39071 | 32 |
| 33 | 99010 | 02643 | 96157 | 11704 | 14956 | -0,00265 | 60441 | 39500 | 33 |
| 34 | 99036 | 02582 | 96041 | 11554 | 14855 | +0,00332 | 59044 | 39824 | 34 |
| 35 | 99061 | 02522 | 95926 | 11405 | 14949 | 00915 | 57645 | 40043 | 35 |
| 36 | 99086 | 02463 | 95813 | 11256 | 14937 | 01185 | 56244 | 40169 | 36 |
| 37 | 99111 | 02406 | 95701 | 11106 | 14919 | 02040 | 54842 | 40177 | 37 |
| 38 | 99134 | 02349 | 95591 | 10957 | 14896 | 02582 | 53424 | 40097 | 38 |
| 39 | 99158 | 02294 | 95482 | 10808 | 14868 | 03109 | 52041 | 39923 | 39 |
| 40 | 99180 | 02239 | 95375 | 10660 | 14834 | 03623 | 50642 | 39654 | 40 |
| 41 | 99202 | 02186 | 95269 | 10512 | 14795 | 04123 | 49248 | 39297 | 41 |
| 42 | 99224 | 02134 | 95164 | 10364 | 14752 | 04608 | 47857 | 38851 | 42 |
| 43 | 99245 | 02083 | 95062 | 10217 | 14703 | 05079 | 46471 | 38320 | 43 |
| 44 | 99266 | 02033 | 94960 | 10070 | 14650 | 05537 | 45091 | 37706 | 44 |
| 45 | 99286 | 01984 | 94860 | 99924 | 14593 | 05981 | 43717 | 37012 | 45 |
| 46 | 99305 | 01936 | 94762 | 99778 | 14531 | 06411 | 42351 | 36239 | 46 |
| 47 | 99324 | 01888 | 94665 | 99633 | 14464 | 06828 | 40993 | 35392 | 47 |
| 48 | 99343 | 01842 | 94569 | 99489 | 14394 | 07231 | 39643 | 34471 | 48 |
| 49 | 99361 | 01797 | 94475 | 99345 | 14320 | 07621 | 38303 | 33480 | 49 |
| 2,50 | 0,99379 | 0,01753 | -0,04382 | +0,09202 | -0,14242 | +0,07997 | +0,36974 | -1,32421 | 2,50 |

Продолжение табл. XIII

| x | $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f^{(3)}(x)$ | $f^{(4)}(x)$ | $f^{(5)}(x)$ | $f^{(6)}(x)$ | x |
|------|---------|---------|----------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|
| 2,50 | 99379 | 0,01753 | -0,04382 | +0,09202 | -0,14242 | +0,07997 | +0,36974 | -1,32421 | 2,50 |
| 51 | 99396 | 01709 | 04:291 | 09060 | 14169 | 08360 | 35655 | 31297 | 51 |
| 52 | 99413 | 01667 | 04201 | 08919 | 14075 | 08710 | 34348 | 30109 | 52 |
| 53 | 99430 | 01625 | 04112 | 08779 | 13986 | 09047 | 33053 | 28862 | 53 |
| 54 | 99446 | 01585 | 04025 | 08639 | 13694 | 09372 | 31771 | 27556 | 54 |
| 55 | 99461 | 01545 | 03940 | 08501 | 13798 | 09683 | 30502 | 26195 | 55 |
| 56 | 99477 | 01506 | 03855 | 08364 | 13700 | 09982 | 29247 | 24781 | 56 |
| 57 | 99492 | 01468 | 03772 | 08227 | 13599 | 10268 | 28007 | 23316 | 57 |
| 58 | 99506 | 01431 | 03691 | 08092 | 13495 | 10542 | 26781 | 21804 | 58 |
| 59 | 99520 | 01394 | 03610 | 07957 | 13388 | 10804 | 25571 | 20247 | 59 |
| 60 | 99534 | 01358 | 03532 | 07824 | 13279 | 11053 | 24376 | 18645 | 60 |
| 61 | 99547 | 01323 | 03454 | 07692 | 13167 | 11291 | 23198 | 17003 | 61 |
| 62 | 99560 | 01289 | 03378 | 07560 | 13053 | 11517 | 22036 | 15322 | 62 |
| 63 | 99573 | 01256 | 03303 | 07430 | 12937 | 11732 | 20892 | 13605 | 63 |
| 64 | 99585 | 01223 | 03229 | 07302 | 12818 | 11935 | 19764 | 11854 | 64 |
| 65 | 99598 | 01191 | 03157 | 07174 | 12693 | 12127 | 18655 | 10071 | 65 |
| 66 | 99609 | 01160 | 03085 | 07048 | 12576 | 12308 | 17563 | 08259 | 66 |
| 67 | 99621 | 01130 | 03016 | 06923 | 12452 | 12479 | 16490 | 06421 | 67 |
| 68 | 99632 | 01100 | 02947 | 06799 | 12326 | 12638 | 15435 | 04556 | 68 |
| 69 | 99643 | 01071 | 02880 | 06676 | 12199 | 12787 | 14399 | 02669 | 69 |
| 70 | 99653 | 01042 | 02814 | 06555 | 12071 | 12926 | 13381 | 1,00761 | 70 |
| 71 | 99664 | 01014 | 02749 | 06435 | 11941 | 13055 | 12383 | 0,98834 | 71 |
| 72 | 99674 | 00987 | 02685 | 06316 | 11810 | 13174 | 11405 | 96891 | 72 |
| 73 | 99683 | 00961 | 02622 | 06199 | 11677 | 13283 | 10446 | 94933 | 73 |
| 74 | 99693 | 00935 | 02561 | 06082 | 11544 | 13383 | 09506 | 92962 | 74 |
| 75 | 99702 | 00909 | 02501 | 05968 | 11410 | 13473 | 08586 | 90980 | 75 |
| 76 | 99711 | 00885 | 02442 | 05854 | 11274 | 13555 | 07687 | 88989 | 76 |
| 77 | 99720 | 00861 | 02384 | 05742 | 11139 | 13627 | 06807 | 86991 | 77 |
| 78 | 99728 | 00837 | 02327 | 05631 | 11002 | 13691 | 05947 | 84987 | 78 |
| 79 | 99736 | 00814 | 02271 | 05522 | 10865 | 13746 | 05107 | 82980 | 79 |
| 80 | 99744 | 00792 | 02216 | 05414 | 10727 | 13793 | 04287 | 80970 | 80 |
| 81 | 99752 | 00770 | 02163 | 05308 | 10589 | 13832 | 03488 | 78960 | 81 |
| 82 | 99760 | 00748 | 02110 | 05202 | 10450 | 13863 | 02708 | 76952 | 82 |
| 83 | 99767 | 00727 | 02059 | 05099 | 10312 | 13886 | 01949 | 74946 | 83 |
| 84 | 99774 | 00707 | 02008 | 04996 | 10173 | 13902 | 01209 | 72944 | 84 |
| 85 | 99781 | 00687 | 01959 | 04895 | 10034 | 13910 | +0,00490 | 70948 | 85 |
| 86 | 99788 | 00668 | 01910 | 04795 | 09895 | 13912 | -0,00210 | 68959 | 86 |
| 87 | 99795 | 00649 | 01863 | 04697 | 09755 | 13906 | 0,00890 | 66979 | 87 |
| 88 | 99801 | 00631 | 01816 | 04600 | 09616 | 13894 | 01549 | 65008 | 88 |
| 89 | 99807 | 00613 | 01771 | 04505 | 09478 | 13875 | 02190 | 63049 | 89 |
| 90 | 99813 | 00595 | 01726 | 04411 | 09339 | 13850 | 02810 | 61102 | 90 |
| 91 | 99819 | 00578 | 01683 | 04318 | 09201 | 13819 | 03412 | 59168 | 91 |
| 92 | 99825 | 00562 | 01640 | 04227 | 09063 | 13782 | 03994 | 57249 | 92 |
| 93 | 99831 | 00545 | 01598 | 04137 | 08925 | 13739 | 04557 | 55346 | 93 |
| 94 | 99836 | 00530 | 01557 | 04048 | 08788 | 13691 | 05101 | 53459 | 94 |
| 95 | 99841 | 00514 | 01517 | 03961 | 08651 | 13638 | 05626 | 51591 | 95 |
| 96 | 99846 | 00499 | 01478 | 03875 | 08515 | 13579 | 06133 | 49741 | 96 |
| 97 | 99851 | 00485 | 01440 | 03791 | 08380 | 13515 | 06621 | 47910 | 97 |
| 98 | 99856 | 00470 | 01402 | 03708 | 08245 | 13446 | 07091 | 46101 | 98 |
| 99 | 99861 | 00457 | 01365 | 03626 | 08111 | 13373 | 07543 | 44312 | 99 |
| 3,00 | 0,99865 | 0,00443 | -0,01330 | +0,03545 | -0,07977 | +0,13296 | -0,07977 | -0,42546 | 3,00 |

Продолжение табл. XIII

| x | $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f^{(3)}(x)$ | $f^{(4)}(x)$ | $f^{(5)}(x)$ | $f^{(6)}(x)$ | x |
|------|---------|---------|----------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|
| 3,00 | 0,99865 | 0,00443 | -0,01330 | +0,03545 | -0,07977 | +0,13296 | -0,07977 | -0,42546 | 3,00 |
| 01 | 99869 | 00430 | 01294 | 03466 | 07845 | 13214 | 08394 | 40802 | 01 |
| 02 | 99874 | 00417 | 01260 | 03389 | 07713 | 13128 | 08793 | 39082 | 02 |
| 03 | 99878 | 00405 | 01227 | 03312 | 07582 | 13038 | 09176 | 37387 | 03 |
| 04 | 99882 | 00393 | 01194 | 03237 | 07452 | 12944 | 09541 | 35716 | 04 |
| 05 | 99886 | 00381 | 01162 | 03163 | 07323 | 12847 | 09890 | 34070 | 05 |
| 06 | 99889 | 00370 | 01131 | 03090 | 07195 | 12747 | 10223 | 32451 | 06 |
| 07 | 99893 | 00358 | 01100 | 03019 | 07068 | 12643 | 10539 | 30858 | 07 |
| 08 | 99896 | 00348 | 01070 | 02949 | 06943 | 12536 | 10840 | 29292 | 08 |
| 09 | 99900 | 00337 | 01041 | 02880 | 06818 | 12426 | 11125 | 27753 | 09 |
| 10 | 99903 | 00327 | 01013 | 02813 | 06694 | 12313 | 11395 | 26242 | 10 |
| 11 | 99906 | 00317 | 00985 | 02746 | 06571 | 12198 | 11650 | 24759 | 11 |
| 12 | 99910 | 00307 | 00958 | 02681 | 06450 | 12080 | 11890 | 23304 | 12 |
| 13 | 99913 | 00298 | 00931 | 02617 | 06330 | 11960 | 12116 | 21878 | 13 |
| 14 | 99916 | 00288 | 00905 | 02555 | 06211 | 11838 | 12328 | 20480 | 14 |
| 15 | 99918 | 00279 | 00880 | 02493 | 06093 | 11714 | 12526 | 19112 | 15 |
| 16 | 99921 | 00271 | 00856 | 02433 | 05977 | 11588 | 12710 | 17773 | 16 |
| 17 | 99924 | 00262 | 00832 | 02374 | 05861 | 11460 | 12882 | 16464 | 17 |
| 18 | 99926 | 00254 | 00808 | 02316 | 05747 | 11330 | 13040 | 15184 | 18 |
| 19 | 99929 | 00246 | 00785 | 02259 | 05635 | 11199 | 13185 | 13933 | 19 |
| 20 | 99931 | 00238 | 00763 | 02203 | 05523 | 11066 | 13319 | 12712 | 20 |
| 21 | 99934 | 00231 | 00741 | 02148 | 05413 | 10933 | 13440 | 11521 | 21 |
| 22 | 99936 | 00224 | 00720 | 02095 | 05305 | 10798 | 13549 | 10360 | 22 |
| 23 | 99938 | 00216 | 00699 | 02042 | 05198 | 10662 | 13647 | 09228 | 23 |
| 24 | 99940 | 00210 | 00679 | 01991 | 05092 | 10525 | 13734 | 08126 | 24 |
| 25 | 99942 | 00203 | 00659 | 01940 | 04987 | 10387 | 13810 | 07054 | 25 |
| 26 | 99944 | 00196 | 00640 | 01891 | 04884 | 10249 | 13875 | 06011 | 26 |
| 27 | 99946 | 00190 | 00622 | 01843 | 04782 | 10110 | 13930 | 04997 | 27 |
| 28 | 99948 | 00184 | 00603 | 01795 | 04682 | 09970 | 13975 | 04012 | 28 |
| 29 | 99950 | 00178 | 00586 | 01749 | 04583 | 09830 | 14010 | 03056 | 29 |
| 30 | 99952 | 00172 | 00568 | 01704 | 04485 | 09690 | 14036 | 02130 | 30 |
| 31 | 99953 | 00167 | 00552 | 01659 | 04389 | 09549 | 14053 | 01232 | 31 |
| 32 | 99955 | 00161 | 00535 | 01616 | 04294 | 09409 | 14061 | -0,00362 | 32 |
| 33 | 99957 | 00156 | 00519 | 01573 | 04201 | 09268 | 14060 | +0,00480 | 33 |
| 34 | 99958 | 00151 | 00504 | 01532 | 04109 | 09128 | 14051 | 01294 | 34 |
| 35 | 99960 | 00146 | 00489 | 01491 | 04018 | 08987 | 14034 | 02080 | 35 |
| 36 | 99961 | 00141 | 00474 | 01451 | 03929 | 08847 | 14010 | 02839 | 36 |
| 37 | 99962 | 00136 | 00460 | 01413 | 03841 | 08707 | 13978 | 03570 | 37 |
| 38 | 99964 | 00132 | 00446 | 01375 | 03755 | 08567 | 13939 | 04275 | 38 |
| 39 | 99965 | 00127 | 00432 | 01338 | 03670 | 08428 | 13892 | 04954 | 39 |
| 40 | 99966 | 00123 | 00419 | 01301 | 03586 | 08290 | 13840 | 05607 | 40 |
| 41 | 99968 | 00119 | 00406 | 01266 | 03504 | 08151 | 13780 | 06234 | 41 |
| 42 | 99969 | 00115 | 00394 | 01231 | 03423 | 08014 | 13715 | 06835 | 42 |
| 43 | 99970 | 00111 | 00381 | 01197 | 03344 | 07877 | 13644 | 07412 | 43 |
| 44 | 99971 | 00107 | 00370 | 01164 | 03266 | 07741 | 13567 | 07964 | 44 |
| 45 | 99972 | 00104 | 00358 | 01132 | 03189 | 07606 | 13485 | 08492 | 45 |
| 46 | 99973 | 00100 | 00347 | 01100 | 03114 | 07471 | 13397 | 08997 | 46 |
| 47 | 99974 | 00097 | 00336 | 01070 | 03040 | 07338 | 13305 | 09477 | 47 |
| 48 | 99975 | 00094 | 00326 | 01040 | 02967 | 07205 | 13208 | 09935 | 48 |
| 49 | 99976 | 00090 | 00315 | 01010 | 02895 | 07074 | 13106 | 10371 | 49 |
| 3,50 | 0,99977 | 0,00087 | -0,00305 | +0,00982 | -0,02825 | +0,06943 | -0,13000 | +0,10784 | 3,50 |

Продолжение табл. XIII

| x | $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f^{(3)}(x)$ | $f^{(4)}(x)$ | $f^{(5)}(x)$ | $f^{(6)}(x)$ | x |
|------|---------|---------|----------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|
| 3,50 | 0,99977 | 0,00087 | -0,00305 | +0,00932 | -0,02825 | +0,06943 | -0,13000 | +0,10784 | 3,50 |
| 51 | 99978 | 00084 | 00296 | 00954 | 02757 | 06814 | 12890 | 11176 | 51 |
| 52 | 99978 | 00081 | 00286 | 00927 | 02689 | 06685 | 12777 | 11547 | 52 |
| 53 | 99979 | 00079 | 00277 | 00900 | 02623 | 06558 | 12660 | 11897 | 53 |
| 54 | 99980 | 00076 | 00268 | 00874 | 02558 | 06432 | 12539 | 12226 | 54 |
| 55 | 99981 | 00073 | 00260 | 00849 | 02494 | 06308 | 12415 | 12536 | 55 |
| 56 | 99981 | 00071 | 00251 | 00824 | 02432 | 06184 | 12288 | 12826 | 56 |
| 57 | 99982 | 00068 | 00243 | 00800 | 02370 | 06062 | 12159 | 13097 | 57 |
| 58 | 99983 | 00066 | 00235 | 00777 | 02310 | 05941 | 12026 | 13350 | 58 |
| 59 | 99983 | 00063 | 00228 | 00754 | 02252 | 05821 | 11892 | 13585 | 59 |
| 60 | 99984 | 00061 | 00220 | 00732 | 02194 | 05703 | 11755 | 13802 | 60 |
| 61 | 99985 | 00059 | 00213 | 00710 | 02138 | 05586 | 11616 | 14002 | 61 |
| 62 | 99985 | 00057 | 00206 | 00689 | 02082 | 05471 | 11475 | 14185 | 62 |
| 63 | 99986 | 00055 | 00199 | 00669 | 02028 | 05357 | 11332 | 14352 | 63 |
| 64 | 99986 | 00053 | 00193 | 00649 | 01975 | 05244 | 11188 | 14503 | 64 |
| 65 | 99987 | 00051 | 00186 | 00629 | 01923 | 05133 | 11042 | 14639 | 65 |
| 66 | 99987 | 00049 | 00180 | 00610 | 01873 | 05023 | 10895 | 14760 | 66 |
| 67 | 99988 | 00047 | 00174 | 00592 | 01823 | 04915 | 10747 | 14866 | 67 |
| 68 | 99988 | 00046 | 00168 | 00574 | 01774 | 04808 | 10598 | 14958 | 68 |
| 69 | 99989 | 00044 | 00163 | 00556 | 01727 | 04703 | 10448 | 15037 | 69 |
| 70 | 99989 | 00042 | 00157 | 00539 | 01680 | 04599 | 10297 | 15102 | 70 |
| 71 | 99990 | 00041 | 00152 | 00522 | 01635 | 04497 | 10146 | 15155 | 71 |
| 72 | 99990 | 00039 | 00147 | 00506 | 01590 | 04396 | 09994 | 15196 | 72 |
| 73 | 99990 | 00038 | 00142 | 00491 | 01547 | 04297 | 09842 | 15224 | 73 |
| 74 | 99991 | 00037 | 00137 | 00475 | 01504 | 04200 | 09690 | 15241 | 74 |
| 75 | 99991 | 00035 | 00132 | 00461 | 01463 | 04103 | 09537 | 15247 | 75 |
| 76 | 99992 | 00034 | 00128 | 00446 | 01422 | 04009 | 09385 | 15242 | 76 |
| 77 | 99992 | 00033 | 00123 | 00432 | 01383 | 03916 | 09232 | 15227 | 77 |
| 78 | 99992 | 00031 | 00119 | 00418 | 01344 | 03824 | 09080 | 15202 | 78 |
| 79 | 99992 | 00030 | 00115 | 00405 | 01306 | 03734 | 08928 | 15167 | 79 |
| 80 | 99993 | 00029 | 00111 | 00392 | 01269 | 03646 | 08777 | 15124 | 80 |
| 81 | 99993 | 00028 | 00107 | 00380 | 01233 | 03559 | 08626 | 15071 | 81 |
| 82 | 99993 | 00027 | 00103 | 00368 | 01198 | 03473 | 08475 | 15011 | 82 |
| 83 | 99994 | 00026 | 00100 | 00356 | 01164 | 03389 | 08326 | 14942 | 83 |
| 84 | 99994 | 00025 | 00096 | 00344 | 01130 | 03307 | 08177 | 14865 | 84 |
| 85 | 99994 | 00024 | 00093 | 00333 | 01098 | 03226 | 08028 | 14781 | 85 |
| 86 | 99994 | 00023 | 00090 | 00322 | 01066 | 03146 | 07881 | 14691 | 86 |
| 87 | 99995 | 00022 | 00086 | 00312 | 01035 | 03068 | 07735 | 14593 | 87 |
| 88 | 99995 | 00021 | 00083 | 00302 | 01004 | 02991 | 07589 | 14489 | 88 |
| 89 | 99995 | 00021 | 00080 | 00292 | 00975 | 02916 | 07445 | 14380 | 89 |
| 90 | 99995 | 00020 | 00077 | 00282 | 00946 | 02842 | 07302 | 14264 | 90 |
| 91 | 99995 | 00019 | 00075 | 00273 | 00918 | 02770 | 07160 | 14143 | 91 |
| 92 | 99996 | 00018 | 00072 | 00264 | 00891 | 02699 | 07019 | 14017 | 92 |
| 93 | 99996 | 00018 | 00069 | 00255 | 00864 | 02630 | 06879 | 13887 | 93 |
| 94 | 99996 | 00017 | 00067 | 00247 | 00838 | 02562 | 06741 | 13751 | 94 |
| 95 | 99996 | 00016 | 00064 | 00238 | 00813 | 02495 | 06604 | 13612 | 95 |
| 96 | 99996 | 00016 | 00062 | 00230 | 00788 | 02430 | 06469 | 13469 | 96 |
| 97 | 99996 | 00015 | 00060 | 00223 | 00764 | 02366 | 06335 | 13322 | 97 |
| 98 | 99997 | 00014 | 00058 | 00215 | 00741 | 02303 | 06202 | 13171 | 98 |
| 99 | 99997 | 00014 | 00056 | 00208 | 00718 | 02242 | 06071 | 13018 | 99 |
| 4,00 | 0,99997 | 0,00013 | -0,00054 | +0,00201 | -0,00696 | +0,02181 | -0,05942 | +0,12861 | 4,00 |

Таблица XIV

Логарифмы функции $F(r, v)$

| $\varphi^\circ \backslash r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0 | 0,30103 | 0,19612 | 0,12494 | 0,07118 | 0,02803 | 1,9200 | 1,96108 | 1,93401 | 1,90593 | 1,88825 |
| 1 | 30106 | 19621 | 12508 | 07139 | 02830 | 9234 | 96149 | 93448 | 91046 | 88885 |
| 2 | 30115 | 19646 | 12552 | 07202 | 02912 | 99335 | 96270 | 93588 | 91207 | 89065 |
| 3 | 30131 | 19689 | 12625 | 07306 | 03049 | 99505 | 96472 | 93823 | 91474 | 89366 |
| 4 | 30153 | 19749 | 12728 | 07453 | 03241 | 99742 | 96755 | 94152 | 91850 | 89787 |
| 5 | 30181 | 19826 | 12860 | 07643 | 03489 | 0,00048 | 97120 | 94577 | 92333 | 90330 |
| 6 | 30215 | 19921 | 13023 | 07875 | 03792 | 00424 | 97528 | 95097 | 92927 | 90997 |
| 7 | 30256 | 20034 | 13215 | 08151 | 04152 | 00870 | 98099 | 95715 | 93631 | 91787 |
| 8 | 30303 | 20165 | 13439 | 08471 | 04570 | 01386 | 98715 | 96431 | 94447 | 92703 |
| 9 | 30357 | 20313 | 13693 | 08835 | 05046 | 01975 | 99417 | 97246 | 95376 | 93747 |
| 10 | 30418 | 20481 | 13980 | 09245 | 05581 | 02637 | 0,00207 | 98163 | 96421 | 94920 |
| 11 | 30486 | 20668 | 14298 | 09701 | 06174 | 03373 | 01085 | 99184 | 97584 | 96226 |
| 12 | 30561 | 20874 | 14650 | 10204 | 06834 | 04186 | 02053 | 0,00309 | 98867 | 97663 |
| 13 | 30643 | 21100 | 15036 | 10756 | 07554 | 05076 | 03115 | 01542 | 0,00272 | 99243 |
| 14 | 30733 | 21346 | 15457 | 11357 | 08339 | 06040 | 04272 | 02886 | 01803 | 0,00962 |
| 15 | 30830 | 21614 | 15913 | 12009 | 09191 | 07098 | 05526 | 04342 | 03462 | 02825 |
| 16 | 30935 | 21903 | 16406 | 12713 | 10110 | 08235 | 06880 | 05915 | 05254 | 04836 |
| 17 | 31049 | 22215 | 16937 | 13472 | 11100 | 09457 | 08337 | 07607 | 07182 | 07000 |
| 18 | 31171 | 22549 | 17508 | 14286 | 12162 | 10769 | 09900 | 09422 | 09250 | 09321 |
| 19 | 31302 | 22908 | 18118 | 15158 | 13299 | 12174 | 11573 | 11365 | 11462 | 11804 |
| 20 | 31442 | 23292 | 18771 | 16089 | 14513 | 13674 | 13359 | 13439 | 13825 | 14455 |
| 21 | 31592 | 23701 | 19468 | 17083 | 15808 | 15272 | 15263 | 15649 | 16342 | 17279 |
| 22 | 31751 | 24138 | 20210 | 18140 | 17186 | 16974 | 17289 | 18001 | 19020 | 20284 |
| 23 | 31922 | 24602 | 20999 | 19265 | 18651 | 18781 | 19442 | 20499 | 21864 | 23475 |
| 24 | 32103 | 25096 | 21837 | 20459 | 20206 | 20701 | 21727 | 23150 | 24882 | 26861 |
| 25 | 32295 | 25620 | 22727 | 21726 | 21856 | 22735 | 24148 | 25960 | 28081 | 30449 |
| 26 | 32500 | 26177 | 23670 | 23069 | 23603 | 24891 | 26714 | 28936 | 31469 | 34249 |
| 27 | 32717 | 26767 | 24670 | 24491 | 25454 | 27173 | 29429 | 32085 | 35053 | 38268 |
| 28 | 32947 | 27393 | 25729 | 25997 | 27413 | 29587 | 32301 | 35416 | 38843 | 42519 |
| 29 | 33192 | 28056 | 26851 | 27590 | 29484 | 32140 | 35337 | 38937 | 42849 | 47011 |
| 30 | 33452 | 28759 | 28037 | 29276 | 31674 | 34838 | 38545 | 42657 | 47082 | 51756 |
| 31 | 33727 | 29502 | 29293 | 31058 | 33989 | 37690 | 41935 | 46586 | 51552 | 56767 |
| 32 | 34019 | 30290 | 30621 | 32941 | 36436 | 40702 | 45515 | 50736 | 56271 | 62058 |
| 33 | 34328 | 31124 | 32026 | 34933 | 39021 | 43884 | 49297 | 55118 | 61255 | 67643 |
| 34 | 34657 | 32007 | 33512 | 37038 | 41752 | 47246 | 53290 | 59744 | 66515 | 73539 |
| 35 | 35005 | 32942 | 35084 | 39264 | 44638 | 50796 | 57507 | 64629 | 72069 | 79762 |
| 36 | 35375 | 33933 | 36747 | 41617 | 47688 | 54547 | 61961 | 69788 | 77933 | 86332 |
| 37 | 35767 | 34982 | 38508 | 44105 | 50912 | 58511 | 66666 | 75236 | 84125 | 93269 |
| 38 | 36184 | 36095 | 40371 | 46737 | 54321 | 62699 | 71638 | 80991 | 90665 | 1,00594 |
| 39 | 36627 | 37274 | 42344 | 49522 | 57925 | 67127 | 76892 | 87073 | 97575 | 08333 |
| 40 | 37098 | 38525 | 44434 | 52470 | 61739 | 71810 | 82447 | 93501 | 1,04878 | 16511 |
| 41 | 37599 | 39852 | 46649 | 55592 | 65775 | 76765 | 88322 | 1,00299 | 12599 | 25156 |
| 42 | 38132 | 41262 | 48998 | 58899 | 70049 | 82010 | 94539 | 07491 | 20766 | 34299 |
| 43 | 38701 | 42760 | 51491 | 62405 | 74577 | 87564 | 1,01122 | 15104 | 29410 | 43975 |
| 44 | 39307 | 44353 | 54137 | 66124 | 79377 | 93450 | 08096 | 23167 | 38564 | 54220 |
| 45 | 39953 | 46047 | 56948 | 70072 | 84470 | 99691 | 15489 | 31713 | 48264 | 65074 |

Продолжение табл. XIV

| φ° \ r | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0 | 1,86854 | 1,85046 | 1,83377 | 1,81828 | 1,80381 | 1,79025 | 1,77748 | 1,76542 | 1,75409 | 1,74315 |
| 1 | 86920 | 85119 | 83457 | 81914 | 80474 | 79124 | 77854 | 76655 | 75519 | 74441 |
| 2 | 87120 | 85339 | 83697 | 82173 | 80753 | 79423 | 78173 | 76994 | 75878 | 74819 |
| 3 | 87453 | 85705 | 84096 | 82606 | 81218 | 79922 | 78704 | 77558 | 76475 | 75450 |
| 4 | 87921 | 86219 | 84656 | 83212 | 81871 | 80621 | 79450 | 78350 | 77314 | 76334 |
| 5 | 88524 | 86882 | 85378 | 83994 | 82713 | 81522 | 80411 | 79371 | 78394 | 77475 |
| 6 | 89263 | 87694 | 86264 | 84953 | 83745 | 82627 | 81589 | 80623 | 79719 | 78873 |
| 7 | 90140 | 88658 | 87314 | 86090 | 84969 | 83938 | 82987 | 82107 | 81291 | 80532 |
| 8 | 91157 | 89775 | 88532 | 87408 | 86388 | 85458 | 84608 | 83828 | 83113 | 82454 |
| 9 | 92315 | 91047 | 89919 | 88910 | 88004 | 87188 | 86453 | 85789 | 85188 | 84644 |
| 10 | 93617 | 92478 | 91478 | 90597 | 89821 | 89134 | 88528 | 87992 | 87520 | 87105 |
| 11 | 95065 | 94069 | 93212 | 92475 | 91841 | 91298 | 90835 | 90443 | 90115 | 89843 |
| 12 | 96663 | 95824 | 95125 | 94546 | 94070 | 93685 | 93380 | 93146 | 92976 | 92863 |
| 13 | 98413 | 97747 | 97221 | 96815 | 96512 | 96300 | 96168 | 96107 | 96110 | 96170 |
| 14 | 0,00319 | 99842 | 99504 | 99286 | 99171 | 99148 | 99204 | 99332 | 99524 | 99772 |
| 15 | 02386 | 0,02112 | 0,01978 | 0,01964 | 0,02054 | 0,02234 | 0,02495 | 0,02827 | 0,03223 | 0,03676 |
| 16 | 04617 | 04563 | 04649 | 04855 | 05165 | 05566 | 06047 | 06599 | 07215 | 07889 |
| 17 | 07016 | 07199 | 07522 | 07964 | 08511 | 09149 | 09867 | 10656 | 11510 | 12420 |
| 18 | 09591 | 10027 | 10603 | 11299 | 12100 | 12992 | 13964 | 15007 | 16115 | 17280 |
| 19 | 12345 | 13052 | 13899 | 14867 | 15939 | 17102 | 18346 | 19661 | 21040 | 22477 |
| 20 | 15284 | 16281 | 17417 | 18675 | 20036 | 21489 | 23023 | 24628 | 26297 | 28023 |
| 21 | 18417 | 19721 | 21166 | 22731 | 24401 | 26163 | 28005 | 29918 | 31896 | 33931 |
| 22 | 21748 | 23379 | 25152 | 27045 | 29043 | 31132 | 33302 | 35544 | 37850 | 40213 |
| 23 | 25287 | 27265 | 29386 | 31627 | 33972 | 36410 | 38928 | 41518 | 44172 | 46883 |
| 24 | 29041 | 31388 | 33876 | 36486 | 39201 | 42007 | 44894 | 47853 | 50876 | 53957 |
| 25 | 33019 | 35756 | 38635 | 41635 | 44740 | 47937 | 51215 | 54565 | 57979 | 61450 |
| 26 | 37230 | 40380 | 43672 | 47085 | 50603 | 54214 | 57905 | 61668 | 65496 | 69381 |
| 27 | 41686 | 45272 | 49000 | 52850 | 56805 | 60853 | 64981 | 69181 | 73446 | 77769 |
| 28 | 46397 | 50444 | 54633 | 58945 | 63361 | 67870 | 72460 | 77122 | 81849 | 86634 |
| 29 | 51375 | 55909 | 60585 | 65384 | 70287 | 75284 | 80361 | 85511 | 90725 | 95997 |
| 30 | 56634 | 61681 | 66871 | 72184 | 77602 | 83112 | 88704 | 94368 | 1,00097 | 1,05884 |
| 31 | 62187 | 67776 | 73508 | 79363 | 85323 | 91376 | 97511 | 1,03718 | 09990 | 16320 |
| 32 | 68049 | 74209 | 80513 | 86940 | 93473 | 1,00098 | 1,06805 | 13585 | 20430 | 27332 |
| 33 | 74236 | 81000 | 87907 | 94937 | 1,02073 | 09302 | 16613 | 23996 | 31445 | 38951 |
| 34 | 80767 | 88166 | 95709 | 1,03375 | 11148 | 19014 | 26961 | 34981 | 43066 | 51209 |
| 35 | 87660 | 95730 | 1,03944 | 12280 | 20724 | 29261 | 37879 | 46571 | 55327 | 64142 |
| 36 | 94937 | 1,03713 | 12634 | 21678 | 30829 | 40074 | 49400 | 58799 | 68264 | 77787 |
| 37 | 1,02619 | 12141 | 21807 | 31598 | 41495 | 51486 | 61558 | 71704 | 81915 | 92185 |
| 38 | 10731 | 21039 | 31492 | 42070 | 52754 | 63532 | 74392 | 85326 | 96324 | 2,07382 |
| 39 | 19299 | 30437 | 41721 | 53128 | 64643 | 76252 | 87943 | 99707 | 2,11537 | 23425 |
| 40 | 28352 | 40366 | 52529 | 64810 | 77201 | 89687 | 2,02255 | 2,14896 | 27603 | 40368 |
| 41 | 37922 | 50861 | 63945 | 77155 | 90472 | 2,03883 | 17377 | 30944 | 44577 | 58268 |
| 42 | 48042 | 61958 | 76020 | 90207 | 2,04502 | 18891 | 33362 | 47908 | 62518 | 77188 |
| 43 | 58750 | 73698 | 88793 | 2,04013 | 19341 | 34764 | 50269 | 65848 | 81493 | 97196 |
| 44 | 70086 | 86126 | 2,02314 | 18626 | 35047 | 51562 | 68161 | 84933 | 3,01570 | 3,18367 |
| 45 | 82095 | 99291 | 16634 | 34103 | 51680 | 69352 | 87106 | 3,04935 | 22830 | 40783 |

Продолжение табл. XIV

| φ° | r | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|-----------------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0 | | 1,73281 | 1,72295 | 1,71351 | 1,70446 | 1,69578 | 1,68743 | 1,67939 | 1,67163 | 1,66415 | 1,65691 |
| 1 | | 73414 | 72434 | 71496 | 70599 | 69736 | 68908 | 68111 | 67342 | 66600 | 65883 |
| 2 | | 73812 | 72851 | 71934 | 71056 | 70214 | 69405 | 68628 | 67879 | 67157 | 66459 |
| 3 | | 74475 | 73548 | 72664 | 71819 | 71010 | 70235 | 69490 | 68774 | 68085 | 67421 |
| 4 | | 75407 | 74526 | 73688 | 72889 | 72127 | 71398 | 70700 | 70031 | 69388 | 68770 |
| 5 | | 76607 | 75786 | 75008 | 74269 | 73567 | 72897 | 72259 | 71650 | 71067 | 70509 |
| 6 | | 78076 | 77331 | 76626 | 75961 | 75332 | 74736 | 74171 | 73635 | 73125 | 72641 |
| 7 | | 79824 | 79164 | 78546 | 77968 | 77425 | 76917 | 76439 | 75990 | 75567 | 75170 |
| 8 | | 81847 | 81288 | 80771 | 80293 | 79852 | 79444 | 79067 | 78719 | 78397 | 78101 |
| 9 | | 84152 | 83707 | 83305 | 82942 | 82616 | 82323 | 82061 | 81827 | 81621 | 81439 |
| 10 | | 86742 | 86426 | 86153 | 85920 | 85722 | 85558 | 85425 | 85321 | 85244 | 85191 |
| 11 | | 89624 | 89451 | 89322 | 89232 | 89178 | 89157 | 89168 | 89207 | 89273 | 89364 |
| 12 | | 92802 | 92787 | 92816 | 92884 | 92989 | 93127 | 93296 | 93493 | 93718 | 93967 |
| 13 | | 96282 | 96441 | 96643 | 96885 | 97163 | 97474 | 97816 | 98187 | 98585 | 99008 |
| 14 | | 0,00073 | 0,00421 | 0,00811 | 0,01241 | 0,01708 | 0,02208 | 0,02739 | 0,03299 | 0,03885 | 0,04497 |
| 15 | | 04181 | 04733 | 05328 | 05963 | 06634 | 07338 | 08074 | 08838 | 09629 | 10445 |
| 16 | | 08614 | 09387 | 10203 | 11058 | 11950 | 12875 | 13831 | 14816 | 15828 | 16864 |
| 17 | | 13383 | 14393 | 15446 | 16538 | 17667 | 18829 | 20023 | 21245 | 22494 | 23768 |
| 18 | | 18497 | 19761 | 21068 | 22415 | 23798 | 25214 | 26662 | 28139 | 29642 | 31171 |
| 19 | | 23966 | 25502 | 27081 | 28699 | 30354 | 32043 | 33763 | 35511 | 37287 | 39087 |
| 20 | | 29802 | 31628 | 33497 | 35406 | 37351 | 39330 | 41339 | 43378 | 45444 | 47534 |
| 21 | | 36019 | 38153 | 40331 | 42549 | 44803 | 47090 | 49409 | 51757 | 54131 | 56531 |
| 22 | | 42629 | 45092 | 47598 | 50144 | 52726 | 55342 | 57989 | 60665 | 63368 | 66096 |
| 23 | | 49647 | 52458 | 55313 | 58207 | 61138 | 64102 | 67098 | 70123 | 73174 | 76251 |
| 24 | | 57090 | 60271 | 63495 | 66758 | 70058 | 73392 | 76757 | 80151 | 83572 | 87018 |
| 25 | | 64975 | 68546 | 72161 | 75816 | 79507 | 83232 | 86989 | 90774 | 94586 | 98423 |
| 26 | | 73319 | 77305 | 81334 | 85402 | 89507 | 93646 | 97816 | 1,02015 | 1,06241 | 1,10492 |
| 27 | | 82144 | 86567 | 91033 | 95539 | 1,00082 | 1,04658 | 1,09265 | 1,13902 | 1,18565 | 1,23254 |
| 28 | | 91471 | 96355 | 1,01284 | 1,06252 | 1,11256 | 1,16295 | 1,21364 | 1,26463 | 1,31589 | 1,36740 |
| 29 | | 1,01322 | 1,06695 | 1,12111 | 1,17567 | 1,23059 | 1,28585 | 1,34143 | 1,39730 | 1,45344 | 1,50982 |
| 30 | | 11724 | 17611 | 23542 | 29513 | 35520 | 41561 | 47634 | 53736 | 59864 | 66018 |
| 31 | | 22702 | 29133 | 35607 | 42121 | 48671 | 55256 | 61872 | 68516 | 75188 | 81886 |
| 32 | | 34288 | 41291 | 48338 | 55424 | 62548 | 69705 | 76894 | 84112 | 91357 | 98627 |
| 33 | | 46511 | 54118 | 61769 | 69459 | 77187 | 84949 | 92742 | 2,00564 | 2,08413 | 2,16287 |
| 34 | | 59406 | 67650 | 75937 | 84265 | 92630 | 2,01029 | 2,09459 | 17918 | 26404 | 34916 |
| 35 | | 73010 | 81925 | 90885 | 99884 | 2,08921 | 17991 | 27093 | 36224 | 45382 | 54565 |
| 36 | | 87362 | 96986 | 2,06654 | 2,16362 | 26106 | 35885 | 45695 | 55534 | 65401 | 75293 |
| 37 | | 2,02508 | 2,12878 | 23293 | 33747 | 44239 | 54765 | 65322 | 75908 | 86522 | 97161 |
| 38 | | 18492 | 29650 | 40853 | 52095 | 63375 | 74688 | 86033 | 97408 | 3,08809 | 3,20236 |
| 39 | | 35367 | 47356 | 59390 | 71463 | 83574 | 95719 | 3,07896 | 3,20101 | 32334 | 44593 |
| 40 | | 53187 | 66054 | 78964 | 91916 | 3,04904 | 3,17926 | 30980 | 44063 | 57174 | 70309 |
| 41 | | 72013 | 85806 | 99643 | 3,13521 | 27435 | 41384 | 55364 | 69374 | 83411 | 97473 |
| 42 | | 91911 | 3,06683 | 3,21498 | 36354 | 51247 | 66174 | 81133 | 96121 | 4,11137 | 4,26178 |
| 43 | | 3,12953 | 28759 | 44608 | 60498 | 76425 | 92386 | 4,08379 | 4,24402 | 40451 | 56527 |
| 44 | | 35218 | 52116 | 69059 | 86043 | 4,03063 | 4,20118 | 37204 | 54320 | 71464 | 88632 |
| 45 | | 58790 | 76846 | 94946 | 4,13086 | 31263 | 49475 | 67719 | 85992 | 5,04292 | 5,22618 |

Продолжение табл. XIV

| $r \backslash \varphi^\circ$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0 | 1,64991 | 1,64312 | 1,63654 | 1,63016 | 1,62395 | 1,61792 | 1,61206 | 1,60634 | 1,60077 | 1,59535 |
| 1 | 65189 | 64517 | 63866 | 63234 | 62620 | 62024 | 61444 | 60879 | 60329 | 59793 |
| 2 | 65786 | 65134 | 64502 | 63890 | 63296 | 62719 | 62159 | 61614 | 61084 | 60568 |
| 3 | 66780 | 66162 | 65563 | 64984 | 64423 | 63880 | 63353 | 62841 | 62344 | 61861 |
| 4 | 68176 | 67604 | 67052 | 66519 | 66005 | 65508 | 65027 | 64562 | 64111 | 63674 |
| 5 | 69975 | 69462 | 68970 | 68497 | 68043 | 67606 | 67185 | 66779 | 66389 | 66012 |
| 6 | 72180 | 71741 | 71322 | 70923 | 70542 | 70178 | 69831 | 69498 | 69181 | 68878 |
| 7 | 74796 | 74444 | 74112 | 73800 | 73506 | 73229 | 72969 | 72724 | 72494 | 72277 |
| 8 | 77828 | 77576 | 77346 | 77134 | 76941 | 76765 | 76606 | 76462 | 76332 | 76217 |
| 9 | 81281 | 81144 | 81029 | 80932 | 80854 | 80793 | 80749 | 80719 | 80705 | 80704 |
| 10 | 86162 | 85155 | 85168 | 85201 | 85252 | 85320 | 85405 | 85505 | 85619 | 85748 |
| 11 | 89479 | 89615 | 89772 | 89949 | 90143 | 90355 | 90583 | 90827 | 91085 | 91357 |
| 12 | 94240 | 94534 | 94850 | 95184 | 95537 | 95908 | 96294 | 96696 | 97113 | 97543 |
| 13 | 99454 | 99922 | 0,00411 | 0,00919 | 0,01445 | 0,01989 | 0,02549 | 0,03124 | 0,03714 | 0,04318 |
| 14 | 0,05132 | 0,05789 | 0,06466 | 0,07163 | 0,07878 | 0,08611 | 0,09359 | 0,10124 | 0,10903 | 0,11696 |
| 15 | 11284 | 12146 | 13028 | 13929 | 14849 | 15786 | 16740 | 17708 | 18692 | 19689 |
| 16 | 17925 | 19007 | 20110 | 21232 | 22372 | 23530 | 24704 | 25894 | 27098 | 28316 |
| 17 | 25066 | 26385 | 27725 | 29085 | 30463 | 31858 | 33269 | 34696 | 36138 | 37594 |
| 18 | 32722 | 34296 | 35891 | 37505 | 39137 | 40787 | 42453 | 44134 | 45830 | 47540 |
| 19 | 40911 | 42757 | 44623 | 46509 | 48414 | 50335 | 52273 | 54227 | 56195 | 58177 |
| 20 | 49648 | 51785 | 53941 | 56117 | 58312 | 60524 | 62752 | 64996 | 67254 | 69526 |
| 21 | 58954 | 61399 | 63865 | 66350 | 68853 | 71374 | 73911 | 76464 | 79031 | 81613 |
| 22 | 68847 | 71621 | 74415 | 77228 | 80060 | 82910 | 85775 | 88657 | 91552 | 94462 |
| 23 | 79351 | 82473 | 85615 | 88778 | 91958 | 95156 | 98370 | 1,01600 | 1,04845 | 1,08103 |
| 24 | 90488 | 93979 | 97492 | 1,01023 | 1,04574 | 1,08141 | 1,11725 | 1,15324 | 1,18938 | 1,22566 |
| 25 | 1,02284 | 1,06167 | 1,10070 | 1,13994 | 1,17935 | 1,21894 | 1,25869 | 1,29860 | 1,33865 | 1,37885 |
| 26 | 14767 | 19064 | 23381 | 27718 | 32074 | 36447 | 40836 | 45241 | 49660 | 54094 |
| 27 | 27967 | 32701 | 37456 | 42231 | 47024 | 51834 | 56661 | 61503 | 66360 | 71231 |
| 28 | 41914 | 47111 | 52328 | 57565 | 62820 | 68093 | 73382 | 78687 | 84006 | 89340 |
| 29 | 56645 | 62330 | 68035 | 73760 | 79503 | 85264 | 91041 | 96834 | 1,02641 | 1,08463 |
| 30 | 72196 | 78395 | 84616 | 90856 | 97114 | 1,03390 | 1,09682 | 1,15990 | 1,22313 | 1,28649 |
| 31 | 88607 | 95350 | 1,02113 | 1,08897 | 1,15698 | 1,22518 | 1,29353 | 1,36205 | 1,43071 | 1,49951 |
| 32 | 1,05921 | 1,13237 | 1,20574 | 1,27930 | 1,35305 | 1,42697 | 1,50106 | 1,57531 | 1,64970 | 1,72423 |
| 33 | 24186 | 32106 | 40047 | 48008 | 55987 | 63984 | 71997 | 80026 | 88069 | 96127 |
| 34 | 43451 | 52009 | 60587 | 69185 | 77802 | 86435 | 95086 | 1,03752 | 1,12432 | 1,21127 |
| 35 | 63772 | 73002 | 82252 | 91522 | 1,00810 | 1,10116 | 1,19438 | 1,28776 | 1,38129 | 1,47496 |
| 36 | 85208 | 95146 | 1,05105 | 1,15083 | 1,25080 | 1,35094 | 1,45125 | 1,55171 | 1,65233 | 1,75308 |
| 37 | 1,07823 | 1,18508 | 1,29214 | 1,39940 | 1,50684 | 1,61445 | 1,72223 | 1,83016 | 1,93825 | 2,04647 |
| 38 | 31687 | 43160 | 54654 | 66167 | 77700 | 89249 | 1,00815 | 1,12397 | 1,23993 | 1,35604 |
| 39 | 56875 | 89179 | 1,21505 | 1,53850 | 1,86213 | 2,18594 | 2,50992 | 2,83405 | 3,15833 | 3,48275 |
| 40 | 83469 | 1,16651 | 1,49854 | 1,83077 | 2,16318 | 2,49576 | 2,82851 | 3,16142 | 3,49448 | 3,82768 |
| 41 | 1,11559 | 1,45668 | 1,79797 | 2,13946 | 2,48114 | 2,82299 | 3,16501 | 3,50718 | 3,84950 | 4,19197 |
| 42 | 41243 | 56330 | 71438 | 86565 | 1,01712 | 1,16876 | 1,32056 | 1,47252 | 1,62463 | 1,77688 |
| 43 | 72626 | 88747 | 1,04839 | 1,20952 | 1,37032 | 1,53130 | 1,69246 | 1,85375 | 2,01512 | 2,17650 |
| 44 | 1,05825 | 1,23040 | 1,40276 | 1,57532 | 1,74806 | 1,92098 | 2,09406 | 2,26730 | 2,44070 | 2,61423 |
| 45 | 40968 | 59340 | 77733 | 96146 | 1,14577 | 1,33027 | 1,51492 | 1,69974 | 1,88470 | 2,06980 |

Продолжение табл. XIV

| $\begin{matrix} r \\ \varphi^\circ \end{matrix}$ | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
|--|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0 | 1,59005 | 1,58488 | 1,57983 | 1,57490 | 1,57007 | 1,56535 | 1,56073 | 1,55621 | 1,55178 | 1,54743 |
| 1 | 59270 | 58759 | 58261 | 57774 | 57298 | 56833 | 56378 | 55932 | 55495 | 55068 |
| 2 | 60064 | 59574 | 59095 | 58628 | 58172 | 57727 | 57291 | 56865 | 56449 | 56041 |
| 3 | 61391 | 60933 | 60488 | 60054 | 59631 | 59219 | 58816 | 58423 | 58040 | 57665 |
| 4 | 63251 | 62840 | 62441 | 62053 | 61677 | 61311 | 60955 | 60609 | 60272 | 59944 |
| 5 | 65648 | 65297 | 64958 | 64630 | 64314 | 64008 | 63712 | 63425 | 63148 | 62880 |
| 6 | 68587 | 68310 | 68044 | 67790 | 67547 | 67314 | 67092 | 66879 | 66675 | 66480 |
| 7 | 72074 | 71884 | 71705 | 71538 | 71382 | 71236 | 71101 | 70975 | 70858 | 70750 |
| 8 | 76115 | 76025 | 75948 | 75881 | 75826 | 75782 | 75747 | 75722 | 75706 | 75699 |
| 9 | 80717 | 80742 | 80780 | 80828 | 80888 | 80959 | 81039 | 81129 | 81228 | 81336 |
| 10 | 85890 | 86044 | 86211 | 86389 | 86578 | 86777 | 86987 | 87206 | 87434 | 87671 |
| 11 | 91643 | 91941 | 92251 | 92573 | 92905 | 93248 | 93601 | 93964 | 94336 | 94717 |
| 12 | 97987 | 98444 | 98912 | 99392 | 99883 | 0,00385 | 1,00896 | 0,01418 | 0,01948 | 0,02487 |
| 13 | 0,04936 | 0,05566 | 0,06208 | 0,06861 | 0,07526 | 0,08201 | 0,08886 | 0,09580 | 0,10284 | 0,10997 |
| 14 | 12502 | 13320 | 14151 | 14994 | 15847 | 16711 | 17585 | 18468 | 19361 | 20262 |
| 15 | 20700 | 21724 | 22759 | 23806 | 24864 | 25932 | 27011 | 28099 | 29196 | 30302 |
| 16 | 29548 | 30792 | 32048 | 33316 | 34595 | 35884 | 37183 | 38492 | 39810 | 41137 |
| 17 | 39062 | 40544 | 42037 | 43543 | 45059 | 46585 | 48122 | 49668 | 51224 | 52783 |
| 18 | 49261 | 51000 | 52748 | 54507 | 56278 | 58059 | 59850 | 61651 | 63461 | 65280 |
| 19 | 60172 | 62180 | 64201 | 66232 | 68275 | 70328 | 72391 | 74464 | 76546 | 78637 |
| 20 | 71812 | 74110 | 76421 | 78743 | 81076 | 83419 | 85773 | 88136 | 90508 | 92890 |
| 21 | 84208 | 86815 | 89434 | 92065 | 94707 | 97360 | 1,00022 | 1,02695 | 1,05376 | 1,08066 |
| 22 | 97383 | 1,00321 | 1,03296 | 1,06229 | 1,09199 | 1,12180 | 15171 | 28172 | 21182 | 24201 |
| 23 | 1,11375 | 14660 | 17956 | 21264 | 24584 | 27913 | 31253 | 34603 | 37961 | 41329 |
| 24 | 26208 | 29862 | 33528 | 37206 | 40895 | 44594 | 48303 | 52022 | 55751 | 59488 |
| 25 | 41918 | 45963 | 50021 | 54090 | 58170 | 62260 | 66361 | 70472 | 74591 | 78720 |
| 26 | 58540 | 63000 | 67471 | 71955 | 76449 | 80954 | 85468 | 89993 | 94527 | 99069 |
| 27 | 76116 | 81013 | 85922 | 90843 | 95775 | 2,00717 | 2,05670 | 2,10632 | 2,15604 | 2,20584 |
| 28 | 94687 | 2,00046 | 2,05418 | 2,10801 | 2,16195 | 21600 | 27014 | 32439 | 37873 | 43316 |
| 29 | 2,14298 | 20145 | 26005 | 31876 | 37759 | 43652 | 49555 | 55467 | 61389 | 67320 |
| 30 | 34999 | 41362 | 47737 | 54123 | 60521 | 66929 | 73347 | 79775 | 86212 | 92658 |
| 31 | 55344 | 63750 | 70668 | 77598 | 84539 | 91491 | 98452 | 3,05424 | 3,12404 | 3,19394 |
| 32 | 79889 | 87369 | 94860 | 3,05363 | 3,09877 | 3,17402 | 3,24937 | 32481 | 40035 | 47598 |
| 33 | 3,04198 | 3,12281 | 3,20337 | 28484 | 36603 | 44732 | 52871 | 61020 | 69178 | 77345 |
| 34 | 29836 | 38556 | 47290 | 56034 | 64790 | 73556 | 82333 | 91119 | 99915 | 4,08719 |
| 35 | 56876 | 66269 | 75674 | 85090 | 94518 | 4,03956 | 4,13405 | 4,22863 | 4,32330 | 41807 |
| 36 | 85397 | 95498 | 4,05612 | 4,15737 | 4,25873 | 36020 | 46177 | 56314 | 66520 | 76705 |
| 37 | 4,15483 | 4,26332 | 37193 | 48065 | 58949 | 69843 | 80747 | 91661 | 5,02584 | 5,13517 |
| 38 | 47228 | 58865 | 70514 | 82174 | 93846 | 5,05528 | 5,17221 | 5,28923 | 40635 | 52355 |
| 39 | 80731 | 93199 | 5,05680 | 5,18172 | 5,30675 | 43189 | 55713 | 68247 | 80790 | 93342 |
| 40 | 5,16101 | 5,29447 | 42805 | 56175 | 69556 | 82947 | 96349 | 6,09761 | 6,23181 | 6,36611 |
| 41 | 53457 | 67729 | 82014 | 96310 | 6,10618 | 6,24936 | 6,39265 | 53603 | 67950 | 82307 |
| 42 | 92927 | 6,08178 | 6,23442 | 6,38717 | 54004 | 69300 | 84608 | 99924 | 7,15251 | 7,30586 |
| 43 | 6,34653 | 50939 | 67237 | 83546 | 99867 | 7,16199 | 7,32540 | 7,48891 | 65252 | 81622 |
| 44 | 78789 | 96169 | 7,13561 | 7,30964 | 7,48378 | 65803 | 83239 | 8,00684 | 8,18138 | 8,35602 |
| 45 | 7,25504 | 7,44041 | 62590 | 81151 | 99722 | 8,18305 | 8,36897 | 55500 | 74111 | 92732 |

Т а б л и ц а X V

Уровни значимости и соответствующие им отклонения x
при одностороннем (Q) и двустороннем ($2Q$) критериях в случае
нормального распределения

| Q | $2Q$ | x | Q | $2Q$ | x |
|-------|------|------|--------|-------|------|
| 0,4 | 0,8 | 0,25 | 0,01 | 0,02 | 2,33 |
| 0,25 | 0,5 | 0,67 | 0,005 | 0,01 | 2,58 |
| 0,1 | 0,2 | 1,28 | 0,0025 | 0,005 | 2,81 |
| 0,05 | 0,1 | 1,64 | 0,001 | 0,002 | 3,09 |
| 0,025 | 0,05 | 1,96 | 0,0005 | 0,001 | 3,23 |

Т а б л и ц а X V I

Значения χ^2 , соответствующие значениям $P(\chi^2)$ и числам степеней свободы v

| v | P | | | | | | | | | | |
|-----|-------------------|-------------------|------|------|------|------|------|-------|------|-------|-------|
| | 0,99 | 0,95 | 0,90 | 0,50 | 0,25 | 0,10 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 | 0,001 |
| 1 | 0,0 ³² | 0,0 ²⁴ | 0,02 | 0,46 | 1,32 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 | 7,88 | 10,8 |
| 2 | 0,02 | 0,10 | 0,21 | 1,39 | 2,77 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 10,6 | 13,8 |
| 3 | 0,12 | 0,35 | 0,58 | 2,37 | 4,11 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,3 | 12,8 | 16,3 |
| 4 | 0,30 | 0,71 | 1,06 | 3,36 | 5,39 | 7,78 | 9,49 | 11,1 | 13,3 | 14,9 | 18,5 |
| 5 | 0,55 | 1,15 | 1,61 | 4,35 | 6,63 | 9,24 | 11,1 | 12,8 | 15,1 | 16,7 | 20,5 |
| 6 | 0,87 | 1,64 | 2,20 | 5,35 | 7,84 | 10,6 | 12,6 | 14,4 | 16,8 | 18,5 | 22,5 |
| 7 | 1,24 | 2,17 | 2,83 | 6,35 | 9,04 | 12,0 | 14,1 | 16,0 | 18,5 | 20,3 | 24,3 |
| 8 | 1,65 | 2,73 | 3,49 | 7,34 | 10,2 | 13,4 | 15,5 | 17,5 | 20,1 | 22,0 | 26,1 |
| 9 | 2,09 | 3,33 | 4,17 | 8,34 | 11,4 | 14,7 | 16,9 | 19,0 | 21,7 | 23,6 | 27,9 |
| 10 | 2,56 | 3,94 | 4,87 | 9,34 | 12,5 | 16,0 | 18,3 | 20,5 | 23,2 | 25,2 | 29,6 |
| 11 | 3,05 | 4,57 | 5,58 | 10,3 | 13,7 | 17,3 | 19,7 | 21,9 | 24,7 | 26,8 | 31,3 |
| 12 | 3,57 | 5,23 | 6,30 | 11,3 | 14,8 | 18,5 | 21,0 | 23,3 | 26,2 | 28,3 | 32,9 |
| 13 | 4,11 | 5,89 | 7,04 | 12,3 | 16,0 | 19,8 | 22,4 | 24,7 | 27,7 | 29,8 | 34,5 |
| 14 | 4,66 | 6,57 | 7,79 | 13,3 | 17,1 | 21,1 | 23,7 | 26,1 | 29,1 | 31,3 | 36,1 |
| 15 | 5,23 | 7,26 | 8,55 | 14,3 | 18,2 | 22,3 | 25,0 | 27,5 | 30,6 | 32,8 | 37,7 |
| 16 | 5,81 | 7,96 | 9,31 | 15,3 | 19,4 | 23,5 | 26,3 | 28,8 | 32,0 | 34,3 | 39,3 |
| 17 | 6,41 | 8,67 | 10,1 | 16,3 | 20,5 | 24,8 | 27,6 | 30,2 | 33,4 | 35,7 | 40,8 |
| 18 | 7,01 | 9,39 | 10,9 | 17,3 | 21,6 | 26,0 | 28,9 | 31,5 | 34,8 | 37,2 | 42,3 |
| 19 | 7,63 | 10,1 | 11,7 | 18,3 | 22,7 | 27,2 | 30,1 | 32,9 | 36,2 | 38,6 | 43,8 |
| 20 | 8,26 | 10,9 | 12,4 | 19,3 | 23,8 | 28,4 | 31,4 | 34,2 | 37,6 | 40,0 | 45,3 |
| 21 | 8,90 | 11,6 | 13,2 | 20,3 | 24,9 | 29,6 | 32,7 | 35,5 | 38,9 | 41,4 | 46,8 |
| 22 | 9,54 | 12,3 | 14,0 | 21,3 | 26,0 | 30,8 | 33,9 | 36,8 | 40,3 | 42,8 | 48,3 |
| 23 | 10,2 | 13,1 | 14,8 | 22,3 | 27,1 | 32,0 | 35,2 | 38,1 | 41,6 | 44,2 | 49,7 |
| 24 | 10,9 | 13,8 | 15,7 | 23,3 | 28,2 | 33,2 | 36,4 | 39,4 | 43,0 | 45,6 | 51,2 |
| 25 | 11,5 | 14,6 | 16,5 | 24,3 | 29,3 | 34,4 | 37,7 | 40,6 | 44,3 | 46,9 | 52,6 |
| 26 | 12,2 | 15,4 | 17,3 | 25,3 | 30,4 | 35,6 | 38,9 | 41,9 | 45,6 | 48,3 | 54,1 |
| 27 | 12,9 | 16,2 | 18,1 | 26,3 | 31,5 | 36,7 | 40,1 | 43,2 | 47,0 | 49,6 | 55,5 |
| 28 | 13,6 | 16,9 | 18,9 | 27,3 | 32,6 | 37,9 | 41,3 | 44,5 | 48,3 | 51,0 | 56,9 |
| 29 | 14,3 | 17,7 | 19,8 | 28,3 | 33,7 | 39,1 | 42,6 | 45,7 | 49,6 | 52,3 | 58,3 |
| 30 | 15,0 | 18,5 | 20,6 | 29,3 | 34,8 | 40,3 | 43,8 | 47,0 | 50,9 | 53,7 | 59,7 |

Таблица XVII

Значение t при разных уровнях значимости и данном числе степеней свободы ν

| ν | Уровни значимости для одностороннего критерия (Q) | | | | | | | |
|----------|--|------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| | 0,1 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 | 0,0025 | 0,001 | 0,0005 |
| | Уровни значимости для одностороннего критерия ($2Q$) | | | | | | | |
| | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,005 | 0,002 | 0,001 |
| 1 | 3,08 | 6,31 | 12,71 | 31,82 | 63,66 | 127,32 | 318,30 | 636,61 |
| 2 | 1,89 | 2,92 | 4,30 | 6,96 | 9,92 | 14,09 | 22,33 | 31,60 |
| 3 | 1,64 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 7,45 | 10,21 | 12,92 |
| 4 | 1,53 | 2,13 | 2,78 | 3,75 | 4,60 | 5,60 | 7,17 | 8,61 |
| 5 | 1,48 | 2,02 | 2,57 | 3,36 | 4,03 | 4,77 | 5,89 | 6,87 |
| 6 | 1,44 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 3,71 | 4,32 | 5,21 | 5,96 |
| 7 | 1,41 | 1,89 | 2,36 | 3,00 | 3,50 | 4,03 | 4,79 | 5,41 |
| 8 | 1,40 | 1,86 | 2,31 | 2,90 | 3,36 | 3,83 | 4,50 | 5,04 |
| 9 | 1,38 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 3,69 | 4,30 | 4,78 |
| 10 | 1,37 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 3,58 | 4,14 | 4,59 |
| 11 | 1,36 | 1,80 | 2,20 | 2,72 | 3,11 | 3,50 | 4,02 | 4,44 |
| 12 | 1,36 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,05 | 3,43 | 3,93 | 4,32 |
| 13 | 1,35 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 3,37 | 3,85 | 4,22 |
| 14 | 1,34 | 1,76 | 2,14 | 2,62 | 2,98 | 3,33 | 3,79 | 4,14 |
| 15 | 1,34 | 1,75 | 2,13 | 2,60 | 2,95 | 3,29 | 3,73 | 4,07 |
| 16 | 1,34 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 3,25 | 3,69 | 4,02 |
| 17 | 1,33 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,90 | 3,22 | 3,65 | 3,97 |
| 18 | 1,33 | 1,73 | 2,10 | 2,55 | 2,88 | 3,20 | 3,61 | 3,92 |
| 19 | 1,33 | 1,73 | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,17 | 3,58 | 3,88 |
| 20 | 1,33 | 1,72 | 2,09 | 2,53 | 2,85 | 3,15 | 3,55 | 3,85 |
| 21 | 1,32 | 1,72 | 2,08 | 2,52 | 2,83 | 3,14 | 3,53 | 3,82 |
| 22 | 1,32 | 1,72 | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,12 | 3,51 | 3,79 |
| 23 | 1,32 | 1,71 | 2,07 | 2,50 | 2,81 | 3,10 | 3,48 | 3,77 |
| 24 | 1,32 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,80 | 3,09 | 3,47 | 3,75 |
| 25 | 1,32 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,79 | 3,08 | 3,45 | 3,73 |
| 26 | 1,32 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,07 | 3,44 | 3,71 |
| 27 | 1,31 | 1,70 | 2,05 | 2,47 | 2,77 | 3,06 | 3,42 | 3,69 |
| 28 | 1,31 | 1,70 | 2,05 | 2,47 | 2,76 | 3,05 | 3,41 | 3,67 |
| 29 | 1,31 | 1,70 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,04 | 3,40 | 3,66 |
| 30 | 1,31 | 1,70 | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,03 | 3,39 | 3,65 |
| 40 | 1,30 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 2,97 | 3,31 | 3,55 |
| 60 | 1,30 | 1,67 | 2,00 | 2,39 | 2,66 | 2,91 | 3,23 | 3,46 |
| 120 | 1,29 | 1,66 | 1,98 | 2,36 | 2,62 | 2,86 | 3,16 | 3,37 |
| ∞ | 1,28 | 1,64 | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 2,81 | 3,09 | 3,29 |

Таблица XVIII

Значение F при $P = 0,05$

| $\begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{matrix}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 1 | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 238,9 | 243,9 | 249,0 | 254,3 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,37 | 19,41 | 19,45 | 19,50 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,84 | 8,74 | 8,64 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,04 | 5,91 | 5,77 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,82 | 4,68 | 4,53 | 4,36 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,15 | 4,00 | 3,84 | 3,67 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,73 | 3,57 | 3,41 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,44 | 3,28 | 3,12 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,23 | 3,07 | 2,90 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,07 | 2,91 | 2,74 | 2,54 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 2,95 | 2,79 | 2,61 | 2,40 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,85 | 2,69 | 2,50 | 2,30 |
| 13 | 4,67 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,92 | 2,77 | 2,60 | 2,42 | 2,21 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,70 | 2,53 | 2,35 | 2,13 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,64 | 2,48 | 2,29 | 2,07 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,59 | 2,42 | 2,24 | 2,01 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,55 | 2,38 | 2,19 | 1,96 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,51 | 2,34 | 2,15 | 1,92 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,48 | 2,31 | 2,11 | 1,88 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,45 | 2,28 | 2,08 | 1,84 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,42 | 2,25 | 2,05 | 1,81 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,40 | 2,23 | 2,03 | 1,78 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,38 | 2,20 | 2,00 | 1,76 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,36 | 2,18 | 1,98 | 1,73 |
| 25 | 4,24 | 3,38 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,34 | 2,16 | 1,96 | 1,71 |
| 26 | 4,22 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,32 | 2,15 | 1,95 | 1,69 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,30 | 2,13 | 1,93 | 1,67 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,44 | 2,29 | 2,12 | 1,91 | 1,65 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,54 | 2,43 | 2,28 | 2,10 | 1,90 | 1,64 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,27 | 2,09 | 1,89 | 1,62 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,18 | 2,00 | 1,79 | 1,52 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,52 | 2,37 | 2,25 | 2,10 | 1,92 | 1,70 | 1,39 |
| 120 | 3,92 | 3,07 | 2,68 | 2,45 | 2,29 | 2,17 | 2,02 | 1,83 | 1,61 | 1,25 |
| ∞ | 3,84 | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,09 | 1,94 | 1,75 | 1,52 | 1,00 |

Значения F при $P = 0,025$

| $v_1 \backslash v_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|
| 1 | 647,79 | 799,50 | 864,16 | 899,58 | 921,85 | 937,11 | 956,66 | 976,71 | 997,25 | 1018,3 |
| 2 | 38,51 | 39,00 | 39,16 | 39,25 | 39,30 | 39,33 | 39,37 | 39,42 | 39,46 | 39,50 |
| 3 | 17,43 | 16,04 | 15,44 | 15,10 | 14,88 | 14,74 | 14,54 | 14,34 | 14,12 | 13,90 |
| 4 | 12,22 | 10,65 | 9,98 | 9,60 | 9,36 | 9,20 | 8,98 | 8,75 | 8,51 | 8,26 |
| 5 | 10,01 | 8,43 | 7,76 | 7,39 | 7,15 | 6,98 | 6,76 | 6,52 | 6,28 | 6,02 |
| 6 | 8,81 | 7,26 | 6,60 | 6,23 | 5,99 | 5,82 | 5,60 | 5,37 | 5,12 | 4,85 |
| 7 | 8,07 | 6,54 | 5,89 | 5,52 | 5,28 | 5,12 | 4,90 | 4,67 | 4,42 | 4,14 |
| 8 | 7,57 | 6,06 | 5,42 | 5,05 | 4,82 | 4,65 | 4,43 | 4,20 | 3,95 | 3,67 |
| 9 | 7,21 | 5,72 | 5,08 | 4,72 | 4,48 | 4,32 | 4,10 | 3,87 | 3,61 | 3,33 |
| 10 | 6,94 | 5,46 | 4,83 | 4,47 | 4,24 | 4,07 | 3,86 | 3,62 | 3,36 | 3,08 |
| 11 | 6,72 | 5,26 | 4,64 | 4,28 | 4,04 | 3,88 | 3,66 | 3,43 | 3,17 | 2,88 |
| 12 | 6,55 | 5,10 | 4,47 | 4,12 | 3,89 | 3,73 | 3,51 | 3,28 | 3,02 | 2,72 |
| 13 | 6,41 | 4,96 | 4,35 | 4,00 | 3,77 | 3,60 | 3,39 | 3,15 | 2,89 | 2,60 |
| 14 | 6,30 | 4,86 | 4,24 | 3,89 | 3,68 | 3,50 | 3,28 | 3,05 | 2,79 | 2,49 |
| 15 | 6,20 | 4,76 | 4,15 | 3,80 | 3,58 | 3,42 | 3,20 | 2,96 | 2,70 | 2,40 |
| 16 | 6,12 | 4,69 | 4,08 | 3,73 | 3,50 | 3,34 | 3,12 | 2,89 | 2,62 | 2,32 |
| 17 | 6,04 | 4,62 | 4,01 | 3,66 | 3,44 | 3,28 | 3,06 | 2,82 | 2,56 | 2,25 |
| 18 | 5,98 | 4,56 | 3,95 | 3,61 | 3,38 | 3,22 | 3,00 | 2,77 | 2,50 | 2,19 |
| 19 | 5,92 | 4,51 | 3,90 | 3,56 | 3,33 | 3,17 | 2,96 | 2,72 | 2,45 | 2,13 |
| 20 | 5,87 | 4,46 | 3,86 | 3,52 | 3,29 | 3,13 | 2,91 | 2,68 | 2,41 | 2,08 |
| 21 | 5,83 | 4,42 | 3,82 | 3,48 | 3,25 | 3,09 | 2,87 | 2,64 | 2,37 | 2,04 |
| 22 | 5,79 | 4,38 | 3,78 | 3,44 | 3,22 | 3,06 | 2,84 | 2,60 | 2,33 | 2,00 |
| 23 | 5,75 | 4,35 | 3,75 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,81 | 2,57 | 2,30 | 1,97 |
| 24 | 5,72 | 4,32 | 3,72 | 3,38 | 3,16 | 3,00 | 2,78 | 2,54 | 2,27 | 1,94 |
| 25 | 5,69 | 4,29 | 3,69 | 3,35 | 3,13 | 2,97 | 2,75 | 2,52 | 2,24 | 1,91 |
| 26 | 5,66 | 4,27 | 3,67 | 3,33 | 3,10 | 2,94 | 2,73 | 2,49 | 2,22 | 1,88 |
| 27 | 5,63 | 4,24 | 3,65 | 3,31 | 3,08 | 2,92 | 2,71 | 2,47 | 2,20 | 1,85 |
| 28 | 5,61 | 4,22 | 3,63 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,69 | 2,45 | 2,17 | 1,83 |
| 29 | 5,59 | 4,20 | 3,61 | 3,27 | 3,04 | 2,88 | 2,67 | 2,43 | 2,15 | 1,81 |
| 30 | 5,57 | 4,18 | 3,59 | 3,25 | 3,03 | 2,87 | 2,65 | 2,41 | 2,14 | 1,79 |
| 40 | 5,42 | 4,05 | 3,46 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,53 | 2,29 | 2,01 | 1,64 |
| 60 | 5,29 | 3,92 | 3,34 | 3,01 | 2,79 | 2,63 | 2,41 | 2,17 | 1,88 | 1,48 |
| 120 | 5,15 | 3,80 | 3,23 | 2,89 | 2,67 | 2,52 | 2,30 | 2,06 | 1,76 | 1,31 |
| ∞ | 5,02 | 3,69 | 3,12 | 2,79 | 2,57 | 2,41 | 2,19 | 1,94 | 1,64 | 1,00 |

Таблица XX

Значения F при $P = 0,01$

| $\nu_1 \backslash \nu_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 1 | 4052 | 4999 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5981 | 6106 | 6234 | 6366 |
| 2 | 98,49 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,42 | 99,46 | 99,50 |
| 3 | 34,12 | 30,81 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,49 | 27,05 | 26,60 | 26,12 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,80 | 14,37 | 13,93 | 13,46 |
| 5 | 16,26 | 13,27 | 12,05 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,29 | 9,89 | 9,47 | 9,02 |
| 6 | 13,74 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,10 | 7,72 | 7,31 | 6,88 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,84 | 6,47 | 6,07 | 5,65 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,03 | 5,67 | 5,28 | 4,86 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,05 | 5,80 | 5,47 | 5,11 | 4,73 | 4,31 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,06 | 4,71 | 4,33 | 3,91 |
| 11 | 9,65 | 7,20 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,74 | 4,40 | 4,02 | 3,60 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,50 | 4,16 | 3,78 | 3,36 |
| 13 | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,20 | 4,86 | 4,62 | 4,30 | 3,96 | 3,59 | 3,16 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,03 | 4,69 | 4,46 | 4,14 | 3,80 | 3,43 | 3,00 |
| 15 | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,00 | 3,67 | 3,29 | 2,87 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 3,89 | 3,55 | 3,18 | 2,75 |
| 17 | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,79 | 3,45 | 3,08 | 2,65 |
| 18 | 8,28 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,71 | 3,37 | 3,00 | 2,57 |
| 19 | 8,18 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,63 | 3,30 | 2,92 | 2,49 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,56 | 3,23 | 2,86 | 2,42 |
| 21 | 8,02 | 5,78 | 4,87 | 4,37 | 4,04 | 3,81 | 3,51 | 3,17 | 2,80 | 2,36 |
| 22 | 7,94 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,45 | 3,12 | 2,75 | 2,31 |
| 23 | 7,88 | 5,66 | 4,76 | 4,26 | 3,94 | 3,71 | 3,41 | 3,07 | 2,70 | 2,26 |
| 24 | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,36 | 3,03 | 2,66 | 2,21 |
| 25 | 7,77 | 5,57 | 4,68 | 4,18 | 3,86 | 3,63 | 3,32 | 2,99 | 2,62 | 2,17 |
| 26 | 7,72 | 5,53 | 4,64 | 4,14 | 3,82 | 3,59 | 3,29 | 2,96 | 2,58 | 2,13 |
| 27 | 7,68 | 5,49 | 4,60 | 4,11 | 3,78 | 3,56 | 3,26 | 2,93 | 2,55 | 2,10 |
| 28 | 7,64 | 5,45 | 4,57 | 4,07 | 3,75 | 3,53 | 3,23 | 2,90 | 2,52 | 2,06 |
| 29 | 7,60 | 5,42 | 4,54 | 4,04 | 3,73 | 3,50 | 3,20 | 2,87 | 2,49 | 2,03 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,17 | 2,84 | 2,47 | 2,01 |
| 40 | 7,31 | 5,18 | 4,31 | 3,83 | 3,51 | 3,29 | 2,99 | 2,66 | 2,29 | 1,80 |
| 60 | 7,08 | 4,98 | 4,13 | 3,65 | 3,34 | 3,12 | 2,82 | 2,50 | 2,12 | 1,60 |
| 120 | 6,85 | 4,79 | 3,95 | 3,48 | 3,17 | 2,96 | 2,66 | 2,34 | 1,95 | 1,38 |
| ∞ | 6,64 | 4,60 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 2,80 | 2,51 | 2,18 | 1,79 | 1,00 |

Значения F при $P = 0,005$

| $\begin{matrix} v_1 \\ \backslash \\ v_2 \end{matrix}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|
| 1 | 16 211 | 20 000 | 21 615 | 22 500 | 23 056 | 23 437 | 23 925 | 24 426 | 24 940 | 25 465 |
| 2 | 198,50 | 199,00 | 199,17 | 199,25 | 199,30 | 199,33 | 199,37 | 199,42 | 199,46 | 199,51 |
| 3 | 55,55 | 49,80 | 47,47 | 46,20 | 45,39 | 44,84 | 44,13 | 43,39 | 42,62 | 41,83 |
| 4 | 31,33 | 26,28 | 24,26 | 23,16 | 22,46 | 21,98 | 21,35 | 20,70 | 20,03 | 19,32 |
| 5 | 22,78 | 18,31 | 16,53 | 15,56 | 14,94 | 14,51 | 13,96 | 13,38 | 12,78 | 12,14 |
| 6 | 18,64 | 14,54 | 12,92 | 12,03 | 11,46 | 11,07 | 10,57 | 10,03 | 9,47 | 8,88 |
| 7 | 16,24 | 12,40 | 10,88 | 10,05 | 9,52 | 9,16 | 8,68 | 8,18 | 7,64 | 7,08 |
| 8 | 14,69 | 11,04 | 9,60 | 8,80 | 8,30 | 7,95 | 7,50 | 7,02 | 6,50 | 5,95 |
| 9 | 13,61 | 10,11 | 8,72 | 7,96 | 7,47 | 7,13 | 6,69 | 6,23 | 5,73 | 5,19 |
| 10 | 12,83 | 9,43 | 8,08 | 7,34 | 6,87 | 6,54 | 6,12 | 5,66 | 5,17 | 4,64 |
| 11 | 12,23 | 8,91 | 7,60 | 6,88 | 6,42 | 6,10 | 5,68 | 5,24 | 4,76 | 4,23 |
| 12 | 11,75 | 8,51 | 7,23 | 6,52 | 6,07 | 5,76 | 5,34 | 4,91 | 4,43 | 3,90 |
| 13 | 11,37 | 8,19 | 6,93 | 6,23 | 5,79 | 5,48 | 5,08 | 4,64 | 4,17 | 3,65 |
| 14 | 11,06 | 7,92 | 6,68 | 6,00 | 5,56 | 5,26 | 4,86 | 4,43 | 3,96 | 3,44 |
| 15 | 10,80 | 7,70 | 6,48 | 5,80 | 5,37 | 5,07 | 4,67 | 4,25 | 3,79 | 3,26 |
| 16 | 10,58 | 7,51 | 6,30 | 5,64 | 5,21 | 4,91 | 4,52 | 4,10 | 3,64 | 3,11 |
| 17 | 10,38 | 7,35 | 6,16 | 5,50 | 5,08 | 4,78 | 4,39 | 3,97 | 3,51 | 2,98 |
| 18 | 10,22 | 7,22 | 6,03 | 5,38 | 4,96 | 4,66 | 4,28 | 3,86 | 3,40 | 2,87 |
| 19 | 10,07 | 7,09 | 5,92 | 5,27 | 4,85 | 4,56 | 4,18 | 3,76 | 3,31 | 2,78 |
| 20 | 9,94 | 6,99 | 5,82 | 5,17 | 4,76 | 4,47 | 4,09 | 3,68 | 3,22 | 2,69 |
| 21 | 9,83 | 6,89 | 5,73 | 5,09 | 4,68 | 4,39 | 4,01 | 3,60 | 3,15 | 2,61 |
| 22 | 9,73 | 6,81 | 5,65 | 5,02 | 4,61 | 4,32 | 3,94 | 3,54 | 3,08 | 2,55 |
| 23 | 9,64 | 6,73 | 5,58 | 4,95 | 4,54 | 4,26 | 3,88 | 3,48 | 3,02 | 2,48 |
| 24 | 9,55 | 6,66 | 5,52 | 4,89 | 4,49 | 4,20 | 3,83 | 3,42 | 2,97 | 2,43 |
| 25 | 9,48 | 6,60 | 5,46 | 4,84 | 4,43 | 4,15 | 3,78 | 3,37 | 2,92 | 2,38 |
| 26 | 9,41 | 6,54 | 5,41 | 4,78 | 4,38 | 4,10 | 3,73 | 3,32 | 2,87 | 2,33 |
| 27 | 9,34 | 6,49 | 5,36 | 4,74 | 4,34 | 4,06 | 3,69 | 3,28 | 2,83 | 2,29 |
| 28 | 9,28 | 6,44 | 5,32 | 4,70 | 4,30 | 4,02 | 3,65 | 3,25 | 2,79 | 2,24 |
| 29 | 9,23 | 6,40 | 5,28 | 4,66 | 4,26 | 3,98 | 3,61 | 3,21 | 2,76 | 2,21 |
| 30 | 9,18 | 6,36 | 5,24 | 4,62 | 4,23 | 3,95 | 3,58 | 3,18 | 2,73 | 2,18 |
| 40 | 8,83 | 6,07 | 4,98 | 4,37 | 3,99 | 3,71 | 3,35 | 2,95 | 2,50 | 1,93 |
| 60 | 8,50 | 5,80 | 4,73 | 4,14 | 3,76 | 3,49 | 3,13 | 2,74 | 2,29 | 1,69 |
| 120 | 8,18 | 5,54 | 4,50 | 3,92 | 3,55 | 3,28 | 2,93 | 2,54 | 2,09 | 1,43 |
| ∞ | 7,88 | 5,30 | 4,28 | 3,72 | 3,35 | 3,09 | 2,74 | 2,36 | 1,90 | 1,00 |

Таблица XXIII

Значения величины r для значений z от 0,00 до 2,99

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0,0 | 0000 | 0100 | 0200 | 0300 | 0400 | 0500 | 0599 | 0699 | 0798 | 0898 |
| 1 | 0997 | 1096 | 1194 | 1293 | 1391 | 1489 | 1586 | 1684 | 1781 | 1877 |
| 2 | 1974 | 2070 | 2165 | 2260 | 2355 | 2449 | 2543 | 2636 | 2729 | 2821 |
| 3 | 2913 | 3004 | 3095 | 3185 | 3275 | 3364 | 3452 | 3540 | 3627 | 3714 |
| 4 | 3800 | 3885 | 3969 | 4053 | 4136 | 4219 | 4301 | 4382 | 4462 | 4542 |
| 5 | 4621 | 4699 | 4777 | 4854 | 4930 | 5005 | 5080 | 5154 | 5227 | 5299 |
| 6 | 5370 | 5441 | 5511 | 5580 | 5649 | 5717 | 5784 | 5850 | 5915 | 5980 |
| 7 | 6044 | 6107 | 6169 | 6231 | 6291 | 6351 | 6411 | 6469 | 6527 | 6584 |
| 8 | 6640 | 6696 | 6751 | 6805 | 6858 | 6911 | 6963 | 7014 | 7064 | 7114 |
| 9 | 7163 | 7211 | 7259 | 7306 | 7352 | 7398 | 7443 | 7487 | 7531 | 7574 |
| 1,0 | 7616 | 7658 | 7699 | 7739 | 7779 | 7818 | 7857 | 7895 | 7932 | 7969 |
| 1 | 8005 | 8041 | 8076 | 8110 | 8144 | 8178 | 8210 | 8243 | 8275 | 8306 |
| 2 | 8337 | 8367 | 8397 | 8426 | 8455 | 8483 | 8511 | 8538 | 8565 | 8591 |
| 3 | 8617 | 8643 | 8668 | 8692 | 8717 | 8741 | 8764 | 8787 | 8810 | 8832 |
| 4 | 8854 | 8875 | 8896 | 8917 | 8937 | 8957 | 8977 | 8996 | 9015 | 9033 |
| 5 | 9051 | 9069 | 9087 | 9104 | 9121 | 9138 | 9154 | 9170 | 9186 | 9201 |
| 6 | 9217 | 9232 | 9246 | 9261 | 9275 | 9289 | 9302 | 9316 | 9329 | 9341 |
| 7 | 9354 | 9366 | 9379 | 9391 | 9402 | 9414 | 9425 | 9436 | 9447 | 9458 |
| 8 | 9468 | 9478 | 9488 | 9498 | 9508 | 9518 | 9527 | 9536 | 9545 | 9554 |
| 9 | 9562 | 9571 | 9579 | 9587 | 9595 | 9603 | 9611 | 9618 | 9626 | 9633 |
| 2,0 | 9640 | 9647 | 9654 | 9661 | 9668 | 9674 | 9680 | 9686 | 9693 | 9699 |
| 1 | 9704 | 9710 | 9716 | 9722 | 9727 | 9732 | 9738 | 9743 | 9748 | 9753 |
| 2 | 9757 | 9762 | 9767 | 9771 | 9776 | 9780 | 9785 | 9789 | 9793 | 9797 |
| 3 | 9801 | 9805 | 9809 | 9812 | 9816 | 9820 | 9823 | 9827 | 9830 | 9834 |
| 4 | 9837 | 9840 | 9843 | 9846 | 9849 | 9852 | 9855 | 9858 | 9861 | 9864 |
| 5 | 9866 | 9869 | 9871 | 9874 | 9876 | 9879 | 9881 | 9884 | 9886 | 9888 |
| 6 | 9890 | 9892 | 9894 | 9897 | 9899 | 9901 | 9903 | 9904 | 9906 | 9908 |
| 7 | 9910 | 9912 | 9914 | 9915 | 9917 | 9919 | 9920 | 9922 | 9923 | 9925 |
| 8 | 9926 | 9928 | 9929 | 9931 | 9932 | 9933 | 9935 | 9936 | 9937 | 9938 |
| 9 | 9940 | 9941 | 9942 | 9943 | 9944 | 9945 | 9946 | 9947 | 9948 | 9949 |

Таблица XXIV

Значения величины z для значений r от 0,00 до 0,99

| r | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,0000 | 0,0100 | 0,0200 | 0,0300 | 0,0400 | 0,0501 | 0,0601 | 0,0701 | 0,0802 | 0,0902 |
| 1 | 0,1003 | 0,1105 | 0,1206 | 0,1308 | 0,1409 | 0,1511 | 0,1614 | 0,1717 | 0,1820 | 0,1923 |
| 2 | 0,2027 | 0,2132 | 0,2237 | 0,2342 | 0,2448 | 0,2554 | 0,2661 | 0,2769 | 0,2877 | 0,2986 |
| 3 | 0,3095 | 0,3206 | 0,3317 | 0,3428 | 0,3541 | 0,3654 | 0,3769 | 0,3884 | 0,4001 | 0,4118 |
| 4 | 0,4236 | 0,4356 | 0,4477 | 0,4599 | 0,4722 | 0,4847 | 0,4973 | 0,5101 | 0,5230 | 0,5361 |
| 5 | 0,5493 | 0,5627 | 0,5763 | 0,5901 | 0,6042 | 0,6184 | 0,6328 | 0,6475 | 0,6625 | 0,6777 |
| 6 | 0,6931 | 0,7089 | 0,7250 | 0,7414 | 0,7582 | 0,7753 | 0,7928 | 0,8107 | 0,8291 | 0,8480 |
| 7 | 0,8673 | 0,8872 | 0,9076 | 0,9287 | 0,9505 | 1,9730 | 0,9962 | 1,0203 | 1,0454 | 1,0714 |
| 8 | 1,0986 | 1,1270 | 1,1568 | 1,1881 | 1,2212 | 1,2562 | 1,2933 | 1,3331 | 1,3758 | 1,4219 |
| 9 | 1,4722 | 1,5275 | 1,5890 | 1,6584 | 1,7380 | 1,8318 | 1,9459 | 2,0923 | 2,2976 | 2,6467 |

Таблица XXV

Степени натуральных чисел

| n | n^2 | n^3 | n^4 | n^5 | n^6 | n^7 |
|-----|-------|---------|-----------|-------------|----------------|-----------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2 187 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1 024 | 4 096 | 16 384 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3 125 | 15 625 | 78 125 |
| 6 | 36 | 216 | 1 296 | 7 776 | 46 656 | 279 936 |
| 7 | 49 | 343 | 2 401 | 16 807 | 117 649 | 823 543 |
| 8 | 64 | 512 | 4 096 | 32 768 | 262 144 | 2 097 152 |
| 9 | 81 | 729 | 6 561 | 59 049 | 531 441 | 4 782 969 |
| 10 | 100 | 1 000 | 10 000 | 100 000 | 1 000 000 | 10 000 000 |
| 11 | 121 | 1 331 | 14 641 | 161 051 | 1 771 561 | 19 487 171 |
| 12 | 144 | 1 728 | 20 736 | 248 832 | 2 985 984 | 35 831 808 |
| 13 | 169 | 2 197 | 28 561 | 371 293 | 4 826 809 | 62 748 517 |
| 14 | 196 | 2 744 | 38 416 | 537 824 | 7 529 536 | 105 413 504 |
| 15 | 225 | 3 375 | 50 625 | 759 375 | 11 390 625 | 170 859 375 |
| 16 | 256 | 4 096 | 65 536 | 1 048 576 | 16 777 216 | 268 435 456 |
| 17 | 289 | 4 913 | 83 521 | 1 419 857 | 24 137 569 | 410 338 673 |
| 18 | 324 | 5 832 | 104 976 | 1 889 568 | 34 012 224 | 612 220 032 |
| 19 | 361 | 6 859 | 130 321 | 2 476 099 | 47 045 881 | 893 871 739 |
| 20 | 400 | 8 000 | 160 000 | 3 200 000 | 64 000 000 | 1 280 000 000 |
| 21 | 441 | 9 261 | 194 481 | 4 084 101 | 85 766 121 | 1 801 088 541 |
| 22 | 484 | 10 648 | 234 256 | 5 153 632 | 113 379 904 | 2 494 357 888 |
| 23 | 529 | 12 167 | 279 841 | 6 436 343 | 148 035 889 | 3 404 825 447 |
| 24 | 576 | 13 824 | 331 776 | 7 962 624 | 191 102 976 | 4 586 471 424 |
| 25 | 625 | 15 625 | 390 625 | 9 765 625 | 244 140 625 | 6 103 515 625 |
| 26 | 676 | 17 576 | 456 976 | 11 881 376 | 308 915 776 | 8 031 810 176 |
| 27 | 729 | 19 683 | 531 441 | 14 348 907 | 387 420 489 | 10 460 353 203 |
| 28 | 784 | 21 952 | 614 656 | 17 210 368 | 481 890 304 | 13 492 928 512 |
| 29 | 841 | 24 389 | 707 281 | 20 511 149 | 594 823 321 | 17 249 876 309 |
| 30 | 900 | 27 000 | 810 000 | 24 300 000 | 729 000 000 | 21 870 000 000 |
| 31 | 961 | 29 791 | 923 521 | 28 629 151 | 887 503 681 | 27 512 614 111 |
| 32 | 1 024 | 32 768 | 1 048 576 | 33 554 432 | 1 073 741 824 | 34 359 738 368 |
| 33 | 1 089 | 35 937 | 1 185 921 | 39 135 393 | 1 291 467 969 | 42 618 442 977 |
| 34 | 1 156 | 39 304 | 1 336 336 | 45 435 424 | 1 544 804 416 | 52 523 350 144 |
| 35 | 1 225 | 42 875 | 1 500 625 | 52 521 875 | 1 838 265 625 | 64 339 296 875 |
| 36 | 1 296 | 46 656 | 1 679 616 | 60 466 176 | 2 176 782 336 | 78 364 164 096 |
| 37 | 1 369 | 50 653 | 1 874 161 | 69 343 957 | 2 565 726 409 | 94 931 877 133 |
| 38 | 1 444 | 54 872 | 2 085 136 | 79 235 168 | 3 010 936 384 | 114 415 582 592 |
| 39 | 1 521 | 59 319 | 2 313 441 | 90 221 199 | 3 518 743 761 | 137 231 006 679 |
| 40 | 1 600 | 64 000 | 2 560 000 | 102 400 000 | 4 096 000 000 | 163 840 000 000 |
| 41 | 1 681 | 68 921 | 2 825 761 | 115 856 201 | 4 750 104 241 | 194 754 273 881 |
| 42 | 1 764 | 74 088 | 3 111 696 | 130 691 232 | 5 489 031 744 | 230 539 333 248 |
| 43 | 1 849 | 79 507 | 3 418 801 | 147 008 443 | 6 321 363 049 | 271 818 611 107 |
| 44 | 1 936 | 85 184 | 3 748 096 | 164 916 224 | 7 256 313 856 | 319 277 809 664 |
| 45 | 2 025 | 91 125 | 4 100 625 | 184 528 125 | 8 303 765 625 | 373 669 453 125 |
| 46 | 2 116 | 97 336 | 4 477 456 | 205 962 976 | 9 474 296 896 | 435 817 657 216 |
| 47 | 2 209 | 103 823 | 4 879 681 | 229 345 007 | 10 779 215 329 | 506 623 120 463 |
| 48 | 2 304 | 110 592 | 5 308 416 | 254 803 968 | 12 230 590 464 | 587 068 842 272 |
| 49 | 2 401 | 117 649 | 5 764 801 | 282 475 249 | 13 841 287 201 | 678 223 072 849 |
| 50 | 2 500 | 125 000 | 6 250 000 | 312 500 000 | 15 625 000 000 | 781 250 000 000 |

Продолжение табл. XXV

| n | n^2 | n^3 | n^4 | n^5 | n^6 | n^7 |
|-----|--------|-----------|-------------|----------------|-------------------|---------------------|
| 51 | 2 601 | 132 651 | 6 765 201 | 345 025 251 | 17 596 287 801 | 897 410 677 851 |
| 52 | 2 704 | 140 608 | 7 311 616 | 380 204 032 | 19 770 609 964 | 1 028 071 702 528 |
| 53 | 2 809 | 148 877 | 7 890 481 | 418 195 493 | 22 164 361 129 | 1 174 711 139 837 |
| 54 | 2 916 | 157 464 | 8 503 056 | 459 165 024 | 24 794 911 296 | 1 338 925 209 984 |
| 55 | 3 025 | 166 375 | 9 150 625 | 503 284 375 | 27 680 640 625 | 1 522 435 234 375 |
| 56 | 3 136 | 175 616 | 9 834 496 | 550 731 776 | 30 840 979 456 | 1 727 094 849 536 |
| 57 | 3 249 | 185 193 | 10 556 001 | 601 692 057 | 34 296 447 249 | 1 954 897 493 193 |
| 58 | 3 364 | 195 112 | 11 316 496 | 656 356 768 | 38 068 692 544 | 2 207 984 167 552 |
| 59 | 3 481 | 205 379 | 12 117 361 | 714 924 299 | 42 180 533 641 | 2 488 651 484 819 |
| 60 | 3 600 | 216 000 | 12 960 000 | 777 600 000 | 46 656 000 000 | 2 799 360 000 000 |
| 61 | 3 721 | 226 981 | 13 845 841 | 844 596 301 | 51 520 374 361 | 3 142 742 836 021 |
| 62 | 3 844 | 238 328 | 14 776 336 | 916 132 832 | 56 800 235 584 | 3 521 614 606 208 |
| 63 | 3 969 | 250 047 | 15 752 961 | 992 436 543 | 62 523 502 209 | 3 938 980 639 167 |
| 64 | 4 096 | 262 144 | 16 777 216 | 1 073 741 824 | 68 719 476 736 | 4 398 046 511 104 |
| 65 | 4 225 | 274 625 | 17 850 625 | 1 160 290 625 | 75 418 890 625 | 4 902 227 890 625 |
| 66 | 4 356 | 287 496 | 18 974 736 | 1 252 332 576 | 82 653 950 016 | 5 455 160 701 056 |
| 67 | 4 489 | 300 763 | 20 151 121 | 1 350 125 107 | 90 458 382 169 | 6 060 711 605 323 |
| 68 | 4 624 | 314 432 | 21 381 376 | 1 453 933 568 | 98 867 432 624 | 6 722 988 818 432 |
| 69 | 4 761 | 328 509 | 22 667 121 | 1 564 031 349 | 107 918 163 081 | 7 446 353 252 589 |
| 70 | 4 900 | 343 000 | 24 010 000 | 1 680 700 000 | 117 649 000 000 | 8 235 430 000 000 |
| 71 | 5 041 | 357 911 | 25 411 681 | 1 804 229 351 | 128 100 283 921 | 9 095 120 158 391 |
| 72 | 5 184 | 373 248 | 26 873 856 | 1 934 917 632 | 139 314 069 504 | 10 030 613 004 288 |
| 73 | 5 329 | 389 017 | 28 398 241 | 2 073 071 593 | 151 334 226 289 | 11 047 398 519 097 |
| 74 | 5 476 | 405 224 | 29 986 576 | 2 219 006 624 | 164 206 490 176 | 12 151 289 273 024 |
| 75 | 5 625 | 421 875 | 31 640 625 | 2 373 046 875 | 177 978 515 625 | 13 348 388 671 875 |
| 76 | 5 776 | 438 976 | 33 362 176 | 2 535 525 376 | 192 699 928 576 | 14 645 194 571 776 |
| 77 | 5 929 | 456 533 | 35 153 641 | 2 706 784 157 | 208 422 380 089 | 16 048 523 266 853 |
| 78 | 6 084 | 474 552 | 37 015 056 | 2 887 174 368 | 225 199 600 704 | 17 565 568 854 912 |
| 79 | 6 241 | 493 039 | 38 950 081 | 3 077 056 399 | 243 087 455 521 | 19 203 908 986 159 |
| 80 | 6 400 | 512 000 | 40 950 000 | 3 276 800 000 | 262 144 000 000 | 20 971 520 000 000 |
| 81 | 6 561 | 531 441 | 43 046 721 | 3 486 784 401 | 282 429 536 481 | 22 876 792 454 961 |
| 82 | 6 724 | 551 368 | 45 212 176 | 3 707 398 432 | 304 006 671 424 | 24 928 547 056 768 |
| 83 | 6 889 | 571 787 | 47 458 321 | 3 939 040 643 | 326 940 373 369 | 27 136 050 989 627 |
| 84 | 7 056 | 592 704 | 49 787 136 | 4 182 119 424 | 351 298 031 616 | 29 509 034 655 744 |
| 85 | 7 225 | 614 125 | 52 200 625 | 4 437 053 125 | 377 149 515 625 | 32 057 708 828 125 |
| 86 | 7 396 | 636 056 | 54 700 816 | 4 704 270 176 | 404 567 235 136 | 34 792 782 221 696 |
| 87 | 7 569 | 658 503 | 57 289 761 | 4 984 209 207 | 433 626 201 009 | 37 725 479 487 783 |
| 88 | 7 744 | 681 472 | 59 969 536 | 5 277 319 168 | 464 404 086 784 | 40 867 559 636 992 |
| 89 | 7 921 | 704 969 | 62 742 241 | 5 584 059 449 | 496 981 290 961 | 44 231 334 895 529 |
| 90 | 8 100 | 729 000 | 65 610 000 | 5 904 900 000 | 531 441 000 000 | 47 829 690 000 000 |
| 91 | 8 281 | 753 571 | 68 574 961 | 6 240 321 451 | 567 869 252 041 | 51 676 101 935 731 |
| 92 | 8 464 | 778 688 | 71 639 296 | 6 590 815 232 | 606 355 001 344 | 55 784 660 123 648 |
| 93 | 8 649 | 804 357 | 74 805 201 | 6 956 883 693 | 646 990 183 449 | 60 170 087 060 757 |
| 94 | 8 836 | 830 584 | 78 074 896 | 7 339 040 224 | 689 869 781 056 | 64 847 759 419 564 |
| 95 | 9 025 | 857 375 | 81 450 625 | 7 737 809 375 | 735 091 890 625 | 69 833 729 609 375 |
| 96 | 9 216 | 884 736 | 84 934 656 | 8 153 726 976 | 782 757 789 696 | 75 144 747 810 816 |
| 97 | 9 409 | 912 673 | 88 529 281 | 8 587 340 257 | 832 972 004 929 | 80 798 284 478 113 |
| 98 | 9 604 | 941 192 | 92 236 816 | 9 039 207 968 | 885 842 380 864 | 86 812 553 324 672 |
| 99 | 9 801 | 970 299 | 96 059 601 | 9 509 900 439 | 941 480 149 401 | 93 206 534 790 699 |
| 100 | 10 000 | 1 000 000 | 100 000 000 | 10 000 000 000 | 1 000 000 000 000 | 100 000 000 000 000 |

Таблица XXVI

Числа Чебышева от $n=3$ до $n=50$

| 3 | | 4 | | | 5 | | | | 6 | | | | |
|----------|-----------|-----------|----------|----------------------|----------|----------|---------------------|-----------------------|-----------|---------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|
| ψ_1 | $3\psi_2$ | $2\psi_1$ | ψ_2 | $\frac{10}{3}\psi_3$ | ψ_1 | ψ_2 | $\frac{5}{6}\psi_3$ | $\frac{35}{12}\psi_4$ | $2\psi_1$ | $\frac{3}{2}\psi_2$ | $\frac{5}{3}\psi_3$ | $\frac{7}{12}\psi_4$ | $\frac{21}{10}\psi_5$ |
| -1 | +1 | -3 | +1 | -1 | -2 | +2 | -1 | +1 | -5 | +5 | -5 | +1 | -1 |
| 0 | -2 | -1 | -1 | +3 | -1 | -1 | +2 | -4 | -3 | -1 | +7 | -3 | +5 |
| +1 | +1 | +1 | -1 | -3 | 0 | -2 | 0 | +6 | -1 | -4 | +4 | +2 | -10 |
| | | +3 | +1 | +1 | +1 | -1 | -2 | -4 | +1 | -4 | -4 | +2 | +10 |
| | | | | | +2 | +2 | +1 | +1 | +3 | -1 | -7 | -3 | -5 |
| | | | | | | | | | +5 | +5 | +5 | +1 | +1 |
| 2 | 6 | 20 | 4 | 20 | 10 | 14 | 10 | 70 | 70 | 84 | 180 | 28 | 252 |

| 7 | | | | | 8 | | | | | 9 | | | | |
|----------|----------|---------------------|----------------------|----------------------|-----------|----------|---------------------|----------------------|----------------------|----------|-----------|---------------------|----------------------|----------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{1}{6}\psi_3$ | $\frac{7}{12}\psi_4$ | $\frac{7}{20}\psi_5$ | $2\psi_1$ | ψ_2 | $\frac{2}{3}\psi_3$ | $\frac{7}{12}\psi_4$ | $\frac{7}{10}\psi_5$ | ψ_1 | $3\psi_2$ | $\frac{5}{6}\psi_3$ | $\frac{7}{12}\psi_4$ | $\frac{3}{20}\psi_5$ |
| -3 | +5 | -1 | +3 | -1 | -7 | +7 | -7 | +7 | -7 | -4 | +28 | -14 | +14 | -4 |
| -2 | 0 | +1 | -7 | +4 | -5 | +1 | +5 | -13 | +23 | -3 | +7 | +7 | -21 | +1 |
| -1 | -3 | +1 | +1 | -5 | -3 | -3 | +7 | -7 | -17 | -2 | -8 | +13 | -11 | -4 |
| 0 | -4 | 0 | +6 | 0 | -1 | -5 | +3 | +9 | -15 | -1 | -17 | +9 | +9 | -9 |
| +1 | -3 | -1 | +1 | +5 | +1 | -5 | -3 | +9 | +15 | 0 | -20 | 0 | +18 | 0 |
| +2 | 0 | -1 | -7 | -4 | +3 | -3 | -7 | -3 | +17 | +1 | -17 | -9 | +9 | +9 |
| +3 | +5 | +1 | +3 | +1 | +5 | +1 | -5 | -13 | -23 | +2 | -8 | -13 | -11 | +4 |
| | | | | | +7 | +7 | +7 | +7 | +7 | +3 | +7 | -7 | -21 | -11 |
| | | | | | | | | | | +4 | +28 | +14 | +14 | +4 |
| 28 | 34 | 6 | 154 | 84 | 168 | 168 | 264 | 616 | 2 184 | 60 | 2 772 | 990 | 2 002 | 468 |

| 10 | | | | | 11 | | | | | 12 | | | | |
|-----------|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|----------|----------|---------------------|----------------------|----------------------|-----------|-----------|---------------------|----------------------|----------------------|
| $2\psi_1$ | $\frac{1}{2}\psi_2$ | $\frac{5}{3}\psi_3$ | $\frac{5}{12}\psi_4$ | $\frac{1}{10}\psi_5$ | ψ_1 | ψ_2 | $\frac{5}{6}\psi_3$ | $\frac{1}{12}\psi_4$ | $\frac{1}{40}\psi_5$ | $2\psi_1$ | $3\psi_2$ | $\frac{2}{3}\psi_3$ | $\frac{7}{24}\psi_4$ | $\frac{3}{20}\psi_5$ |
| -9 | +6 | -42 | +18 | -6 | -5 | +15 | -30 | +6 | -3 | -11 | +55 | -33 | +33 | -33 |
| -7 | +2 | +14 | -22 | +14 | -4 | +6 | +6 | -6 | +6 | -9 | +25 | +3 | -27 | +57 |
| -5 | -1 | +35 | -17 | -1 | -3 | -1 | +22 | -6 | +1 | -7 | +1 | +21 | -33 | +21 |
| -3 | -3 | +31 | +3 | -11 | -2 | -6 | +23 | -1 | -4 | -5 | -17 | +25 | -13 | -29 |
| -1 | -4 | +12 | +18 | -6 | -1 | -9 | +14 | +4 | -4 | -3 | -29 | +19 | +12 | -44 |
| +1 | -4 | -12 | +18 | +6 | 0 | -10 | 0 | +6 | 0 | -1 | -35 | +7 | +28 | -20 |
| +3 | -3 | -31 | +3 | +11 | +1 | -9 | -14 | +4 | +4 | +1 | -35 | -7 | +28 | +20 |
| +5 | -1 | -35 | -17 | +1 | +2 | -6 | -23 | -1 | +1 | +3 | -29 | -19 | +12 | +44 |
| +7 | +2 | -14 | -22 | -14 | +3 | -1 | -22 | -6 | -1 | +5 | -17 | -25 | -13 | +29 |
| +9 | +6 | +42 | +18 | +6 | +4 | +6 | -6 | -6 | -6 | +7 | +1 | -21 | -33 | -21 |
| | | | | | +5 | +15 | +30 | +6 | +3 | +9 | +25 | -3 | -27 | -57 |
| | | | | | | | | | | +11 | +55 | +33 | +33 | +33 |
| 330 | 132 | 8 580 | 2 860 | 780 | 110 | 858 | 4 290 | 286 | 156 | 572 | 12 012 | 5 148 | 8 008 | 15 912 |

Продолжение табл. XXVI

| 13 | | | | |
|----------|----------|----------------------|-----------------------|------------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{1}{6} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{7}{120} \psi_5$ |
| 0 | -14 | 0 | +84 | 0 |
| +1 | -13 | -4 | +64 | +20 |
| +2 | -10 | -7 | +11 | +26 |
| +3 | -5 | -8 | -54 | +11 |
| +4 | +2 | -6 | -96 | -18 |
| +5 | +11 | 0 | -66 | -33 |
| +6 | +22 | +11 | +99 | +22 |
| 182 | 2 002 | 572 | 68 068 | 6 188 |

| 14 | | | | |
|-----------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | $\frac{1}{2} \psi_2$ | $\frac{5}{3} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{7}{30} \psi_5$ |
| +1 | -8 | -24 | +108 | +60 |
| +3 | -7 | -67 | +63 | +145 |
| +5 | -5 | -95 | -13 | +139 |
| +7 | -2 | -98 | -92 | +28 |
| +9 | +2 | -66 | -132 | -132 |
| +11 | +7 | +11 | -77 | -187 |
| +13 | +13 | +143 | +143 | +143 |
| 910 | 728 | 97 240 | 136 136 | 235 144 |

| 15 | | | | |
|----------|-----------|----------------------|------------------------|------------------------|
| ψ_1 | $3\psi_2$ | $\frac{5}{6} \psi_3$ | $\frac{35}{12} \psi_4$ | $\frac{21}{20} \psi_5$ |
| 0 | -56 | 0 | +756 | 0 |
| +1 | -53 | -27 | +621 | +675 |
| +2 | -44 | -49 | +251 | +1000 |
| +3 | -29 | -61 | -249 | +751 |
| +4 | -8 | -58 | -704 | -44 |
| +5 | +19 | -35 | -869 | -979 |
| +6 | +52 | +13 | -429 | -1144 |
| +7 | +91 | +91 | +1001 | +1001 |
| 280 | 37 128 | 39 780 | 6 466 460 | 10 581 480 |

| 16 | | | | |
|-----------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | ψ_2 | $\frac{10}{3} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{10} \psi_5$ |
| +1 | -21 | -63 | +189 | +45 |
| +3 | -19 | -179 | +129 | +115 |
| +5 | -15 | -265 | +23 | +131 |
| +7 | -9 | -301 | -101 | +77 |
| +9 | -1 | -267 | -201 | -33 |
| +11 | +9 | -143 | -221 | -143 |
| +13 | +21 | +91 | -91 | -143 |
| +15 | +35 | +455 | +273 | +143 |
| 1 360 | 5 712 | 1 007 760 | 470 288 | 201 552 |

| 17 | | | | |
|----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{1}{6} \psi_3$ | $\frac{1}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{20} \psi_5$ |
| 0 | -24 | 0 | +36 | 0 |
| +1 | -23 | -7 | +31 | +55 |
| +2 | -20 | -13 | +17 | +88 |
| +3 | -15 | -17 | -3 | +83 |
| +4 | -8 | -18 | -24 | +36 |
| +5 | +1 | -15 | -39 | -39 |
| +6 | +12 | -7 | -39 | -104 |
| +7 | +25 | +7 | -13 | -91 |
| +8 | +40 | +28 | +52 | +104 |
| 408 | 7 752 | 3 876 | 16 796 | 100 776 |

| 18 | | | | |
|-----------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | $\frac{3}{2} \psi_2$ | $\frac{1}{3} \psi_3$ | $\frac{1}{12} \psi_4$ | $\frac{3}{10} \psi_5$ |
| +1 | -40 | -8 | +44 | +220 |
| +3 | -37 | -23 | +33 | +583 |
| +5 | -31 | -35 | +13 | +733 |
| +7 | -22 | -42 | -12 | +588 |
| +9 | -10 | -42 | -36 | +156 |
| +11 | +5 | -33 | -51 | -429 |
| +13 | +23 | -13 | -47 | -871 |
| +15 | +44 | +20 | -12 | -676 |
| +17 | +68 | +68 | +68 | +884 |
| 1 938 | 23 256 | 23 256 | 28 424 | 6 963 544 |

Продолжение табл. XXVI

| 19 | | | | |
|----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{5}{6} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{40} \psi_5$ |
| 0 | -30 | 0 | +396 | 0 |
| +1 | -29 | -44 | +352 | +44 |
| +2 | -26 | -83 | +227 | +74 |
| +3 | -21 | -112 | +42 | +79 |
| +4 | -14 | -126 | -168 | +54 |
| +5 | -5 | -120 | -354 | +3 |
| +6 | +6 | -89 | -453 | -58 |
| +7 | +19 | -28 | -388 | -98 |
| +8 | +34 | +68 | -68 | -68 |
| +9 | +51 | +204 | +612 | +102 |
| 570 | 13 566 | 213 180 | 2 288 132 | 89 148 |

| 20 | | | | |
|-----------|----------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | ψ_2 | $\frac{10}{3} \psi_3$ | $\frac{35}{24} \psi_4$ | $\frac{7}{20} \psi_5$ |
| +1 | -33 | -99 | +1 188 | +396 |
| +3 | -31 | -287 | +948 | +1 076 |
| +5 | -27 | -445 | +503 | +1 441 |
| +7 | -21 | -553 | -77 | +1 351 |
| +9 | -13 | -591 | -687 | +771 |
| +11 | -3 | -539 | -1 187 | -187 |
| +13 | +9 | -377 | -1 402 | -1 222 |
| +15 | +23 | -85 | -1 122 | -1 802 |
| +17 | +39 | +357 | -102 | -1 122 |
| +19 | +57 | +969 | +1 938 | +1 938 |
| 2 660 | 17 556 | 4 903 140 | 22 881 320 | 31 201 800 |

| 21 | | | | |
|----------|-----------|----------------------|-----------------------|------------------------|
| ψ_1 | $3\psi_2$ | $\frac{5}{6} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{21}{40} \psi_5$ |
| 0 | -110 | 0 | +594 | 0 |
| +1 | -107 | -54 | +540 | +1 404 |
| +2 | -98 | -103 | +385 | +2 444 |
| +3 | -83 | -142 | +150 | +2 819 |
| +4 | -62 | -166 | -130 | +2 354 |
| +5 | -35 | -170 | -406 | +1 063 |
| +6 | -2 | -149 | -615 | -788 |
| +7 | +37 | -98 | -680 | -2 618 |
| +8 | +82 | -12 | -510 | -3 468 |
| +9 | +133 | +114 | 0 | -1 938 |
| +10 | +190 | +285 | +969 | +3 876 |
| 770 | 201 894 | 432 630 | 5 720 330 | 121 687 020 |

| 22 | | | | |
|-----------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | $\frac{1}{2} \psi_2$ | $\frac{1}{3} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{7}{30} \psi_5$ |
| +1 | -20 | -12 | +702 | +390 |
| +3 | -19 | -35 | +585 | +1 079 |
| +5 | -17 | -55 | +365 | +1 509 |
| +7 | -14 | -70 | +70 | +1 554 |
| +9 | -10 | -78 | -258 | +1 158 |
| +11 | -5 | -77 | -563 | +363 |
| +13 | +1 | -65 | -775 | -663 |
| +15 | +8 | -40 | -810 | -1 598 |
| +17 | +16 | 0 | -570 | -1 938 |
| +19 | +25 | +57 | +57 | -969 |
| +21 | +35 | +133 | +1 197 | +2 261 |
| 3 542 | 7 084 | 96 140 | 8 748 740 | 40 562 340 |

| 23 | | | | |
|----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{1}{6} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{60} \psi_5$ |
| 0 | -44 | 0 | +858 | 0 |
| +1 | -43 | -13 | +793 | +65 |
| +2 | -40 | -25 | +605 | +116 |
| +3 | -35 | -35 | +315 | +141 |
| +4 | -28 | -42 | -42 | +132 |
| +5 | -19 | -45 | -417 | +87 |
| +6 | -8 | -43 | -747 | +12 |
| +7 | +5 | -35 | -955 | -77 |
| +8 | +20 | -20 | -950 | -152 |
| +9 | +37 | +3 | -627 | -171 |
| +10 | +56 | +35 | +133 | -76 |
| +11 | +77 | +77 | +1 463 | +209 |
| 1 012 | 35 420 | 32 890 | 13 123 110 | 340 860 |

| 24 | | | | |
|-----------|-----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | $3\psi_2$ | $\frac{10}{3} \psi_3$ | $\frac{1}{12} \psi_4$ | $\frac{3}{10} \psi_5$ |
| +1 | -143 | -143 | +143 | +715 |
| +3 | -137 | -419 | +123 | +2 005 |
| +5 | -125 | -665 | +85 | +2 893 |
| +7 | -107 | -861 | +33 | +3 171 |
| +9 | -83 | -987 | -27 | +2 721 |
| +11 | -53 | -1 023 | -87 | +1 551 |
| +13 | -17 | -949 | -137 | -169 |
| +15 | +25 | -745 | -165 | -2 071 |
| +17 | +73 | -391 | -157 | -3 553 |
| +19 | +127 | +133 | -97 | -3 743 |
| +21 | +187 | +847 | +33 | -1 453 |
| +23 | +253 | +1 771 | +253 | +4 807 |
| 4 600 | 394 680 | 17 760 600 | 394 680 | 177 928 920 |

Продолжение табл. XXVI

| 25 | | | | |
|----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{5}{6} \psi_3$ | $\frac{5}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{20} \psi_5$ |
| 0 | -52 | 0 | +858 | 0 |
| +1 | -51 | -77 | +803 | +275 |
| +2 | -48 | -149 | +643 | +500 |
| +3 | -43 | -211 | +393 | +631 |
| +4 | -36 | -258 | +78 | +636 |
| +5 | -27 | -285 | -267 | +501 |
| +6 | -16 | -287 | -527 | +236 |
| +7 | -3 | -259 | -857 | -119 |
| +8 | +12 | -196 | -982 | -488 |
| +9 | +29 | -93 | -897 | -753 |
| +10 | +48 | +55 | -517 | -748 |
| +11 | +69 | +253 | +253 | -253 |
| +12 | +92 | +506 | +1 518 | +1 012 |
| 1 300 | 53 820 | 1 480 050 | 14 307 150 | 7 803 900 |

| 26 | | | | |
|-----------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | $\frac{1}{2} \psi_2$ | $\frac{5}{3} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{10} \psi_5$ |
| +1 | -28 | -84 | +1 386 | +330 |
| +3 | -27 | -247 | +1 221 | +935 |
| +5 | -25 | -395 | +905 | +1 381 |
| +7 | -22 | -518 | +466 | +1 582 |
| +9 | -18 | -606 | -54 | +1 482 |
| +11 | -13 | -649 | -599 | +1 067 |
| +13 | -7 | -637 | -1 099 | +377 |
| +15 | 0 | -560 | -1 470 | -482 |
| +17 | +8 | -408 | -1 614 | -1 326 |
| +19 | +17 | -171 | -1 419 | -1 881 |
| +21 | +27 | +161 | -759 | -1 771 |
| +23 | +38 | +598 | +506 | -506 |
| +25 | +50 | +1 150 | +2 530 | +2 530 |
| 5 850 | 16 380 | 7 803 900 | 40 060 020 | 48 284 180 |

| 27 | | | | |
|----------|-----------|----------------------|-----------------------|------------------------|
| ψ_1 | $3\psi_2$ | $\frac{1}{6} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{21}{40} \psi_5$ |
| 0 | -182 | 0 | +1 638 | 0 |
| +1 | -179 | -18 | +1 548 | +3 560 |
| +2 | -170 | -35 | +1 285 | +7 304 |
| +3 | -155 | -50 | +870 | +9 479 |
| +4 | -134 | -62 | +338 | +10 058 |
| +5 | -107 | -70 | -262 | +8 803 |
| +6 | -74 | -73 | -867 | +5 728 |
| +7 | -35 | -70 | -1 400 | +1 162 |
| +8 | +10 | -60 | -1 770 | -4 188 |
| +9 | +61 | -42 | -1 872 | -9 174 |
| +10 | +118 | -15 | -1 587 | -12 144 |
| +11 | +181 | +22 | -782 | -10 879 |
| +12 | +250 | +70 | +690 | -2 530 |
| +13 | +325 | +130 | +2 990 | +16 445 |
| 1 638 | 712 530 | 101 790 | 56 448 210 | 2 032 135 560 |

| 28 | | | | |
|-----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | ψ_2 | $\frac{2}{3} \psi_3$ | $\frac{7}{24} \psi_4$ | $\frac{7}{20} \psi_5$ |
| +1 | -65 | -39 | +936 | +1 560 |
| +3 | -63 | -115 | +840 | +4 456 |
| +5 | -59 | -185 | +655 | +6 701 |
| +7 | -53 | -245 | +395 | +7 931 |
| +9 | -45 | -291 | +81 | +7 887 |
| +11 | -35 | -319 | -259 | +6 457 |
| +13 | -23 | -325 | -590 | +3 718 |
| +15 | -9 | -305 | -870 | -22 |
| +17 | +7 | -255 | -1 050 | -4 182 |
| +19 | +25 | -171 | -1 074 | -7 866 |
| +21 | +45 | -49 | -879 | -9 821 |
| +23 | +67 | +115 | -395 | -8 395 |
| +25 | +91 | +325 | +455 | -1 495 |
| +27 | +117 | +585 | +1 755 | +13 455 |
| 7 308 | 95 004 | 2 103 660 | 19 634 160 | 1 354 757 040 |

Продолжение табл. XXVI

| 29 | | | | |
|----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{5}{6} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{7}{40} \psi_5$ |
| 0 | -70 | 0 | +2 184 | 0 |
| +1 | -69 | -104 | +2 080 | +1 768 |
| +2 | -66 | -203 | +1 775 | +3 298 |
| +3 | -61 | -292 | +1 290 | +4 373 |
| +4 | -54 | -366 | +660 | +4 818 |
| +5 | -45 | -420 | -66 | +4 521 |
| +6 | -34 | -449 | -825 | +3 454 |
| +7 | -21 | -448 | -1 540 | +1 694 |
| +8 | -6 | -412 | -2 120 | -556 |
| +9 | +11 | -336 | -2 460 | -2 946 |
| +10 | +30 | -215 | -2 441 | -4 958 |
| +11 | +51 | -44 | -1 930 | -5 885 |
| +12 | +74 | +182 | -780 | -4 810 |
| +13 | +99 | +468 | +1 170 | -585 |
| +14 | +126 | +819 | +4 095 | +8 190 |
| 2 030 | 113 274 | 4 207 320 | 107 987 880 | 500 671 080 |

| 30 | | | | |
|-----------|----------------------|----------------------|------------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | $\frac{3}{2} \psi_2$ | $\frac{5}{3} \psi_3$ | $\frac{35}{12} \psi_4$ | $\frac{3}{10} \psi_5$ |
| +1 | -112 | -112 | +12 376 | +1 768 |
| +3 | -109 | -331 | +11 271 | +5 083 |
| +5 | -103 | -535 | +9 131 | +7 753 |
| +7 | -94 | -714 | +6 096 | +9 408 |
| +9 | -82 | -858 | +2 376 | +9 768 |
| +11 | -67 | -957 | -1 749 | +8 679 |
| +13 | -49 | -1 001 | -5 929 | +6 149 |
| +15 | -28 | -980 | -9 744 | +2 384 |
| +17 | -4 | -884 | -12 704 | -2 176 |
| +19 | +23 | -703 | -14 249 | -6 821 |
| +21 | +53 | -427 | -13 749 | -10 535 |
| +23 | +86 | -46 | -10 504 | -11 960 |
| +25 | +122 | +450 | -3 744 | -9 360 |
| +27 | +161 | +1 071 | +7 341 | -585 |
| +29 | +203 | +1 827 | +23 751 | +16 965 |
| 8 990 | 302 064 | 21 360 240 | 3 671 587 920 | 2 145 733 200 |

| 31 | | | | |
|----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{5}{6} \psi_3$ | $\frac{1}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{60} \psi_5$ |
| 0 | -80 | 0 | +408 | 0 |
| +1 | -79 | -119 | +391 | +221 |
| +2 | -76 | -233 | +341 | +416 |
| +3 | -71 | -337 | +261 | +561 |
| +4 | -64 | -426 | +156 | +636 |
| +5 | -55 | -495 | +33 | +627 |
| +6 | -44 | -539 | -99 | +528 |
| +7 | -31 | -553 | -229 | +343 |
| +8 | -16 | -532 | -344 | +88 |
| +9 | +1 | -471 | -429 | -207 |
| +10 | +20 | -365 | -467 | -496 |
| +11 | +41 | -209 | -439 | -715 |
| +12 | +64 | +2 | -324 | -780 |
| +13 | +89 | +273 | -99 | -585 |
| +14 | +116 | +609 | +261 | 0 |
| +15 | +145 | +1 015 | +783 | +1 131 |
| 2 480 | 158 224 | 6 724 520 | 4 034 712 | 9 536 592 |

| 32 | | | | |
|-----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | ψ_2 | $\frac{2}{3} \psi_3$ | $\frac{1}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{30} \psi_5$ |
| +1 | -85 | -51 | +459 | +255 |
| +3 | -83 | -151 | +423 | +737 |
| +5 | -79 | -245 | +353 | +1 137 |
| +7 | -73 | -329 | +253 | +1 407 |
| +9 | -65 | -399 | +129 | +1 509 |
| +11 | -55 | -451 | -11 | +1 419 |
| +13 | -43 | -481 | -157 | +1 131 |
| +15 | -29 | -485 | -297 | +661 |
| +17 | -13 | -459 | -417 | +51 |
| +19 | +5 | -399 | -501 | -627 |
| +21 | +25 | -301 | -531 | -1 267 |
| +23 | +47 | -161 | -487 | -1 725 |
| +25 | +71 | +25 | -347 | -1 815 |
| +27 | +97 | +261 | -87 | -1 305 |
| +29 | +125 | +551 | +319 | +87 |
| +31 | +155 | +899 | +899 | +2 697 |
| 10 912 | 185 504 | 5 379 616 | 5 379 616 | 54 285 215 |

Продолжение табл. XXVI

| 33 | | | | |
|----------|-----------|---------------------|----------------------|----------------------|
| ψ_1 | $3\psi_2$ | $\frac{1}{6}\psi_3$ | $\frac{7}{12}\psi_4$ | $\frac{3}{20}\psi_5$ |
| 0 | -272 | 0 | +3 672 | 0 |
| +1 | -269 | -27 | +3 537 | +2 565 |
| +2 | -260 | -53 | +3 139 | +4 864 |
| +3 | -245 | -77 | +2 499 | +6 649 |
| +4 | -224 | -98 | +1 652 | +7 708 |
| +5 | -197 | -115 | +647 | +7 883 |
| +6 | -164 | -127 | -453 | +7 088 |
| +7 | -125 | -133 | -1 571 | +5 327 |
| +8 | -80 | -132 | -2 616 | +2 712 |
| +9 | -29 | -123 | -3 483 | -519 |
| +10 | +28 | -105 | -4 053 | -3 984 |
| +11 | +91 | -77 | -4 193 | -7 139 |
| +12 | +160 | -38 | -3 756 | -9 260 |
| +13 | +235 | +13 | -2 581 | -9 425 |
| +14 | +316 | +77 | -493 | -6 496 |
| +15 | +403 | +155 | +2 697 | +899 |
| +16 | +496 | +248 | +7 192 | +14 384 |
| 2 992 | 1 947 792 | 417 384 | 348 330 136 | 1 547 128 656 |

| 34 | | | | |
|-----------|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| $2\psi_1$ | $\frac{1}{2}\psi_2$ | $\frac{5}{3}\psi_3$ | $\frac{7}{12}\psi_4$ | $\frac{7}{10}\psi_5$ |
| +1 | -48 | -144 | +4 104 | +6 840 |
| +3 | -47 | -427 | +3 819 | +19 855 |
| +5 | -45 | -695 | +3 263 | +30 917 |
| +7 | -42 | -938 | +2 464 | +38 864 |
| +9 | -38 | -1 146 | +1 464 | +42 744 |
| +11 | -33 | -1 309 | +319 | +41 899 |
| +13 | -27 | -1 417 | -901 | +36 049 |
| +15 | -20 | -1 460 | -2 112 | +25 376 |
| +17 | -12 | -1 428 | -3 216 | +10 608 |
| +19 | -3 | -1 311 | -4 101 | -6 897 |
| +21 | +7 | -1 099 | -4 641 | -25 067 |
| +23 | +18 | -782 | -4 696 | -41 032 |
| +25 | +30 | -350 | -4 112 | -51 040 |
| +27 | +43 | +207 | -2 721 | -50 373 |
| +29 | +57 | +899 | -341 | -33 263 |
| +31 | +72 | +1 736 | +3 224 | +7 192 |
| +33 | +88 | +2 728 | +8 184 | +79 112 |
| 13 090 | 62 832 | 51 477 360 | 456 432 592 | 46 929 569 232 |

| 35 | | | | |
|----------|----------|---------------------|-----------------------|----------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{5}{6}\psi_3$ | $\frac{35}{12}\psi_4$ | $\frac{7}{40}\psi_5$ |
| 0 | -102 | 0 | +23 256 | 0 |
| +1 | -101 | -152 | +22 496 | +3 800 |
| +2 | -98 | -299 | +20 251 | +7 250 |
| +3 | -93 | -436 | +16 626 | +10 021 |
| +4 | -86 | -558 | +11 796 | +11 826 |
| +5 | -77 | -660 | +6 006 | +12 441 |
| +6 | -66 | -737 | -429 | +11 726 |
| +7 | -53 | -784 | -7 124 | +9 646 |
| +8 | -38 | -796 | -13 624 | +6 292 |
| +9 | -21 | -768 | -19 404 | +1 902 |
| +10 | -2 | -695 | -23 869 | -3 118 |
| +11 | +19 | -572 | -26 354 | -8 173 |
| +12 | +42 | -394 | -26 124 | -12 458 |
| +13 | +67 | -156 | -22 374 | -14 937 |
| +14 | +94 | +147 | -14 229 | -14 322 |
| +15 | +123 | +520 | -744 | -9 052 |
| +16 | +154 | +968 | +19 096 | +2 728 |
| +17 | +187 | +1 496 | +46 376 | +23 188 |
| 3 570 | 290 598 | 15 775 320 | 14 834 059 240 | 4 045 652 520 |

| 36 | | | | |
|-----------|-----------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | $3\psi_2$ | $\frac{10}{3}\psi_3$ | $\frac{7}{24}\psi_4$ | $\frac{21}{20}\psi_5$ |
| +1 | -323 | -323 | +2 584 | +12 920 |
| +3 | -317 | -959 | +2 424 | +37 640 |
| +5 | -305 | -1 565 | +2 111 | +59 063 |
| +7 | -287 | -2 121 | +1 659 | +75 201 |
| +9 | -263 | -2 607 | +1 089 | +84 381 |
| +11 | -233 | -3 003 | +429 | +85 371 |
| +13 | -197 | -3 289 | -286 | +77 506 |
| +15 | -155 | -3 445 | -1 014 | +60 814 |
| +17 | -107 | -3 451 | -1 706 | +36 142 |
| +19 | -53 | -3 287 | -2 306 | +5 282 |
| +21 | +7 | -2 933 | -2 751 | -28 903 |
| +23 | +73 | -2 369 | -2 971 | -62 353 |
| +25 | +145 | -1 575 | -2 889 | -89 685 |
| +27 | +223 | -531 | -2 421 | -104 067 |
| +29 | +307 | +783 | -1 476 | -97 092 |
| +31 | +397 | +2 387 | +44 | -58 652 |
| +33 | +493 | +4 301 | +2 244 | +23 188 |
| +35 | +595 | +6 545 | +5 236 | +162 316 |
| 15 540 | 3 011 652 | 307 618 740 | 191 407 216 | 199 046 103 984 |

Продолжение табл. XXVI

| 37 | | | | |
|----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{1}{6} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{40} \psi_5$ |
| 0 | -114 | 0 | +5 814 | 0 |
| +1 | -113 | -34 | +5 644 | +680 |
| +2 | -110 | -67 | +5 141 | +1 304 |
| +3 | -105 | -98 | +4 326 | +1 819 |
| +4 | -98 | -126 | +3 234 | +2 178 |
| +5 | -89 | -150 | +1 914 | +2 343 |
| +6 | -78 | -169 | +429 | +2 288 |
| +7 | -65 | -182 | -1 144 | +2 002 |
| +8 | -50 | -188 | -2 714 | +1 492 |
| +9 | -33 | -186 | -4 176 | +786 |
| +10 | -14 | -175 | -5 411 | -64 |
| +11 | +7 | -154 | -6 286 | -975 |
| +12 | +30 | -122 | -6 654 | -1 850 |
| +13 | +55 | -78 | -6 354 | -2 535 |
| +14 | +82 | -21 | -5 211 | -2 856 |
| +15 | +111 | +50 | -3 036 | -2 596 |
| +16 | +142 | +136 | +374 | -1 496 |
| +17 | +175 | +238 | +5 236 | +748 |
| +18 | +210 | +357 | +11 781 | +4 488 |
| 4 218 | 383 838 | 932 178 | 980 961 982 | 152 877 192 |

| 38 | | | | |
|-----------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | $\frac{1}{2} \psi_2$ | $\frac{1}{3} \psi_3$ | $\frac{1}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{10} \psi_5$ |
| +1 | -60 | -36 | +918 | +1 530 |
| +3 | -59 | -107 | +867 | +4 471 |
| +5 | -57 | -175 | +767 | +7 061 |
| +7 | -54 | -238 | +622 | +9 086 |
| +9 | -50 | -294 | +438 | +10 362 |
| +11 | -45 | -341 | +223 | +10 747 |
| +13 | -39 | -377 | -13 | +10 153 |
| +15 | -32 | -400 | -258 | +8 558 |
| +17 | -24 | -408 | -498 | +6 018 |
| +19 | -15 | -399 | -717 | +2 679 |
| +21 | -5 | -371 | -897 | -1 211 |
| +23 | +6 | -322 | -1 018 | -5 290 |
| +25 | +18 | -250 | -1 058 | -9 070 |
| +27 | +31 | -153 | -993 | -11 925 |
| +29 | +45 | -29 | -797 | -13 079 |
| +31 | +60 | +124 | -442 | -11 594 |
| +33 | +76 | +308 | +102 | -6 358 |
| +35 | +93 | +525 | +867 | +3 927 |
| +37 | +111 | +777 | +1 887 | +20 757 |
| 18 278 | 109 668 | 4 496 388 | 25 479 532 | 3 286 859 628 |

| 39 | | | | |
|----------|-----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ψ_1 | $3\psi_2$ | $\frac{5}{6} \psi_3$ | $\frac{1}{12} \psi_4$ | $\frac{3}{20} \psi_5$ |
| 0 | -380 | 0 | +1 026 | 0 |
| +1 | -377 | -189 | +999 | +5 049 |
| +2 | -368 | -373 | +919 | +9 724 |
| +3 | -353 | -547 | +789 | +13 669 |
| +4 | -332 | -706 | +614 | +16 564 |
| +5 | -305 | -845 | +401 | +18 143 |
| +6 | -272 | -959 | +159 | +18 212 |
| +7 | -233 | -1 043 | -101 | +16 667 |
| +8 | -188 | -1 092 | -366 | +13 512 |
| +9 | -137 | -1 101 | -621 | +8 877 |
| +10 | -80 | -1 065 | -849 | +3 036 |
| +11 | -17 | -979 | -1 031 | -3 575 |
| +12 | +52 | -838 | -1 146 | -10 340 |
| +13 | +127 | -637 | -1 171 | -16 445 |
| +14 | +208 | -371 | -1 081 | -20 860 |
| +15 | +295 | -35 | -849 | -22 321 |
| +16 | +388 | +376 | -446 | -19 312 |
| +17 | +487 | +867 | +159 | -10 047 |
| +18 | +592 | +1 443 | +999 | +7 548 |
| +19 | +703 | +2 109 | +2 109 | +35 853 |
| 4 940 | 4 496 388 | 33 722 910 | 32 224 114 | 9 860 578 844 |

| 40 | | | | |
|-----------|----------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| $2\psi_1$ | ψ_2 | $\frac{10}{3} \psi_3$ | $\frac{35}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{30} \psi_5$ |
| +1 | -133 | -399 | +39 501 | +627 |
| +3 | -131 | -1 187 | +37 521 | +1 837 |
| +5 | -127 | -1 945 | +33 631 | +2 917 |
| +7 | -121 | -2 653 | +27 971 | +3 787 |
| +9 | -113 | -3 291 | +20 751 | +4 377 |
| +11 | -103 | -3 839 | +12 821 | +4 631 |
| +13 | -91 | -4 277 | +2 821 | +4 511 |
| +15 | -77 | -4 585 | -7 119 | +4 001 |
| +17 | -61 | -4 743 | -17 079 | +3 111 |
| +19 | -43 | -4 731 | -26 499 | +1 881 |
| +21 | -23 | -4 529 | -34 749 | +385 |
| +23 | -1 | -4 117 | -41 129 | -1 265 |
| +25 | +23 | -3 475 | -44 869 | -2 915 |
| +27 | +49 | -2 583 | -45 129 | -4 365 |
| +29 | +77 | -1 421 | -40 999 | -5 365 |
| +31 | +107 | +31 | -31 499 | -5 611 |
| +33 | +139 | +1 793 | -15 579 | -4 747 |
| +35 | +173 | +3 885 | +7 881 | -2 331 |
| +37 | +209 | +6 327 | +40 071 | +2 109 |
| +39 | +247 | +9 139 | +82 251 | +9 139 |
| 21 320 | 567 112 | 644 482 280 | 49 625 135 560 | 644 482 280 |

Продолжение табл. XXVII

| 41 | | | | |
|----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ψ_1 | Ψ_2 | $\frac{5}{6} \Psi_3$ | $\frac{7}{12} \Psi_4$ | $\frac{7}{60} \Psi_5$ |
| 0 | -140 | 0 | +8 778 | 0 |
| +1 | -139 | -209 | +8 569 | +4 807 |
| +2 | -136 | -413 | +7 949 | +9 292 |
| +3 | -131 | -697 | +6 939 | +13 147 |
| +4 | -124 | -786 | +5 574 | +16 092 |
| +5 | -115 | -945 | +3 903 | +17 889 |
| +6 | -104 | -1 079 | +1 989 | +18 356 |
| +7 | -91 | -1 183 | -91 | +17 381 |
| +8 | -76 | -1 252 | -2 246 | +14 936 |
| +9 | -59 | -1 281 | -4 371 | +11 091 |
| +10 | -40 | -1 265 | -6 347 | +6 028 |
| +11 | -19 | -1 199 | -8 041 | +55 |
| +12 | +4 | -1 078 | -9 306 | -6 380 |
| +13 | +29 | -897 | -9 981 | -12 675 |
| +14 | +56 | -651 | -9 891 | -18 060 |
| +15 | +85 | -335 | -8 847 | -21 583 |
| +16 | +116 | +56 | -6 646 | -22 096 |
| +17 | +149 | +527 | -3 071 | -18 241 |
| +18 | +184 | +1 083 | -2 109 | -8 436 |
| +19 | +221 | +1 729 | +9 139 | +9 139 |
| +20 | +260 | +2 470 | +18 278 | +36 556 |
| 5 740 | 641 732 | 47 900 710 | 2 481 256 778 | 10376 164 708 |

| 42 | | | | |
|-----------|----------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|
| $2\Psi_1$ | $\frac{3}{2} \Psi_2$ | $\frac{1}{3} \Psi_3$ | $\frac{7}{12} \Psi_4$ | $\frac{21}{10} \Psi_5$ |
| +1 | -220 | -44 | +9 614 | +48 070 |
| +3 | -217 | -131 | +9 177 | +141 151 |
| +5 | -211 | -215 | +8 317 | +225 181 |
| +7 | -202 | -294 | +7 062 | +294 546 |
| +9 | -190 | -368 | +5 454 | +344 262 |
| +11 | -175 | -429 | +3 549 | +370 227 |
| +13 | -157 | -481 | +1 417 | +369 473 |
| +15 | -136 | -520 | -858 | +340 418 |
| +17 | -112 | -544 | -3 178 | +283 118 |
| +19 | -85 | -551 | -5 431 | +199 519 |
| +21 | -55 | -539 | -7 491 | +93 709 |
| +23 | -22 | -506 | -9 218 | -27 830 |
| +25 | +14 | -450 | -10 458 | -155 970 |
| +27 | +53 | -369 | -11 043 | -278 685 |
| +29 | +95 | -261 | -10 791 | -383 790 |
| +31 | +140 | -124 | -9 506 | -443 734 |
| +33 | +188 | +44 | -6 978 | -445 258 |
| +35 | +239 | +245 | -2 983 | -359 233 |
| +37 | +293 | +481 | +2 717 | -155 363 |
| +39 | +350 | +754 | +10 374 | +201 058 |
| +41 | +410 | +1 066 | +20 254 | +749 398 |
| 24 682 | 1 629 012 | 9 075 924 | 3 084 805 724 | 4 389 117 671 484 |

| 43 | | | | |
|----------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ψ_1 | Ψ_2 | $\frac{1}{6} \Psi_3$ | $\frac{7}{12} \Psi_4$ | $\frac{7}{40} \Psi_5$ |
| 0 | -154 | 0 | +10 626 | 0 |
| +1 | -153 | -46 | +10 396 | +8 740 |
| +2 | -150 | -91 | +9 713 | +16 948 |
| +3 | -145 | -134 | +8 598 | +24 113 |
| +4 | -138 | -174 | +7 086 | +29 766 |
| +5 | -129 | -210 | +5 226 | +33 501 |
| +6 | -118 | -241 | +3 081 | +34 996 |
| +7 | -105 | -266 | +728 | +34 034 |
| +8 | -90 | -284 | -1 742 | +30 524 |
| +9 | -73 | -294 | -4 224 | +24 522 |
| +10 | -54 | -295 | -6 599 | +16 252 |
| +11 | -33 | -286 | -8 734 | +6 127 |
| +12 | -10 | -266 | -10 482 | -5 230 |
| +13 | +15 | -234 | -11 682 | -16 965 |
| +14 | +42 | -189 | -12 159 | -27 972 |
| +15 | +71 | -130 | -11 724 | -36 872 |
| +16 | +102 | -56 | -10 174 | -41 992 |
| +17 | +135 | +34 | -7 292 | -41 344 |
| +18 | +170 | +141 | -2 847 | -32 604 |
| +19 | +207 | +266 | +3 406 | -13 091 |
| +20 | +246 | +410 | +11 726 | +20 254 |
| +21 | +287 | +574 | +22 386 | +70 889 |
| 6 622 | 814 506 | 2 676 234 | 3 815 417 606 | 39 541 600 644 |

| 44 | | | | |
|-----------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2\Psi_1$ | Ψ_2 | $\frac{10}{3} \Psi_3$ | $\frac{7}{24} \Psi_4$ | $\frac{1}{20} \Psi_5$ |
| +1 | -161 | -483 | +5 796 | +1 380 |
| +3 | -159 | -1 439 | +5 556 | +4 060 |
| +5 | -155 | -2 365 | +5 083 | +6 503 |
| +7 | -149 | -3 241 | +4 391 | +8 561 |
| +9 | -141 | -4 047 | +3 501 | +10 101 |
| +11 | -131 | -4 763 | +2 441 | +11 011 |
| +13 | -119 | -5 369 | +1 246 | +11 206 |
| +15 | -105 | -5 845 | -42 | +10 634 |
| +17 | -89 | -6 171 | -1 374 | +9 282 |
| +19 | -71 | -6 327 | -2 694 | +7 182 |
| +21 | -51 | -6 293 | -3 939 | +4 417 |
| +23 | -29 | -6 049 | -5 039 | +1 127 |
| +25 | -5 | -5 575 | -5 917 | -2 485 |
| +27 | +21 | -4 851 | -6 489 | -6 147 |
| +29 | +49 | -3 857 | -6 664 | -9 512 |
| +31 | +79 | -2 573 | -6 344 | -12 152 |
| +33 | +111 | -979 | -5 244 | -13 552 |
| +35 | +145 | +945 | -3 792 | -13 104 |
| +37 | +181 | +3 219 | -1 329 | -10 101 |
| +39 | +219 | +5 863 | +2 091 | -3 731 |
| +41 | +259 | +8 897 | +6 601 | +6 929 |
| +43 | +301 | +12 341 | +12 341 | +22 919 |
| 28 380 | 913 836 | 1 257 829 980 | 1 173 974 648 | 4 162 273 752 |

Продолжение табл. XXVI

| 45 | | | | | 46 | | | | |
|----------|-----------|---------------------|----------------------|----------------------|-----------|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| ψ_1 | $3\psi_2$ | $\frac{5}{6}\psi_3$ | $\frac{5}{12}\psi_4$ | $\frac{3}{40}\psi_5$ | $2\psi_1$ | $\frac{1}{2}\psi_2$ | $\frac{5}{3}\psi_3$ | $\frac{1}{12}\psi_4$ | $\frac{1}{10}\psi_5$ |
| 0 | -506 | 0 | +9 108 | 0 | +1 | -88 | -264 | +1 980 | +3 300 |
| +1 | -503 | -252 | +8 928 | +4 500 | +3 | -87 | -787 | +1 905 | +9 725 |
| +2 | -494 | -499 | +8 393 | +8 750 | +5 | -85 | -1 295 | +1 757 | +15 631 |
| +3 | -479 | -736 | +7 518 | +12 509 | +7 | -82 | -1 778 | +1 540 | +20 692 |
| +4 | -458 | -958 | +6 328 | +15 554 | +9 | -78 | -2 226 | +1 260 | +24 612 |
| +5 | -431 | -1 160 | +4 858 | +17 689 | +11 | -73 | -2 629 | +925 | +27 137 |
| +6 | -398 | -1 337 | +3 153 | +18 754 | +13 | -67 | -2 977 | +545 | +28 067 |
| +7 | -359 | -1 484 | +1 268 | +18 634 | +15 | -60 | -3 260 | +132 | +27 268 |
| +8 | -314 | -1 596 | -732 | +17 268 | +17 | -52 | -3 468 | -300 | +24 684 |
| +9 | -263 | -1 668 | -2 772 | +14 658 | +19 | -43 | -3 591 | -735 | +20 349 |
| +10 | -206 | -1 695 | -4 767 | +10 878 | +21 | -33 | -3 619 | -1 155 | +14 399 |
| +11 | -143 | -1 672 | -6 622 | +6 083 | +23 | -22 | -3 542 | -1 540 | +7 084 |
| +12 | -74 | -1 594 | -8 232 | +518 | +25 | -10 | -3 350 | -1 868 | -1 220 |
| +13 | +1 | -1 456 | -9 482 | -5 473 | +27 | +3 | -3 033 | -2 115 | -9 999 |
| +14 | +82 | -1 253 | -10 247 | -11 438 | +29 | +17 | -2 581 | -2 255 | -18 589 |
| +15 | +169 | -980 | -10 392 | -16 808 | +31 | +32 | -1 984 | -2 260 | -26 164 |
| +16 | +262 | -632 | -9 772 | -20 888 | +33 | +48 | -1 232 | -2 100 | -31 724 |
| +17 | +361 | -204 | -8 232 | -22 848 | +35 | +65 | -315 | -1 743 | -34 083 |
| +18 | +466 | +309 | -5 607 | -21 714 | +37 | +83 | +777 | -1 155 | -31 857 |
| +19 | +577 | +912 | -1 722 | -16 359 | +39 | +102 | +2 054 | -300 | -23 452 |
| +20 | +694 | +1610 | +3 608 | -5 494 | +41 | +122 | +3 526 | +860 | -7 052 |
| +21 | +817 | +2408 | +10 578 | +12 341 | +43 | +143 | +5 203 | +2 365 | +19 393 |
| +22 | +946 | +3311 | +19 393 | +38 786 | +45 | +165 | +7 095 | +4 257 | +58 179 |
| 7590 | 9 203 634 | 92 036 340 | 2 934 936 620 | 12 006 558 900 | 32 430 | 285 384 | 429 502 920 | 143 167 640 | 27 214 866 840 |

| 47 | | | | | | 48 | | | | | |
|----------|-----------|----------------------|-----------------------|-----------------------|--|-----------|------------|----------------------|-----------------------|------------------------|--|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{1}{6} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{1}{20} \psi_5$ | | $2\psi_1$ | $3\psi_2$ | $\frac{2}{3} \psi_3$ | $\frac{7}{12} \psi_4$ | $\frac{21}{10} \psi_5$ | |
| 0 | -184 | 0 | +15 180 | 0 | | +1 | -575 | -115 | +16 445 | +82 225 | |
| +1 | -183 | -55 | +14 905 | +3 575 | | +3 | -569 | -343 | +15 873 | +242 671 | |
| +2 | -180 | -109 | +14 087 | +6 968 | | +5 | -557 | -565 | +14 743 | +391 231 | |
| +3 | -175 | -161 | +12 747 | +10 003 | | +7 | -539 | -777 | +13 083 | +520 401 | |
| +4 | -168 | -210 | +10 920 | +12 516 | | +9 | -515 | -975 | +10 935 | +623 307 | |
| +5 | -159 | -255 | +8 655 | +14 361 | | +11 | -485 | -1 155 | +8 355 | +693 957 | |
| +6 | -148 | -295 | +6 015 | +15 416 | | +13 | -449 | -1 313 | +5 413 | +727 493 | |
| +7 | -135 | -329 | +3 077 | +15 589 | | +15 | -407 | -1 445 | +2 193 | +720 443 | |
| +8 | -120 | -356 | -68 | +14 824 | | +17 | -359 | -1 547 | -1 207 | +670 973 | |
| +9 | -103 | -375 | -3 315 | +13 107 | | +19 | -305 | -1 615 | -4 675 | +579 139 | |
| +10 | -84 | -385 | -6 545 | +10 472 | | +21 | -245 | -1 645 | -8 085 | +447 139 | |
| +11 | -63 | -385 | -9 625 | +7 007 | | +23 | -179 | -1 633 | -11 297 | +279 565 | |
| +12 | -40 | -374 | -12 408 | +2 860 | | +25 | -107 | -1 575 | -14 157 | +83 655 | |
| +13 | -15 | -351 | -14 733 | -1 755 | | +27 | -29 | -1 467 | -16 497 | -130 455 | |
| +14 | +12 | -315 | -16 425 | -6 552 | | +29 | +55 | -1 305 | -18 135 | -349 479 | |
| +15 | +41 | -265 | -17 295 | -11 167 | | +31 | +145 | -1 085 | -18 875 | -556 729 | |
| +16 | +72 | -200 | -17 140 | -15 152 | | +33 | +241 | -803 | -18 507 | -731 863 | |
| +17 | +105 | -119 | -15 743 | -17 969 | | +35 | +343 | -455 | -16 807 | -850 633 | |
| +18 | +140 | -21 | -12 873 | -18 984 | | +37 | +451 | -37 | -13 537 | -884 633 | |
| +19 | +177 | +95 | -8 285 | -17 461 | | +39 | +565 | +455 | -8 445 | -801 047 | |
| +20 | +216 | +230 | -1 720 | -12 556 | | +41 | +685 | +1 025 | -1 265 | -562 397 | |
| +21 | +257 | +385 | +7 095 | -3 311 | | +43 | +811 | +1 677 | +8 283 | -126 291 | |
| +22 | +300 | +561 | +18 447 | +11 352 | | +45 | +943 | +2 415 | +20 493 | +554 829 | |
| +23 | +345 | +759 | +32 637 | +32 637 | | +47 | +1081 | +3 243 | +35 673 | +1 533 939 | |
| 8648 | 1 271 256 | 4 994 220 | 8 518 474 580 | 8 629 104 120 | | 36 848 | 12 712 560 | 92 620 080 | 10 301 411 120 | 19 208 385 771 120 | |

Продолжение табл. XXVI

| 50 | | | | |
|-----------|---------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|
| $2\psi_1$ | $\frac{1}{2}\psi_2$ | $\frac{5}{3}\psi_3$ | $\frac{35}{12}\psi_4$ | $\frac{7}{30}\psi_5$ |
| +1 | -104 | -312 | +96 876 | +10 764 |
| +3 | -103 | -931 | +93 771 | +31 809 |
| +5 | -101 | -1 535 | +87 631 | +51 419 |
| +7 | -98 | -2 114 | +78 596 | +68 684 |
| +9 | -94 | -2 658 | +66 876 | +82 764 |
| +11 | -89 | -3 157 | +52 751 | +92 917 |
| +13 | -83 | -3 601 | +36 571 | +98 527 |
| +15 | -76 | -3 980 | +18 756 | +99 132 |
| +17 | -68 | -4 284 | -204 | +94 452 |
| +19 | -59 | -4 503 | -19 749 | +84 417 |
| +21 | -49 | -4 627 | -39 249 | +69 195 |
| +23 | -38 | -4 646 | -58 004 | +49 220 |
| +25 | -26 | -4 550 | -75 244 | +25 220 |
| +27 | -13 | -4 329 | -90 129 | -1 755 |
| +29 | +1 | -3 973 | -101 749 | -30 305 |
| +31 | +16 | -3 472 | -109 124 | -58 652 |
| +33 | +32 | -2 816 | -111 204 | -84 612 |
| +35 | +49 | -1 995 | -105 869 | -105 567 |
| +37 | +67 | -999 | -94 929 | -118 437 |
| +39 | +86 | +182 | -74 124 | -119 652 |
| +41 | +106 | +1 558 | -43 124 | -105 124 |
| +43 | +127 | +3 139 | -529 | -70 219 |
| +45 | +149 | +4 935 | +55 131 | -9 729 |
| +47 | +172 | +6 956 | +125 396 | +82 156 |
| +49 | +196 | +9 212 | +211 876 | +211 876 |
| 41 650 | 433 160 | 770 715 400 | 372 255 538 200 | 372 255 538 200 |

| 49 | | | | |
|----------|-----------|---------------------|----------------------|----------------------|
| ψ_1 | ψ_2 | $\frac{5}{6}\psi_3$ | $\frac{7}{12}\psi_4$ | $\frac{7}{60}\psi_5$ |
| 0 | -200 | 0 | +17 940 | 0 |
| +1 | -199 | -299 | +17 641 | +9 867 |
| +2 | -196 | -593 | +16 751 | +19 272 |
| +3 | -191 | -877 | +15 291 | +27 767 |
| +4 | -184 | -1 146 | +13 296 | +34 932 |
| +5 | -175 | -1 395 | +10 815 | +40 389 |
| +6 | -164 | -1 619 | +7 911 | +43 816 |
| +7 | -151 | -1 813 | +4 661 | +44 961 |
| +8 | -136 | -1 972 | +1 156 | +43 656 |
| +9 | -119 | -2 091 | -2 499 | +39 831 |
| +10 | -100 | -2 165 | -6 185 | +33 528 |
| +11 | -79 | -2 189 | -9 769 | +24 915 |
| +12 | -56 | -2 158 | -13 104 | +14 300 |
| +13 | -31 | -2 067 | -16 029 | +2 145 |
| +14 | -4 | -1 911 | -18 369 | -10 920 |
| +15 | +25 | -1 685 | -19 935 | -24 083 |
| +16 | +56 | -1 384 | -20 524 | -36 336 |
| +17 | +89 | -1 003 | -19 919 | -46 461 |
| +18 | +124 | -537 | -17 889 | -53 016 |
| +19 | +161 | +19 | -14 189 | -54 321 |
| +20 | +200 | +670 | -8 560 | -48 444 |
| +21 | +241 | +1 421 | -729 | -33 187 |
| +22 | +284 | +2 277 | +9 591 | -6 072 |
| +23 | +329 | +3 243 | +22 701 | +35 673 |
| +24 | +376 | +4 324 | +38 916 | +95 128 |
| 9800 | 1 566 040 | 167 230 700 | 12 408 517 940 | 74 451 107 640 |

Таблица XXVII
Суммы степеней отклонений от среднего значения и определители распределения
ряда натуральных чисел

| n | Σx^2 | Σx^4 | Σx^6 | Σx^8 | D_2 | D_3 | D_4 |
|-----|--------------|--------------|------------------|-----------------------|-----------|---------------|---------------------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0,5 | 0,125 | 0,03125 | 0,0078125 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 4 | 5 | 10,250 | 22,81250 | 51,2656250 | 16 | 9 | 0 |
| 5 | 10 | 34 | 130 | 514 | 70 | 144 | 576 |
| 6 | 17,5 | 88,375 | 511,09375 | 3 103,0234375 | 224 | 1 134 | 18 432 |
| 7 | 28 | 196 | 1 588 | 13 635 | 588 | 6 048 | 266 112 |
| 8 | 42 | 388,500 | 4 187,62500 | 48 140,5312500 | 1 344 | 24 948 | 2 433 024 |
| 9 | 60 | 708 | 9 780 | 144 708 | 2 772 | 85 536 | 16 308 864 |
| 10 | 82,5 | 1 208,625 | 20 795,15625 | 384 443,0390625 | 5 280 | 254 826 | 86 980 608 |
| 11 | 110 | 1 958 | 41 030 | 925 958 | 9 438 | 679 536 | 388 694 592 |
| 12 | 143 | 3 038,750 | 76 156,43750 | 2 059 121,7968750 | 16 016 | 1 656 369 | 1 507 663 872 |
| 13 | 182 | 4 550 | 134 342 | 4 285 190 | 26 026 | 3 747 744 | 5 206 151 808 |
| 14 | 227,5 | 6 608,875 | 226 994,21875 | 8 432 018,0546875 | 40 768 | 7 963 956 | 16 310 181 888 |
| 15 | 280 | 9 352 | 369 640 | 15 814 792 | 61 880 | 16 039 296 | 47 037 399 552 |
| 16 | 340 | 12 937 | 582 951,25000 | 28 454 601,0625000 | 91 392 | 30 837 456 | 126 310 219 776 |
| 17 | 408 | 17 544 | 893 928 | 49 369 224 | 131 784 | 56 930 688 | 318 735 945 216 |
| 18 | 484,5 | 23 377,125 | 1 337 250,28125 | 82 952 705,0703125 | 186 048 | 101 407 788 | 761 504 882 688 |
| 19 | 570 | 30 666 | 1 956 810 | 135 462 666 | 257 754 | 174 978 144 | 1 733 216 842 368 |
| 20 | 665 | 39 667,250 | 2 807 434,06250 | 215 636 792,3281250 | 351 120 | 293 452 929 | 3 777 661 476 864 |
| 21 | 770 | 50 666 | 3 956 810 | 335 462 666 | 471 086 | 479 700 144 | 7 919 316 377 280 |
| 22 | 885,5 | 63 977,375 | 5 487 625,34375 | 511 127 881,0859375 | 623 392 | 766 187 730 | 16 027 771 668 480 |
| 23 | 1 012 | 79 948 | 7 499 932 | 764 180 428 | 814 660 | 1 198 248 480 | 31 418 075 145 600 |
| 24 | 1 150 | 98 957,500 | 10 113 746,37500 | 1 122 932 453,5937500 | 1 052 480 | 1 838 292 100 | 59 816 564 121 600 |
| 25 | 1 300 | 121 420 | 13 471 900 | 1 624 143 820 | 1 345 500 | 2 770 653 600 | 110 881 557 072 000 |

Т а б л и ц а XXVIII

Множители M (нуль целых опущен)

| n | $M_1^{(1)}$ | $M_2^{(1)}$ | $M_1^{(2)}$ | $M_2^{(2)}$ | $M_3^{(2)}$ | $M_1^{(3)}$ | $M_2^{(3)}$ | $M_3^{(3)}$ |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 5 | 2000000 | 1000000 | 4857143 | 1428571 | 0714286 | 9027778 | 2361111 | 0694444 |
| 6 | 1666667 | 0571429 | 3945313 | 0781250 | 0267857 | 4507000 | 0779391 | 0154321 |
| 7 | 1428571 | 0357143 | 3333333 | 0476190 | 0119048 | 2625661 | 0324074 | 0046296 |
| 8 | 1250000 | 0238095 | 2890625 | 0312500 | 0059524 | 1678541 | 0155724 | 0016835 |
| 9 | 1111111 | 0166667 | 2554113 | 0216450 | 0032468 | 1143378 | 0082772 | 0007015 |
| 10 | 1000000 | 0121212 | 2291233 | 0156398 | 0018957 | 0816053 | 0047429 | 0003238 |
| 11 | 0909091 | 0090909 | 2074593 | 0116550 | 0011655 | 0603794 | 0028814 | 0001619 |
| 12 | 0833333 | 0069930 | 1897321 | 0089986 | 0007493 | 0459779 | 0018346 | 0000863 |
| 13 | 0769231 | 0054945 | 1748252 | 0069930 | 0004995 | 0358461 | 0012141 | 0000486 |
| 14 | 0714286 | 0043956 | 1621094 | 0055804 | 0003434 | 0285027 | 0008298 | 0000286 |
| 15 | 0666667 | 0035714 | 1511312 | 0045249 | 0002424 | 0230459 | 0005831 | 0000175 |
| 16 | 0625000 | 0029412 | 1415551 | 0037202 | 0001751 | 0189040 | 0004195 | 0000110 |
| 17 | 0588235 | 0024510 | 1331269 | 0030960 | 0001290 | 0157020 | 0003082 | 0000072 |
| 18 | 0555556 | 0020640 | 1256510 | 0026042 | 0000967 | 0131869 | 0002305 | 0000048 |
| 19 | 0526316 | 0017544 | 1189739 | 0022114 | 0000737 | 0111832 | 0001753 | 0000033 |
| 20 | 0500000 | 0015038 | 1129735 | 0018939 | 0000570 | 0095669 | 0001352 | 0000023 |
| 21 | 0476190 | 0012987 | 1075515 | 0016345 | 0000446 | 0082485 | 0001056 | 0000016 |
| 22 | 0454545 | 0011293 | 1026278 | 0014197 | 0000353 | 0071622 | 0000835 | 0000011 |
| 23 | 0434783 | 0009881 | 0981366 | 0012422 | 0000282 | 0062591 | 0000667 | 0000008 |
| 24 | 0416667 | 0008696 | 0940232 | 0010927 | 0000228 | 0055019 | 0000538 | 0000006 |
| 25 | 0400000 | 0007692 | 0902415 | 0009662 | 0000186 | 0048624 | 0000438 | 0000005 |

Таблица XXIX

Суммы степеней натуральных чисел

| n | $S(n)$ | $S(n^2)$ | $S(n^3)$ | $S(n^4)$ | $S(n^5)$ | $S(n^6)$ | $S(n^7)$ | n |
|-----|--------|----------|-----------|------------|---------------|-----------------|-------------------|-----|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 5 | 9 | 17 | 33 | 65 | 129 | 2 |
| 3 | 6 | 14 | 36 | 98 | 276 | 794 | 2 316 | 3 |
| 4 | 10 | 30 | 100 | 354 | 1 300 | 4 890 | 18 700 | 4 |
| 5 | 15 | 55 | 225 | 979 | 4 425 | 20 515 | 96 825 | 5 |
| 6 | 21 | 91 | 441 | 2 275 | 12 201 | 67 171 | 376 761 | 6 |
| 7 | 28 | 140 | 784 | 4 676 | 29 008 | 184 820 | 1 200 304 | 7 |
| 8 | 36 | 204 | 1 296 | 8 772 | 61 776 | 446 964 | 3 297 456 | 8 |
| 9 | 45 | 285 | 2 025 | 15 333 | 120 825 | 978 405 | 8 080 425 | 9 |
| 10 | 55 | 385 | 3 025 | 25 333 | 220 825 | 1 978 405 | 18 080 425 | 10 |
| 11 | 66 | 506 | 4 356 | 39 974 | 381 876 | 3 749 966 | 37 567 596 | 11 |
| 12 | 78 | 650 | 6 084 | 60 710 | 630 708 | 6 735 950 | 73 399 404 | 12 |
| 13 | 91 | 819 | 8 281 | 89 271 | 1 002 001 | 11 562 759 | 136 147 921 | 13 |
| 14 | 105 | 1 015 | 11 025 | 127 687 | 1 539 825 | 19 092 295 | 241 561 425 | 14 |
| 15 | 120 | 1 240 | 14 400 | 178 312 | 2 299 200 | 30 482 920 | 412 420 800 | 15 |
| 16 | 136 | 1 496 | 18 496 | 243 848 | 3 347 776 | 47 260 136 | 680 856 256 | 16 |
| 17 | 153 | 1 785 | 23 409 | 327 369 | 4 767 633 | 71 397 705 | 1 091 194 929 | 17 |
| 18 | 171 | 2 109 | 29 241 | 432 345 | 6 657 201 | 105 409 929 | 1 703 414 961 | 18 |
| 19 | 190 | 2 470 | 36 100 | 562 666 | 9 133 300 | 152 455 810 | 2 597 286 700 | 19 |
| 20 | 210 | 2 870 | 44 100 | 722 666 | 12 333 300 | 216 455 810 | 3 877 286 700 | 20 |
| 21 | 231 | 3 311 | 53 361 | 917 147 | 16 417 401 | 302 221 931 | 5 678 375 241 | 21 |
| 22 | 253 | 3 795 | 64 009 | 1 151 403 | 21 571 033 | 415 601 835 | 8 172 733 123 | 22 |
| 23 | 276 | 4 324 | 76 176 | 1 431 244 | 28 007 376 | 563 637 724 | 11 577 558 576 | 23 |
| 24 | 300 | 4 900 | 90 000 | 1 763 020 | 35 970 000 | 754 740 700 | 16 164 030 000 | 24 |
| 25 | 325 | 5 525 | 105 625 | 2 153 645 | 45 735 625 | 998 881 325 | 22 267 545 625 | 25 |
| 26 | 351 | 6 201 | 123 201 | 2 610 621 | 57 617 001 | 1 307 797 101 | 30 299 355 801 | 26 |
| 27 | 378 | 6 930 | 142 884 | 3 142 062 | 71 965 908 | 1 695 217 590 | 40 759 709 004 | 27 |
| 28 | 406 | 7 714 | 164 836 | 3 756 718 | 89 176 276 | 2 177 107 894 | 54 252 637 516 | 28 |
| 29 | 435 | 8 555 | 189 225 | 4 463 999 | 109 687 425 | 2 771 931 215 | 71 502 513 825 | 29 |
| 30 | 465 | 9 455 | 216 225 | 5 273 999 | 133 987 425 | 3 500 931 215 | 93 372 513 825 | 30 |
| 31 | 496 | 10 416 | 246 016 | 6 197 520 | 162 616 576 | 4 388 434 896 | 120 885 127 936 | 31 |
| 32 | 528 | 11 440 | 278 784 | 7 246 096 | 196 171 008 | 5 462 176 720 | 155 244 866 304 | 32 |
| 33 | 561 | 12 529 | 314 721 | 8 432 017 | 235 306 401 | 6 753 644 889 | 197 863 309 281 | 33 |
| 34 | 595 | 13 685 | 354 025 | 9 768 353 | 280 741 825 | 8 298 449 105 | 250 386 659 425 | 34 |
| 35 | 630 | 14 910 | 396 900 | 11 268 978 | 333 263 700 | 10 136 714 730 | 314 725 956 300 | 35 |
| 36 | 666 | 16 206 | 443 556 | 12 948 594 | 393 729 876 | 12 313 497 066 | 393 090 120 396 | 36 |
| 37 | 703 | 17 575 | 494 209 | 14 822 755 | 463 073 833 | 14 879 223 475 | 488 021 997 529 | 37 |
| 38 | 741 | 19 019 | 549 081 | 16 907 891 | 542 309 001 | 17 890 159 859 | 602 437 580 121 | 38 |
| 39 | 780 | 20 540 | 608 400 | 19 221 332 | 632 533 200 | 21 408 903 620 | 739 668 586 800 | 39 |
| 40 | 820 | 22 140 | 672 400 | 21 781 332 | 734 933 200 | 25 504 903 620 | 903 508 586 800 | 40 |
| 41 | 861 | 23 821 | 741 321 | 24 607 093 | 850 789 401 | 30 255 007 861 | 1 098 262 860 681 | 41 |
| 42 | 903 | 25 585 | 815 409 | 27 718 789 | 981 480 633 | 35 744 039 605 | 1 328 802 193 929 | 42 |
| 43 | 946 | 27 434 | 894 916 | 31 137 590 | 1 128 489 076 | 42 065 402 654 | 1 600 620 805 036 | 43 |
| 44 | 990 | 29 370 | 980 100 | 34 885 686 | 1 293 405 300 | 49 321 716 510 | 1 919 898 614 700 | 44 |
| 45 | 1035 | 31 395 | 1 071 225 | 38 986 311 | 1 477 933 425 | 57 625 482 135 | 2 293 568 067 825 | 45 |
| 46 | 1081 | 33 511 | 1 168 561 | 43 463 767 | 1 683 896 401 | 67 099 779 031 | 2 729 385 725 041 | 46 |
| 47 | 1128 | 35 720 | 1 272 384 | 48 343 448 | 1 913 241 408 | 77 878 994 360 | 3 236 008 845 504 | 47 |
| 48 | 1176 | 38 024 | 1 382 976 | 53 651 864 | 2 168 045 376 | 90 109 584 824 | 3 823 077 187 776 | 48 |
| 49 | 1225 | 40 425 | 1 500 625 | 59 416 665 | 2 450 520 625 | 103 950 872 025 | 4 501 300 260 625 | 49 |
| 50 | 1275 | 42 925 | 1 625 625 | 65 666 665 | 2 763 020 625 | 119 575 872 025 | 5 282 550 260 625 | 50 |

Продолжение табл. XXIX

| n | $S(n)$ | $S(n^2)$ | $S(n^3)$ | $S(n^4)$ | $S(n^5)$ | $S(n^6)$ | $S(n^7)$ | n |
|-----|--------|----------|------------|---------------|-----------------|--------------------|-----------------------|-----|
| 51 | 1326 | 45 526 | 1 758 276 | 72 431 866 | 3 108 045 876 | 137 172 159 826 | 6 179 960 938 476 | 51 |
| 52 | 1378 | 48 230 | 1 898 884 | 79 743 482 | 3 488 249 908 | 156 942 769 490 | 7 208 032 641 004 | 52 |
| 53 | 1431 | 51 039 | 2 047 761 | 87 633 963 | 3 906 445 401 | 179 107 130 619 | 8 382 743 780 841 | 53 |
| 54 | 1485 | 53 955 | 2 205 225 | 96 137 019 | 4 365 610 425 | 203 902 041 915 | 9 721 668 990 825 | 54 |
| 55 | 1540 | 56 980 | 2 371 600 | 105 287 644 | 4 868 894 800 | 231 582 682 540 | 11 244 104 225 200 | 55 |
| 56 | 1596 | 60 116 | 2 547 216 | 115 122 140 | 5 419 626 576 | 262 423 661 996 | 12 971 199 074 736 | 56 |
| 57 | 1653 | 63 365 | 2 732 409 | 125 678 141 | 6 021 318 633 | 296 720 109 245 | 14 926 096 567 929 | 57 |
| 58 | 1711 | 66 729 | 2 927 521 | 136 994 637 | 6 677 675 401 | 334 788 801 789 | 17 134 080 735 481 | 58 |
| 59 | 1770 | 70 210 | 3 132 900 | 149 111 998 | 7 392 599 700 | 376 969 335 430 | 19 622 732 220 300 | 59 |
| 60 | 1830 | 73 810 | 3 348 900 | 162 071 998 | 8 170 199 700 | 423 625 335 430 | 22 422 092 220 300 | 60 |
| 61 | 1891 | 77 531 | 3 575 881 | 175 917 839 | 9 014 796 001 | 475 145 709 791 | 25 564 835 056 321 | 61 |
| 62 | 1953 | 81 375 | 3 814 209 | 190 694 175 | 9 930 928 833 | 531 945 945 375 | 29 086 449 662 529 | 62 |
| 63 | 2016 | 85 344 | 4 064 256 | 206 447 136 | 10 923 365 376 | 594 469 447 584 | 33 025 430 301 696 | 63 |
| 64 | 2080 | 89 440 | 4 326 400 | 223 224 352 | 11 997 107 200 | 663 188 924 320 | 37 423 476 812 800 | 64 |
| 65 | 2145 | 93 665 | 4 601 025 | 241 074 977 | 13 157 397 825 | 738 607 814 945 | 42 325 704 703 425 | 65 |
| 66 | 2211 | 98 021 | 4 888 521 | 260 049 713 | 14 409 730 401 | 821 261 764 961 | 47 780 865 404 481 | 66 |
| 67 | 2278 | 102 510 | 5 189 284 | 280 200 834 | 15 759 855 508 | 914 720 147 130 | 53 841 577 009 804 | 67 |
| 68 | 2346 | 107 134 | 5 503 716 | 301 582 210 | 17 213 789 076 | 1 010 587 629 754 | 60 564 565 828 236 | 68 |
| 69 | 2415 | 111 895 | 5 832 225 | 324 449 331 | 18 777 820 425 | 1 118 505 792 835 | 68 010 919 080 825 | 69 |
| 70 | 2485 | 116 795 | 6 175 225 | 348 259 331 | 20 458 520 425 | 1 236 154 792 835 | 76 246 349 080 825 | 70 |
| 71 | 2556 | 121 836 | 6 533 136 | 373 671 012 | 22 262 749 776 | 1 364 255 676 756 | 85 341 469 239 216 | 71 |
| 72 | 2628 | 127 020 | 6 906 384 | 400 544 868 | 24 197 667 408 | 1 503 569 146 260 | 95 372 082 243 504 | 72 |
| 73 | 2701 | 132 349 | 7 295 401 | 428 943 109 | 26 270 739 001 | 1 654 903 372 549 | 106 419 080 762 601 | 73 |
| 74 | 2775 | 137 825 | 7 700 625 | 458 929 685 | 28 489 745 625 | 1 819 109 862 725 | 118 570 761 035 625 | 74 |
| 75 | 2850 | 143 450 | 8 122 500 | 490 570 310 | 30 862 792 500 | 1 997 088 378 350 | 131 919 149 707 500 | 75 |
| 76 | 2926 | 149 226 | 8 561 476 | 523 932 486 | 33 398 317 876 | 2 189 788 306 926 | 146 564 344 279 276 | 76 |
| 77 | 3003 | 155 155 | 9 018 009 | 559 085 527 | 36 105 102 033 | 2 398 210 687 015 | 162 612 867 546 129 | 77 |
| 78 | 3081 | 161 239 | 9 492 561 | 596 100 583 | 38 992 276 401 | 2 623 410 287 719 | 180 178 436 401 041 | 78 |
| 79 | 3160 | 167 480 | 9 985 600 | 635 050 664 | 42 069 332 800 | 2 866 497 743 240 | 199 382 345 387 200 | 79 |
| 80 | 3240 | 173 880 | 10 497 600 | 676 010 664 | 45 346 132 800 | 3 128 641 743 240 | 220 353 865 387 200 | 80 |
| 81 | 3321 | 180 441 | 11 029 041 | 719 057 385 | 48 832 917 201 | 3 411 071 279 721 | 243 230 657 842 161 | 81 |
| 82 | 3403 | 187 165 | 11 580 409 | 764 269 561 | 52 540 315 633 | 3 715 077 951 145 | 268 159 204 898 929 | 82 |
| 83 | 3486 | 194 054 | 12 152 196 | 811 727 882 | 56 479 356 276 | 4 042 018 324 514 | 295 295 255 888 556 | 83 |
| 84 | 3570 | 201 110 | 12 744 900 | 861 515 018 | 60 661 475 700 | 4 393 316 356 130 | 324 804 290 544 300 | 84 |
| 85 | 3655 | 208 335 | 13 359 025 | 913 715 643 | 65 098 528 825 | 4 770 465 871 755 | 356 861 999 372 425 | 85 |
| 86 | 3741 | 215 731 | 13 995 081 | 968 416 459 | 69 802 799 001 | 5 175 033 106 891 | 391 654 781 594 121 | 86 |
| 87 | 3828 | 223 300 | 14 653 584 | 1 025 706 220 | 74 787 008 208 | 5 608 659 307 900 | 429 380 261 081 904 | 87 |
| 88 | 3916 | 231 044 | 15 335 056 | 1 085 675 756 | 80 064 327 376 | 6 073 063 394 684 | 470 247 820 718 896 | 88 |
| 89 | 4005 | 238 965 | 16 040 025 | 1 148 417 997 | 85 648 386 825 | 6 570 044 685 645 | 514 479 155 614 425 | 89 |
| 90 | 4095 | 247 065 | 15 769 025 | 1 214 027 997 | 91 553 286 825 | 7 101 485 685 645 | 562 308 845 614 425 | 90 |
| 91 | 4186 | 255 346 | 17 522 596 | 1 282 602 958 | 97 793 608 276 | 7 669 354 937 686 | 613 984 947 550 156 | 91 |
| 92 | 4278 | 263 810 | 18 301 284 | 1 354 242 254 | 104 384 423 508 | 8 275 709 939 030 | 669 769 607 673 804 | 92 |
| 93 | 4371 | 272 459 | 19 105 641 | 1 429 047 455 | 111 341 307 201 | 8 922 700 122 479 | 729 939 694 734 561 | 93 |
| 94 | 4465 | 281 295 | 19 936 225 | 1 507 122 351 | 118 680 347 425 | 9 612 569 903 535 | 794 787 454 153 825 | 94 |
| 95 | 4560 | 290 320 | 20 793 600 | 1 588 572 976 | 126 418 156 800 | 10 347 661 794 160 | 864 621 183 763 200 | 95 |
| 96 | 4656 | 299 536 | 21 678 336 | 1 673 507 632 | 134 571 883 776 | 11 130 419 583 856 | 939 765 931 574 016 | 96 |
| 97 | 4753 | 308 945 | 22 591 009 | 1 762 036 913 | 143 159 224 033 | 11 963 391 588 785 | 1 020 564 216 052 129 | 97 |
| 98 | 4851 | 318 549 | 23 532 201 | 1 854 273 729 | 152 198 432 001 | 12 849 233 969 649 | 1 107 376 769 376 801 | 98 |
| 99 | 4950 | 328 350 | 24 502 500 | 1 950 333 330 | 161 708 332 500 | 13 790 714 119 050 | 1 200 583 304 167 500 | 99 |
| 100 | 5050 | 338 350 | 25 502 500 | 2 050 333 330 | 171 708 332 500 | 14 790 714 119 050 | 1 300 583 304 167 500 | 100 |

Таблица XXX

Суммы логарифмов натуральных чисел

| x | $\Sigma \lg x$ | $\Sigma (x \lg x)$ | $\Sigma (\lg x)^2$ | x | $\Sigma \lg x$ | $\Sigma (x \lg x)$ | $\Sigma (\lg x)^2$ |
|-----|----------------|--------------------|--------------------|-----|----------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 0,0000000 | 0,0000000 | 0,0000000 | 51 | 66,1906450 | 1982,0883971 | 93,3838763 |
| 2 | 0,3010300 | 0,6020600 | 0,0906191 | 52 | 67,9066484 | 2071,3205710 | 96,3285438 |
| 3 | 0,7781513 | 2,0334238 | 0,3182638 | 53 | 69,6309243 | 2162,7071920 | 99,3016711 |
| 4 | 1,3802112 | 4,4416637 | 0,6807400 | 54 | 71,3633180 | 2256,2564551 | 102,3028592 |
| 5 | 2,0791812 | 7,9365137 | 1,1692991 | 55 | 73,1036807 | 2351,9764030 | 105,3317215 |
| 6 | 2,8573325 | 12,6054212 | 1,7748184 | 56 | 74,8518687 | 2449,8749325 | 108,3878829 |
| 7 | 3,7024305 | 18,5211075 | 2,4890091 | 57 | 76,6077436 | 2549,9597993 | 111,4709794 |
| 8 | 4,6055205 | 25,7458274 | 3,3045806 | 58 | 78,3711716 | 2652,2386229 | 114,5806577 |
| 9 | 5,5597630 | 34,3340100 | 4,2151594 | 59 | 80,1420236 | 2756,7188916 | 117,7165745 |
| 10 | 6,5597630 | 44,3340100 | 5,2151594 | 60 | 81,9201748 | 2863,4079666 | 120,8783964 |
| 11 | 7,6011557 | 55,7893295 | 6,2996581 | 61 | 83,7055047 | 2972,3130866 | 124,0657990 |
| 12 | 8,6803370 | 68,7395045 | 7,4642903 | 62 | 85,4978964 | 3083,4413713 | 127,2784670 |
| 13 | 9,7942803 | 83,2207681 | 8,7051601 | 63 | 87,2972363 | 3196,7998259 | 130,5160934 |
| 14 | 10,9404084 | 99,2665606 | 10,0187696 | 64 | 89,1034169 | 3312,3953443 | 133,7783793 |
| 15 | 12,1164996 | 116,9079295 | 11,4019602 | 65 | 90,9163303 | 3430,2347124 | 137,0650341 |
| 16 | 13,3206196 | 136,1738492 | 12,8518651 | 66 | 92,7358742 | 3550,3246122 | 140,3757742 |
| 17 | 14,5510685 | 157,0914808 | 14,3658697 | 67 | 94,5619490 | 3672,6716240 | 143,7103234 |
| 18 | 15,8063410 | 179,6863859 | 15,9415788 | 68 | 96,3944579 | 3797,2822300 | 147,0684123 |
| 19 | 17,0850946 | 203,9827044 | 17,5678955 | 69 | 98,2333070 | 3924,1628173 | 150,4497786 |
| 20 | 18,3861246 | 230,0033043 | 19,2694686 | 70 | 100,0784050 | 4053,3196801 | 153,8541654 |
| 21 | 19,7083439 | 257,7699095 | 21,0177324 | 71 | 101,9256534 | 4184,7590228 | 157,2813229 |
| 22 | 21,0507666 | 287,3032084 | 22,8198311 | 72 | 103,7869959 | 4318,4869626 | 160,7310069 |
| 23 | 22,4124944 | 318,6229487 | 24,6741338 | 73 | 105,6503187 | 4454,5095314 | 164,2029790 |
| 24 | 23,7927057 | 351,7480185 | 26,5791169 | 74 | 107,5195505 | 4592,8326786 | 167,6970062 |
| 25 | 25,1906457 | 386,6965187 | 28,5333531 | 75 | 109,3946117 | 4733,4622734 | 171,2128609 |
| 26 | 26,6056190 | 423,4858257 | 30,5355027 | 76 | 111,2754253 | 4876,4041064 | 174,7503207 |
| 27 | 28,0369828 | 462,1326474 | 32,5843049 | 77 | 113,1619160 | 5021,6638922 | 178,3091670 |
| 28 | 29,4841408 | 502,6530722 | 34,6785713 | 78 | 115,0540106 | 5169,2472713 | 181,8891890 |
| 29 | 30,9465388 | 545,0626142 | 36,8171792 | 79 | 116,9516377 | 5319,1598115 | 185,4901776 |
| 30 | 32,4236601 | 589,3762518 | 38,9990664 | 80 | 118,8547277 | 5471,4070104 | 189,1119291 |
| 31 | 33,9150218 | 635,6084643 | 41,2232261 | 81 | 120,7632127 | 5625,9942970 | 192,7542442 |
| 32 | 35,4201717 | 683,7732636 | 43,4887026 | 82 | 122,6770266 | 5782,9270329 | 196,4169276 |
| 33 | 36,9386857 | 733,8842237 | 45,7945871 | 83 | 124,5961047 | 5942,2105145 | 200,0997884 |
| 34 | 38,4701646 | 785,9545068 | 48,1400148 | 84 | 126,5203840 | 6103,8499746 | 203,8026391 |
| 35 | 40,0142326 | 839,9968884 | 50,5241609 | 85 | 128,4498029 | 6267,8505832 | 207,5252965 |
| 36 | 41,5705351 | 896,0237784 | 52,9462384 | 86 | 130,3843013 | 6434,2174510 | 211,2675808 |
| 37 | 43,1387369 | 954,0472422 | 55,4054951 | 87 | 132,3238206 | 6602,9556260 | 215,0293157 |
| 38 | 44,7185205 | 1014,0790189 | 57,9012113 | 88 | 134,2683033 | 6774,0701012 | 218,8103286 |
| 39 | 46,3095851 | 1076,1305385 | 60,4326979 | 89 | 136,2176933 | 6947,5658118 | 222,6104500 |
| 40 | 47,9116451 | 1140,2129382 | 62,9992941 | 90 | 138,1719358 | 7123,4476376 | 226,4295137 |
| 41 | 49,5244289 | 1206,3370763 | 65,6003659 | 91 | 140,1309772 | 7301,7204043 | 230,2673568 |
| 42 | 51,1476782 | 1274,5135465 | 68,2353041 | 92 | 142,0947650 | 7482,3888844 | 234,1238194 |
| 43 | 52,7811467 | 1344,7526901 | 70,9035233 | 93 | 144,0632480 | 7665,4577986 | 237,9987445 |
| 44 | 54,4245993 | 1417,0646979 | 73,6046600 | 94 | 146,0363758 | 7850,9318169 | 241,8919781 |
| 45 | 56,0778119 | 1491,4591710 | 76,3375716 | 95 | 148,0140994 | 8038,8155594 | 245,8033687 |
| 46 | 57,7405697 | 1567,9460313 | 79,1023352 | 96 | 149,9963707 | 8229,1135977 | 249,7327590 |
| 47 | 59,4126676 | 1646,5346306 | 81,8982465 | 97 | 151,9831424 | 8421,8304560 | 253,6800209 |
| 48 | 61,0939088 | 1727,2342100 | 84,7248186 | 98 | 153,9734365 | 8616,9706114 | 257,6450022 |
| 49 | 62,7841049 | 1810,0538179 | 87,5815814 | 99 | 155,9700037 | 8814,5384957 | 261,6275620 |
| 50 | 64,4830749 | 1895,0023181 | 90,4680804 | 100 | 157,9700037 | 9014,5384957 | 265,6275620 |

Таблица XXXI

Множители L

| n | D | L_1 | L_2 | L_3 | n | D | L_1 | L_2 | L_3 |
|-----|-----------|---------|---------|---------|-----|-----------|---------|---------|---------|
| 5 | 1,523501 | 0,76751 | 1,36474 | 3,28191 | 15 | 24,219828 | 0,47077 | 0,50027 | 0,61933 |
| 6 | 2,484562 | 0,71434 | 1,15004 | 2,41491 | 16 | 28,190923 | 0,45589 | 0,47251 | 0,56756 |
| 7 | 3,715071 | 0,66098 | 0,99660 | 1,89422 | 17 | 32,486152 | 0,44222 | 0,44792 | 0,52330 |
| 8 | 5,225830 | 0,63236 | 0,88130 | 1,53086 | 18 | 37,108038 | 0,42960 | 0,42595 | 0,48507 |
| 9 | 7,025510 | 0,59998 | 0,79137 | 1,28105 | 19 | 42,058700 | 0,41791 | 0,40622 | 0,45175 |
| 10 | 9,121123 | 0,57177 | 0,71918 | 1,09636 | 20 | 47,339971 | 0,40705 | 0,38839 | 0,42248 |
| 11 | 11,518666 | 0,54691 | 0,65990 | 0,95498 | 21 | 52,954571 | 0,39691 | 0,37218 | 0,39657 |
| 12 | 14,223230 | 0,52480 | 0,61029 | 0,84369 | 22 | 58,901364 | 0,38742 | 0,35739 | 0,37351 |
| 13 | 17,239160 | 0,50496 | 0,56814 | 0,75410 | 23 | 65,185374 | 0,37852 | 0,34383 | 0,35284 |
| 14 | 20,570209 | 0,48705 | 0,53186 | 0,68060 | 24 | 71,803231 | 0,37017 | 0,33136 | 0,33425 |
| | | | | | 25 | 78,764978 | 0,36226 | 0,31982 | 0,31740 |

ЛИТЕРАТУРА ПО СТАТИСТИЧЕСКОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

I. Вводные статьи

Колмогоров А. Н., Математическая статистика, БСЭ, 2 изд., т. 26, 1954.

Прохоров Ю. В. и Севастьянов Б. А., Теория вероятностей, БСЭ, 2 изд., т. 42, 1956.

Смирнов Н. В., Математическая статистика. В сб. «Математика в СССР за тридцать лет, 1917—1943», М., Гостехиздат, 1948.

Гихман И. И. и Гнеденко Б. В., Математическая статистика. В сб. «Математика в СССР за сорок лет, 1917—1957», т. I, М., Физматгиз, 1959.

Общедоступное введение в статистическое исчисление дано в кн.:

Митропольский А. К., Элементы математической статистики, 2 изд., Л., ЛТА, 1969.

II. Руководства и труды общего характера

Арлей Н. и Бух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. Перев. с англ. с предисловием А. Н. Колмогорова, М., ИЛ, 1951.

Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.—Л., Гостехиздат, 1946.

Боев Г. В., Теория вероятностей, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

Вентцель Е. С., Теория вероятностей, 3 изд., М., «Наука», 1964.

Гливленко В. И., Курс теории вероятностей, М., ОНТИ, 1939.

Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 4 изд., М., «Наука», 1965.

Длин А. М., Математическая статистика в технике, 3 изд., М., «Советская наука», 1958.

Дунин-Барковский И. В. и Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть), М., «Наука», 1955.

Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., ОНТИ, 1936.

Крамер Г., Математические методы статистики. Перев. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова, М., ИЛ, 1948.

Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., ГИЗ, 1924.

Митропольский А. К., Статистическое исчисление, I—Основные понятия и теоремы, Л., ВЗЛТИ, 1952.

Прохоров Ю. В. и Розанов Ю. А., Теория вероятностей, М., «Наука», 1967.

Пугачев В. С., Введение в теорию вероятностей, М., «Наука», 1968.

Пустыльник Е. К., Статистические методы анализа и обработки наблюдений, М., «Наука», 1968.

Романовский В. И., Математическая статистика. М.—Л., ОНТИ, 1938; Элементарный курс математической статистики, М., Госпланиздат, 1939; Математическая статистика, кн. 1—2, Ташкент, АН УзССР, 1961—1963.

Сапогов Н. А., Теория вероятностей. Основные понятия математической статистики. В кн.: Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А., Специальный курс высшей математики для вузов, М., «Высшая школа», 1970.

Смирнов Н. В. и Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 2 изд., М., «Наука», 1965.

Уилкс С., Математическая статистика. Перев. с англ. под ред. Ю. В. Линника, М., «Наука», 1967.

Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. I. Перев. с англ. с предисловием А. Н. Колмогорова, 3 изд., М., «Мир», 1967; т. II. Перев. с англ. Ю. В. Прохорова, М., «Мир», 1967.

Фишер Р. А., Статистические методы для исследователей. Перев. с англ. В. Н. Перегудова, М., Госстатиздат, 1958.

Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями. Перев. с англ. под ред. Ю. В. Линника, М., ИЛ, 1956.

Хинчин А. Я., Основные законы теории вероятностей, М., МГУ, 1927.

Чебышев П. Л., Теория вероятностей. Лекции 1879—1880 гг. По записи А. М. Ляпунова. Изданы А. Н. Крыловым, М. — Л., АН СССР, 1938.

Aitken A. C., Statistical mathematics, 8 ed., Edinburgh, 1957.

Anderson O. N., Einführung in die mathematische Statistik, Wien, 1935.

Bernoulli J., Ars Conjectandi, Basileae, 1713. На русск. яз.: Часть четвертая сочинения Якова Бернулли «Ars conjectandi». Перевод Я. В. Успенского, с предисловием А. А. Маркова, С.-Петербург, 1913.

Borel E., éd., Traité du calcul des probabilités et de ses applications (19 volumes), Paris, 1925—1959.

Castelnuovo G., Calcolo delle probabilità, vol. I, 4 ed. Bologna, 1947; vol. II, 2 ed., Bologna, 1928.

Chakravarti I. M., Laha R. G. and Roy J., Handbook of methods of applied statistics, Vols I and II, New York, 1967.

David F. N., Probability theory for statistical methods, Cambridge, 1947.

Deltheil R. et Huron R., Statistique mathématique, Paris, 1959.

Fisz M., Probability theory and mathematical statistics, 3 ed., New York, 1963.

Hoel P. G., Introduction to mathematical statistics, 3 ed., New York, 1962.

Hogg R. V. and Craig A. T., Introduction to mathematical statistics, 2 ed., London, 1965.

Kendall M. G. and Stuart A., The advanced theory of statistics (In three volumes), London, 2 ed., 1962—1966.

Kohn S., Základy teorie statistické metody, Praha, 1929.

Laplace P. S., Théorie analytique des probabilités, 4 éd., «Oeuvres», 7, Paris, 1886.

Lévy P., Calcul des probabilités, Paris, 1925.

Linder A., Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure, 3 Aufl., Basel, 1961.

Moivre A., The doctrine of chances, or a method of calculating the probabilities of events in play, 3 ed., London, 1756.

Neyman J., First course in probability and statistics, New York, 1953.

Steffensen J. F., Matematisk lagtagelseslaere, København, 1923.

Uspensky J. V., Introduction to mathematical probability, New York, 1937.

Wetherburn C. E., A first course in mathematical statistics, Cambridge, 1961.

III. Кривые распределения

Бернштейн С. Н., Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. Собрание сочинений, т. IV, М., «Наука», 1964, 121—176; Кривые Пирсона. В кн. «Теория вероятностей», 4 изд., М. — Л., Гостехиздат, 1948, 448—457.

Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., Гостехиздат, 1949.

Кендалл М. и Стьюарт А., Теория распределений. Перев. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова, М., «Наука», 1966.

Колмогоров А. Н., Об аналитических методах в теории вероятностей. УМН 5, 1938, 5—41; Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности системы стрельбы, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 12, 1945, 7—29.

Лактин Л. К., Кривые распределения и построение для них интерполяционных формул по способу Пирсона и Брунса, М., ГИЗ, 1922.

Ляпунов А. М., Об одной теореме теории вероятностей; Новая теорема о пределе вероятности. Собрание сочинений, т. I, М., АН СССР, 1954.

Марков А. А., О некоторых предельных формулах исчисления вероятностей, Изв. Акад. наук, сер. 6, II, 1917, 177—186; Применение метода математических ожиданий — метода моментов — к выводу второй предельной теоремы исчисления вероятностей. В кн. «Исчисление вероятностей», 4 изд., Л., 1924, 487—581.

Митропольский А. К., Интеграл вероятностей, Л., ЛТА, 1948; Статистическое исчисление, 2 — Кривые распределения, Л., ВЗЛТИ, 1952; Нормальное распределение, Л., ЛТА, 1956; китайское изд. Пекин, Акад. наук КНР, 1959; Кривые распределения, Л., ЛТА, 1960.

Немчинов В. С., Полиномы Чебышева и математическая статистика (1948). Избранные произведения, т. I, М., «Наука», 1967.

Романовский В. И., Обобщение системы кривых Пирсона, Труды Ср.-Азиатск. гос. ун-та, сер. V-а, матем., вып. 15, 1936.

Слуцкий Е. Е., О стохастических асимптотах и пределах. Избранные труды, М., АН СССР, 1960.

Хинчин А. Я., Асимптотические законы теории вероятностей, М., ОНТИ, 1936; Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М., ОНТИ, 1938.

Чебышев П. Л., О разложении функции одной переменной. Полное собрание сочинений, т. II, М., АН СССР, 1947, 335—341; О двух теоремах относительно вероятностей. Полное собрание сочинений, т. III, М., АН СССР, 1948, 229—240.

Charlier C. V. L., Über das Fehlergesetz, Ark. f. Mat., Astr., och Fys., Vol. II, № 8, 1905, 1—9; Die zweite Form des Fehlergesetzes, ib., vol. II, № 15, 1905, 1—8; Contributions to the mathematical theory of statistics, 5. Frequency curves of type A in heterograde statistics, ib., vol. IX, № 25, 1914.

Elderton W. P., Frequency curves and correlation, 4 ed., Cambridge, 1953. Русск. перев. под ред. Н. С. Четверикова, МСУ, 1924.

Gram J. P., Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, Crelle's Jour. f. reine und angew. Math. 94, 1883, 41—73.

Lindeberg J. W., Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. 15, 1922, 211—225.

Pearson K., Early statistical papers, Cambridge, 1948.

IV. Методы оценки

Бернштейн С. Н., О «доверительных» вероятностях Фишера. Собрание сочинений, т. IV, М., «Наука», 1964, 386—393.

Вальд А., Последовательный анализ. Перев. с англ. под ред. Б. А. Севастьянова, М., Физматгиз, 1960.

Гаусс К. Ф., Способ наименьших квадратов. Перев. с латинск. и нем. Н. Ф. Булаевского под ред. Г. В. Багратуни. Избранные геодезические сочинения, т. I, М., Геодезиздат, 1957.

Идельсон Н. И., Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений, М., Геодезиздат, 1947.

Колмогоров А. Н., Определение центра рассеивания и меры точности по ограниченному числу наблюдений, *Изв. АН СССР*, сер. матем. 6, 1942, 3—32; К обоснованию метода наименьших квадратов, *УМН* 11, 1946, 57—70; Несмещенные оценки, *Изв. АН СССР*, сер. матем. 14, 1950, 300—326.

Леман Э., Проверка статистических гипотез. Перев. с англ. Ю. В. Прохорова, М., «Наука», 1964.

Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., Физматгиз, 1962.

Марков А. А., Закон больших чисел и способ наименьших квадратов. Избранные труды, М., АН СССР, 1951, 233—251.

Митропольский А. К., Статистическое исчисление, 3 — Методы оценки, Л., ВЗЛТИ, 1953.

Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применение. Перев. с англ. под ред. Ю. В. Линника, М., «Наука», 1968.

Романовский В. И., Новые критерии случайности ряда испытаний, Труды Ср.-Азиатск. гос. ун-та, сер. V-а, матем., вып. 8, 1933; Основные задачи теории ошибок, М., Гостехиздат, 1947.

Смирнов Н. В., Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, *УМН* 10, 1944, 179—200; Предельные законы распределения для членов вариационного ряда, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 25, 1949, 1—60; Избранные труды, «Наука», 1970.

Чеботарев А. С., Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, М., Геодезиздат, 1958.

Шеффе Г., Дисперсионный анализ. Перев. с англ. Б. А. Севастьянова и В. П. Чистякова, М., Физматгиз, 1963.

David F. N. and Neyman J., Extension of the Markoff theorem on least squares, *Statistical Research Memoirs*, vol. 11, London, 1931.

Fisher R. A., Contributions to mathematical statistics. New York, 1950; Statistical methods and scientific inference, 2 ed., Edinburgh, 1959.

«Student», The probable error of mean, *Biometrika* 6, 1908; «Student's» Collected papers, London, 1947.

Wetherill G. B., Sequential methods in statistics, London, 1966.

V. Корреляционные уравнения

Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ. Перев. с англ. под ред. Б. В. Гнеденко, М., Физматгиз, 1963.

Бернштейн С. Н., Геометрические основы теории корреляции. Собрание сочинений, т. IV, М., «Наука», 1964, 197—216.

Дьяченко З. Н., О моментах двумерного γ -распределения, *Изв. вузов — Математика*, 1961, № 1 (20), 55—65; Поверхность распределения типа γ , Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1962, 389—395; Поверхности гамма-распределения, Киев, АН УССР, 1962.

Езекиэл М., Фокс К. А., Методы анализа корреляций и регрессий линейных и криволинейных. Перев. с англ., М., «Статистика», 1966.

Лукомский Я. И., Теория корреляции и ее применение к анализу производства, 2 изд., М., Госстатиздат, 1961.

Марков А. А., Об эллипсоидах (эллипсах) рассеяния и корреляции, *Изв. Акад. наук*, сер. 6, 18, 1924, 117—126.

Мартынихина Т. Ф., Об аналитическом методе установления корреляционных уравнений, *Изв. вузов — Математика*, 1959, № 2 (9), 138—143.

Митропольский А. К., О корреляционных уравнениях. Напечатано в кн.: Богословский С. А. и Зиновьев В. П., Статистический метод учета лесных ресурсов, Л., Гослестехиздат, 1932, 114—119; Об установлении

корреляционных уравнений по способу Чебышева, Изв. АН СССР, сер. матем. 1, 1937, 125—134; О вычислении корреляционных уравнений при малом числе испытаний, Л., Труды ЛТА 48, 1937, 3—48; О множественных нелинейных корреляционных уравнениях, Изв. АН СССР, сер. матем. 3, 1939, 399—406; О вычислении обыкновенных корреляционных уравнений, Ж. техн. физ. 10, 1940, 1227—1241; О вычислении корреляционных уравнений по способу сумм, Л., Труды ЛТА 60, 1947, 63—72; О вычислении множественных корреляционных уравнений, Л., Труды ЛТА 65, 73—92; Обыкновенные корреляционные уравнения, УМН 4, 5 (33), 1949, 142—175; Статистическое исчисление, 4 — Корреляционные уравнения, Л., ВЗЛТИ, 1954; О вычислении корреляционных уравнений периодического типа, Л., Техн. информ. ЛТА 15, 1954, 3—8; Об определителях распределения ряда натуральных чисел, УМН 10: 4 (66), 1955, 143—144; О поверхностях распределения типа А, Труды третьего всесоюзного матем. съезда 1, 1956, 124; О нормальной корреляционной функции, Л., Труды ВЗЛТИ 3, 1958, 59—64; Поверхности распределения типа А, Л., Труды ВЗЛТИ, 1961, 5—10; О корреляционных функциях, Л., Труды ЛТА 94, 1962, 3—4; О вычислении моментов по способу сумм, Л., Изв. Лесного ин-та 36, 1928, 207—250.

Романовский В. И., Элементы теории корреляции, 2 изд., Ташкент, 1926.

Сапогов Н. А., О взаимном расположении линий регрессии, УМН 9, № 3, 1954, 187—192.

Сарманов О. В., Об изогенной корреляции, Изв. АН СССР, сер. матем. 9, 1945, 162—200; Псевдонормальная корреляция и различные ее обобщения, Докл. АН СССР 132, № 2, 1959, 239—302.

Сарманов О. В. и Братоева З. Н., Вероятностные свойства билинейных разложений по полиномам Эрмита, Теория вероятностей и ее применения 12, вып. 3, 1967, 520—531.

Слудский Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, Киев, 1912.

Чебышев П. Л., О непрерывных дробях; Об интерполировании по способу наименьших квадратов; Об интерполировании; Об интерполировании величин равноотстоящих. Полное собрание сочинений, т. II, М., АН СССР, 1947; т. III, М., АН СССР, 1948.

Четвериков Н. С., О технике вычисления параболических кривых (1926). В кн.: «Статистические и стохастические исследования», М., Госстатиздат, 1963, 130—210; Логическая структура методов и показателей теории корреляции, изложенная в векторном отображении. Там же, 245—273.

Чупров А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями (1926), М., Госстатиздат, 1960.

Bula C. A., Theory and evaluation of central moments in two dimensions. Sheppard's corrections. The simpler method of Mitropolsky, Revista Union Mat Argentina 5, 1940, 1—97; Wilks S. S., Mathematical Reviews, 2, 1941, 231.

Dieulefait C. E., Théorie de corrélation, Rosario, 1935.

Draper N., Smith H., Applied regression analysis, New York, 1967.

Jørgensen N. R., Undersøgelser over frekvensflader og correlation, København, 1916.

Kibble W. F., A two-variate gamma type distribution, Sankhya 5, 1941, 137—150.

Mitropolskiĭ A. K., Correlation equations for statistical computations. Authorized translation from the Russian by E. S. Spiegelthal, New York, 1966.

Pearson K., On the general theory of skew correlation and non-linear regression, London, 1905; On a general method of determining the successive terms in a skew regression line, Biometrika 13, 1924, 296—300.

Plackett R. L., Principles of regression analysis, Oxford, 1960.

Romanovsky V., Sulle regressioni multiple, Giorn. dell'Ist. d. Attuari 2, № 2, 1931.

Tchouproff A. A., The mathematical theory of the statistical methods employed in the study of correlation in the case of three variables, Trans. of Cambridge Phil. Soc. 28, № 12, 1928, 337—382.

Wicksell S. D., Analytical theory of regression, Lund, 1934.

Williams E. J., Regression analysis, New York, 1959.

VI. Вычислительные таблицы

1. Таблицы общего характера

Митропольский А. К., Краткие математические таблицы, 4 изд., М., «Наука», 1968.

Таблицы Барлоу квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин всех целых чисел от 1 до 15 000. Под ред. Л. С. Хренова, М., «Мир», 1965.

Милн-Томсон Л. М. и Комри Л. Дж., Четырехзначные математические таблицы. Под ред. К. А. Семендяева, 2 изд., М., «Наука», 1964.

Вега Г., Таблицы семизначных логарифмов, М., Геодезиздат, 1967.

Томпсон А., Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, тт. I и II, М., АН СССР, 1961—1962.

Лебедев А. В. и Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., АН СССР, 1956.

Fletcher A., Miller J. C. B., Rosenhead L. and Comrie L. J., An index of mathematical tables, 2 ed., Vols I and II, Reading, Massachusetts, 1962.

2. Математико-статистические таблицы

Митропольский А. К., Статистическое исчисление, тт. 1—4, Л., ВЗЛТИ, 1952—1954.

Лоуэн А. Н., ред. Таблицы вероятностных функций. Обработка таблиц и перев. текста с англ. А. С. Барк, тт. I—II, М., АН СССР, 1958—1959.

Большев Л. Н. и Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, М., «Наука», 1965.

Юденков В. А., Таблицы значений функции плотности нормального распределения и ее первых шести производных, Л., ЛТА, 1970.

Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Перев. с нем. под ред. Л. И. Седова, М., «Наука», 1964.

Fisher R. A. and Yates F., Statistical tables for biological, agricultural and medical research, 6 ed., Edinburgh and London, 1963.

Greenwood J. A. and Hartley H. O., Guide to tables in mathematical statistics, Princeton, New Jersey, 1962.

Pearson E. S. and Hartley H. O., ed., Biometrika Tables for Statisticians, vol. I, 3 ed., Cambridge, 1966.

Pearson K., ed., Tables for statisticians and biometricians, vol. I, 3 ed., London, 1930; vol. II, London, 1931.

VII. Применение методов статистического исчисления

1. Физика

Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, Киев, АН УССР, 1945; Проблемы динамической теории в статистической физике, М., Гостехиздат, 1947.

Гиббс Дж. В., Основные принципы статистической механики. Перев. с англ. К. В. Никольского, М., Гостехиздат, 1946.

Колмогоров А. Н., Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром. В кн.: «Юбилейный сборник АН СССР», т. I, М., 1947.

Леонтович М. А., Статистическая физика, М., Гостехиздат, 1944.

Хинчин А. Я., Математические основания статистической механики, М., Гостехиздат, 1943; Математические основания квантовой статистики, М., Гостехиздат, 1951.

Яноши Л., Теория и практика обработки результатов измерений. Перев. с англ. Н. П. Клепикова, 2 изд., М., «Мир», 1968.

Borel E., *Mécanique statistique classique*. Borel's *Traité du calcul des probabilités*, t. 2, fasc. 3, Paris, 1925.

Hamilton W. C., *Statistics in physical science*. Estimation, Hypothesis testing and least squares, New York, 1964.

Johnson N. L. and Leone F. C., *Statistics and experimental design: in engineering and physical sciences*, Vol. I, New York, 1964; Vol. II, New York, 1966.

Michelson A. A., Pease F. G. and Pearson F., Measurement of the velocity of light in a partial vacuum, *The Astrophysical Journal* 82, 1935, 26—61.

Millican R. A., Electrons (+ and —), protons, photons, neutrons and cosmic rays, 2 ed., Chicago, 1947.

Perrin F., *Mécanique statistique quantique*. Borel's *Traité du calcul des probabilités*, t. 2, fasc. 5, Paris, 1939.

Rutherford E. and Geiger H., The probability variations in the distributions of α particles, *Philosophical Magazine*, ser. 6, 20, 1910.

2. Химия

Бородюк В. П., Кортов В. С., Круг Г. К., Экспериментально-статистические методы получения математического описания сложных технологических процессов, М., Гос. Комитет Совета Министров СССР по химии, 1962.

Браунли К. А., Статистические исследования в производстве. Перев. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова, М., ИЛ, 1949.

Менделеев Д. И., О соединении спирта с водою, С.-Петербург, 1865.

Налимов В. В., Применение математической статистики при анализе вещества, М., Физматгиз, 1960.

Планирование эксперимента, М., «Наука», 1966.

Bauer E. L., *A statistical manual for chemists*, New York, 1954.

Bennett C. A. and Franklin N. L., *Statistical analysis in chemistry and the chemical industry*, New York, 1954.

Davies O. L., ed., *Statistical methods in research and production with special reference to the chemical industry*, 3 ed. Edinburgh, 1957.

Rayleigh J., On an anomaly encountered in determinations of the density of nitrogen gas, *Scientific papers*, vol. IV, 1903, 104—108.

Sherman J., *Statistical analysis*. В кн.: Berl W. G., ed., *Physical methods in chemical analysis*, vol. II, New York, 1951, 501—589.

Youden W. J., *Statistical methods for chemists*, New York, 1951.

3. Астрономия и геодезия

Агекян Т. А., Основы теории ошибок для астрономов и физиков, М., «Наука», 1968.

Большаков В. Д., Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей, М., «Недра», 1965.

Видуев Н. Г. и Кондра Г. С., Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений, М., «Недра», 1969.

Смирнов Н. В. и Белугин Д. А., Теория вероятностей и математическая статистика в применении к геодезии, М., «Недра», 1969.

Шиголов Б. М., Математическая обработка наблюдений, 3 изд., М., «Наука», 1969.

Charlier C. V. L., Introduction to stellar statistics, Lund, 1921; Applications de la théorie des probabilités à l'astronomie. Borel's Traité du calcul des probabilités, t. 2, fasc. 4, Paris, 1931.

Kurth R., Introduction to stellar statistics, Bergamon Press, 1967.

Trumpler R. J. and Weaver H. F., Statistical astronomy, Berkley, California, 1953.

4. Геология и палеонтология

Вистелиус А. Б., Проблемы математической геологии. Геология и геофизика, 1962, № 12, 3—9; 1963, № 7, 3—17; № 12, 3—10. Вопросы математической геологии, М., «Наука», 1968.

Дементьев Л. Ф., Статистические методы обработки и анализа промышленно-геологических данных, М., «Недра», 1966.

Колмогоров А. Н., Логарифмически-нормальный закон распределения размеров частиц при дроблении, Докл. АН СССР 31, 1941, 99—101; Решение одной задачи из теории вероятностей, связанной с вопросом о механизме слоеобразования, Докл. АН СССР 65, 1949, 793—796.

Миклухо-Маклай К. В., Опыт биометрического изучения раковин некоторых казанских нодозарий, Палеонтологический журнал, 1960, № 4, 28—42.

Миллер Р. Л. и Кан Дж. С., Статистический анализ в геологических науках. Перев. с англ. под ред. Ю. В. Прохорова, М., «Мир», 1965.

Остроумов А., К вариационной статистике каспийских дидакнид, Труды Общ. естествоиспытателей при Казанском ун-те 44, вып. 4, 1912.

Разумовский Н. К., Логарифмически-нормальный закон распределения вещества и его свойства, Записки Ленингр. Горного ин-та 20, 1948, 105—121.

Шарапов И. П., Применение математической статистики в геологии, М., «Недра», 1965.

Krumbein W. C. and Graybill T. A., An introduction to statistical models in geology, New York, 1965. Русск. перев. под ред. Ю. В. Прохорова, М., «Мир», 1969.

Vistelius A. B., Studies in mathematical geology, New York, 1967.

5. Метеорология и гидрология

Бартенев Г. М., О долгосрочных прогнозах критических частот ионосферы и случаев возмущений в ней, Изв. АН СССР, отд. техн. наук, 1947, 1139—1152.

Брукс С. и Карузерс Н., Применение статистических методов в метеорологии. Перев. с англ. под ред. Н. Л. Багрова, Л., Гидрометеиздат, 1963.

Гриневич Г. А., Расчетные методы вероятностных оценок в прикладной климатологии, Труды Всесоюзного научного метеорологического совещания, т. IV, серия климатологии, Л., Гидрометеиздат, 1962, 403—411.

Дьяченко П. В., Опыт применения методов математической статистики к изучению микроструктуры туманов и облаков, Труды Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова 101, 1959, 3—50.

Ивановская К. М., Техника статистических исчислений гидрологических параметров, М., Госэнергоиздат, 1955.

Соколовский Д. Л., Речной сток (Основы теории и методы расчетов), 3 изд., М., Гидрометеиздат, 1968.

6. Биология

- Василевич В. И., Статистические методы в геоботанике, М., «Наука», 1969.
- Верховская И. Н., Статистическая обработка результатов измерений интенсивности излучения. В кн.: «Метод меченых атомов в биологии», под ред. Кузина, М., МГУ, 1955, 128—144.
- Деревицкий Н. Ф., Новейшие данные из области применения вариационной статистики. Приложение к кн.: Иоганнсен В., 1933, 305—407.
- Иоганнсен В., Элементы точного учения об изменчивости и наследственности с основами биологической вариационной статистики. Перев. с нем., Л., Сельхозгиз, 1933.
- Леонтович А. В. и др., Вариационная статистика, М., Сельхозгиз, 1935.
- Рокицкий П. Ф., Биологическая статистика, Минск, «Высшая школа», 1964.
- Терентьев П. В., ред., Применение математических методов в биологии, Л., ЛГУ, I, 1960; II, 1963; III, 1964.
- Урбах В. Ю., Биометрические методы, М., «Наука», 1964.
- Федоров А. И., Методы математической статистики в биологии и опытно-м деле, 2 изд., Алма-Ата, Крайпар, 1967.
- Филипченко Ю. А., Изменчивость и методы ее изучения, 4 изд., Л., ГИЗ, 1929.
- Черныш В. И. и Напалков А. В., Математический аппарат биологической кибернетики, М., «Медицина», 1964.
- Шентякова Л. Ф., Применение способа Чебышева к методике реконструкции рыб по чешуе, Труды ин-та биологии водохранилищ, вып. 4 (7), М. — Л., АН СССР, 1961, 281—298.
- Lamotte M., La biologie quantitative, Paris, 1952.
- Rao C. R., Advanced statistical methods in biometric research, New York, 1952.
- Weber E., Grundriss der biologischen Statistik. Anwendungen der mathematischen Statistik in Naturwissenschaft und Technik. C. Auflage, Jena, 1967.

7. Антропология и медицина

- Игнатьев М. В., Статистический метод в антропологии. В кн.: «Проблемы демографической статистики», под ред. В. С. Немчинова, М., Госстатиздат, 1959.
- Каминский Л. С., Обработка клинических и лабораторных данных. Применение статистики в научной и практической работе врача, Л., Медгиз, 1959.
- Кудрин А. П. и Пономарева Г. Т., Применение математики в экспериментальной и клинической медицине, М., «Медицина», 1967.
- Уиппл Дж. Ч. и Новосельский С. А., Основы демографической и санитарной статистики, М., Медгиз, 1929.
- Хилл А. Б., Основы медицинской статистики. Перев. с англ. под ред. Л. К. Хоцянова, М., Медгиз, 1958.
- Hill A. B., Statistical methods in clinical and preventive medicine, Edinburgh and London, 1962.
- Morice E., Tisserand M., Resoul J., Méthodes statistiques en médecine et en biologie, Paris, 1947.
- Pearl R., Introduction to medical biometry and statistics, 2 ed., Philadelphia, 1930.

8. Агрономия и агрикультура

Деревицкий Н. Ф., Опытное дело в растениеводстве, Кишинев, АН Молдавской ССР, 1962.

Константинов П. Н., Методика полевых опытов (с элементами теории ошибок), М., Сельхозгиз, 1939.

Перегудов В. Н., Статистические методы обработки данных полевого опыта, М., Сельхозгиз, 1948.

Поморский Ю. Л., Методы статистического анализа экспериментальных данных, Л., ЛТА, 1940.

Романовский В. И., О новейших методах математической статистики, применяемых в полевом опыте, Социалистическая наука и техника, 1934, № 3—4, 75—86; Применения математической статистики в опытном деле, М. — Л., Гостехиздат, 1947.

Снедекор Дж. У., Статистические методы в применении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии. Перев. с англ. В. Н. Перегудова, М., Сельхозиздат, 1961.

Соколов А. В., Определение точности опыта. В кн.: «Агрохимические методы исследования почв. Руководство для полевых и лабораторных исследований», 3 изд., М., АН СССР, 1960, 500—525.

Fisher R. A., The design of experiments, 8 ed., Edinburgh, 1966.

Mudra A., Statistische Methoden für landwirtschaftliche Versuche, Berlin, 1958.

Tippett L. H. C., Methods of statistics, 4 ed., London, 1952.

9. Лесоведение и лесоводство

Богословский С. А. и Зиновьев В. П., Статистический метод учета лесных ресурсов, Л., Гослестехиздат, 1932.

Голубев В. В., Элементы математической статистики в применении к лесному делу, М., Сельхозгиз, 1929.

Дьяченко З. Н., О построении поверхности распределения диаметра на высоте груди и объема северной сосны, Изв. вузов, Лесной журнал, 1963, № 2, 46—49.

Дьячков А. Н., Математическая статистика в применении к лесному делу, Архангельск, АЛТИ, 1951.

Здорик М. Г., Статистика для лесных специалистов, 2 изд., М., Гослесбумиздат, 1952.

Никитин К. Е., Лиственница на Украине (Анализ таксационного строения и роста древостоев с использованием электронных цифровых машин.), Киев, «Урожай», 1966.

Сукачев В. Н., Растительные сообщества, 4 изд., Л., 1928.

Ткаченко М. Е., Общее лесоводство, 2 изд., под ред. И. С. Мелехова, М. — Л., Гослесбумиздат, 1952; Опытнo-исследовательские работы по общему лесоводству, М. — Л., Сельхозгиз, 1931.

Третьяков Н. В., Некоторые положения советской лесной таксации. В кн.: «Справочник таксатора», под ред. Н. В. Третьякова, 2 изд., М. — Л., Гослесбумиздат, 1952.

Труль О. А., Математическая статистика в лесном хозяйстве, Минск, «Высшая школа», 1966.

Трунов И. А., Методика установления корреляционных связей между таксационными и дешифровочными показателями. В кн.: «Аэрофотосъемка и картографирование лесов Сибири», М., «Наука», 1966, 74—104.

Jefferies J. N. R., Experimental design and analysis in forest research, Stockholm, 1960.

P r o d a n M., Forstliche Biometrie, München, 1961.

Schaeffer L., La méthode statistique et la forestière, Revue forestière française, 1953, № 8, 11—80.

Wright W. G., Statistical methods in forest-investigative work, Ottawa, 1925.

10. Производственная техника

а. Контроль производства и качества продукции

Барабаш Ю. А. и др., Вопросы статистической теории распознавания, М., «Советское радио», 1967.

Беккер Р., Плаут Г. и Рунге И., Математическая статистика в применении к проблемам массового производства, М., ОНТИ, 1933.

Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ, М., «Наука», 1966.

Иванов А. П., Электрические источники света, Л., 1936.

Колмогоров А. Н., Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю, Л., 1951.

Коуден Д., Статистические методы контроля качества, М., Физматгиз, 1961.

Кутай А. К. и Кордонский Х. Б., Анализ точности и контроль качества в машиностроении с применением методов математической статистики, М. — Л., Машгиз, 1958.

Орлов П. И., Конструкция и расчет деталей авиационных двигателей, Л., 1940.

Пирсон Э., Статистические методы в приложении к стандартам и контролю качества продукции в промышленности. Перев. с англ. А. А. Конюса, М., Госпланиздат, 1939.

Романовский В. И., О статистических методах контроля производства и качества продукции, Труды второго Всесоюзного совещания по математической статистике, Ташкент, 1949, 24—45.

Солонин И. С., Применение математической статистики в технологии машиностроения, Свердловск, 1966.

Тиходеев Г. М., Контроль качества сварки, Л., АН СССР, 1935.

Bell D. A., Statistical methods in electrical engineering, London, 1953.

Brownlee K. A., Statistical theory and methodology in science and engineering, 2 ed., New York, 1966.

Davies O. L., ed., The design and analysis of industrial experiments, 2 ed., London, 1956.

Rancu N. și Tövissi L., Statistica matematică cu aplicații în producție, București, 1963.

Shewhart W., Statistical method from viewpoint of quality control, Washington, 1939.

Simon L. E., An engineer's manual of statistical methods, New York, 1945.

Tippett L. H. C., Statistical methods in industry, London, 1943; Technological applications of statistics, New York, 1950.

б. Анализ механических свойств материалов

Металл

Бородачев Н. А. и ШигOLEV Б. М., Обработка опытных данных, Энциклопедический справочник «Машиностроение», под ред. Е. А. Чудакова, т. I, Л., 1947.

Вейбулл В., Усталостные испытания и анализ их результатов. Перев. с англ. под ред. С. В. Серенсена, М., «Машиностроение», 1964.

- Давиденков Н. Н., Динамические испытания металлов, 2 изд., Л., ОНТИ, 1936.
- Жуков С. А., Вид связи предела выносливости с характеристиками прочности при растяжении, Заводская лаборатория 12, 1946, 106—108.
- Иванова В. С., Усталостное разрушение металлов, М., Металлургиздат, 1963.
- Качанов Н. Н., Прокаливаемость стали, М., «Металлургия», 1964.
- Когаев В. П., Методы статистической обработки результатов усталостных испытаний, Заводская лаборатория 23, 1957, 612—620.
- Кураев В. В. и Чернашкин В. Г., Строительные стали, Харьков, 1941.
- Кутай А. К., Теория вероятностей и математическая статистика, «Приборостроение и средства автоматики», т. I, М., 1963, 1—90.
- Медведев С. Ф., Циклическая прочность металлов, М., Машгиз, 1961.
- Серенсен С. В., ред., Статистические вопросы прочности в машиностроении, М., Машгиз, 1961; Вопросы механической усталости, М., «Машиностроение», 1964.
- Скаков А. И., Статистический метод исследования связей между количественными и альтернативными признаками как способ изучения причин брака в массовом производстве, Заводская лаборатория 17, 1951, 44—55; Качество железнодорожных рельсов, М., Металлургиздат, 1955.
- Стрелецкий Н. С., Об определении допускаемых напряжений, Строит. промышл. 7, 1940, 28—35; Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений, Л., Стройиздат, 1947.
- Чертков Г. В., Влияние масштабного фактора и конфигурации чугуновых отливок на их характеристики хрупкой прочности, Труды ВЗЛТИ 1, 1955, 59—72.
- Шапошников Н. А., Механические испытания металлов, 2 изд., под ред. Е. М. Шевандина, М. — Л., Машгиз, 1954.
- Шашин М. Я., Методика статистической обработки экспериментальных данных с учетом вероятности пераурушения и различия дисперсии по напряжениям, Сборник трудов Ленингр. механич. ин-та, 1962, № 23, 201—207.
- Шапов Н. П. и Кочетов А. И., Статистические методы обработки результатов ударных испытаний. Приложение к кн.: Давиденков Н. Н., Проблема удара в металловедении, М., АН СССР, 1938.

Древесина

- Богословский С. А., Исследование технических свойств древесины дуба, Петроград, 1915.
- Ванин С. И., О некоторых новых принципах и методах в древесиноведении, Л., ЛТА, 1946; Физико-механические свойства древесины березы с красной, Труды ЛТА 65, 1949, 93—108; Об изучении физических и механических свойств древесины с различными пороками, Труды ЛТА 67, 1949, 119—124.
- Леонтьев Н. Л., Техника статистических вычислений, 2 изд., М., «Лесная промышленность», 1966.
- Певцов А. Х., Ударная твердость древесины, М., Гослестехиздат, 1935.
- Перелыгин Л. М. и Певцов А. Х., Механические свойства и испытания древесины, М., Гослестехиздат, 1934.
- Bernard M. M. and Ditchburne N., Elementary statistics for use in the timber research, Melbourne, 1956.
- Van Rest E. D., Examples of statistical methods in forest product research, Jour. of Royal Statistical Society, Suppl. 4, 1937, 134—203.

Текстиль, резина и другие материалы

- Боев Г. П., Математическая статистика для текстильщиков, Москва — Иваново, 1933.

Виноградов Ю. С., Математическая статистика и ее применение в текстильном производстве, 2 изд., М., «Легкая индустрия», 1964, 3-е изд. 1970.

Витман Ф. Ф. и Пух В. П., О методе определения прочности листовых стекол, Заводская лаборатория 29, 1963, 863—867.

Грушко И. М., Глущенко Н. Ф., Ильин А. Г., Структура и прочность дорожного цементного бетона. Под ред. М. М. Волкова, Харьков, ХГУ, 1965.

Ельчанинов М. Г., О зависимости между механической прочностью и объемным весом известняка, Строит. промышл., 1940, № 11.

Поздняков Б. П., Методы отбора проб в хлопкопрядении, М., Гизлегпром, 1958; 2 изд., 1965.

Санков Е. А., Прядильные волокнистые материалы, 2 изд., Л., Гизлегпром, 1936.

Соловьев А. Н., Измерения и оценка свойств текстильных материалов, 2 изд., М., «Легкая индустрия», 1966.

Brearely K. and Cox D. R., An outline of statistical methods for use in the textile industry, 3 ed., Leeds, 1954.

Graf U. und Henning H. J., Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen, 3 Aufl., Berlin, 1966.

Thornley E. R., Statistical methods in rubber industry, Transactions of Inst. Rubber Industry 24, 1948, 241—255.

Tippett L. H. C., Statistical methods in textile research, Shirley Inst. Memoirs 8, 1929, 175—196.

VIII. Журналы и библиография

«Теория вероятностей и ее применения», Москва, 1956. —

Реферативный журнал «Математика» (отделы: теория вероятностей, математическая статистика), Москва, 1953. —

Математика в СССР за сорок лет, 1917—1957, т. I (обзорные статьи); т. II (библиография), М., Физматгиз, 1959. —

Математика в СССР, 1958—1967, М., «Наука», 1968.

Лукомская А. М., Библиография отечественной литературы по математике и физике. Под ред. акад. В. И. Смирнова, М. — Л., АН СССР, 1961.

«The Annals of mathematical statistics», 1930. —

«Mathematical Reviews» (отделы: theory of probability, mathematical statistics), 1940. —

«International Journal of abstracts. Statistical theory and methods», Edinburgh and London, 1960.

Deming Lola S., Selected bibliography of statistical literature, 1930 to 1957, I—VI. «Journal of research of the National Bureau of standards», B. Mathematics and mathematical physics, 64B—66B, 1960—1962.

Kendall M. G. and Doig A. G., Bibliography of statistical literature, 1940—1949, Edinburgh and London, 1965; 1950—1958, Edinburgh and London, 1962. Pre — 1940. Edinburgh and London, 1968.

А.К.МИТРОПОВСКИЙ. Техника статистических вычислений